

# Univers à symétrie maximum

# Introduction

- La cosmologie moderne suppose que l'univers respecte plutôt bien le principe cosmologique (principe Copernicien), c'est-à-dire qu'il ne présente ni de point, ni de direction privilégiée.
- A première vue cela semble faux, le centre d'une étoile comme le soleil, chaud et dense ressemblant vraiment très peu à l'espace interplanétaire désespérément vide et glacial.
- Bien entendu le principe Copernicien ne s'applique qu'à très grande échelle, là où des comptages de galaxies, l'étude du Rayonnement Fossile Cosmologique (RFC) montrent qu'il est plutôt bien respecté ( à  $10^{-5}$  pour le RFC par exemple).

Rapporté à la variété, qui décrit l'univers dans ces modèles, ceci implique qu'elles doivent être isotropes et homogènes.

L'isotropie spécifie qu'en chaque point l'univers doit paraître le même dans toutes les directions.

Plus formellement, une variété  $M$  est isotrope autour d'un point  $p$  si pour deux vecteurs quelconques  $V$  et  $W$  dans  $T_p M$  (espace tangent en  $p$ ) il existe une isométrie de  $M$  telle que la transformation de  $W$  par cette isométrie est parallèle à  $V$  (non transformé).

C'est cette isotropie qui est observée dans le RFC.

L'homogénéité signifie que la métrique est partout la même dans la variété, autrement dit étant donné deux points quelconques  $p$  et  $q$ , il existe une isométrie qui envoie  $p$  sur  $q$ .

Notons que les notions d'isotropie et d'homogénéité sont indépendantes

Une variété peut être homogène et nulle part isotrope comme par exemple le cylindre en métrique euclidienne ou à l'inverse il peut être isotrope autour d'un point, mais pas homogène (comme le sommet d'un cône par exemple).

Par contre si un espace est isotrope en tout point, il est nécessairement homogène.

De même, s'il est isotrope en un point et homogène il est isotrope partout.

Comme les observations semblent conforter l'hypothèse d'isotropie (de l'espace, dans l'univers) et que le principe Copernicien nous laisse à penser qu'il n'y a pas de point privilégié dans l'univers et que d'autres observateurs éventuels devraient observer la même situation, en conséquence nous supposons que l'espace dans l'univers est isotrope et homogène.

L'intérêt de l'isotropie et de l'homogénéité est que cela implique un univers avec un espace à symétrie maximum

Sous réserve de généralisation, l'isotropie peut être interprétée comme l'invariance par rotation et l'homogénéité par translation. Alors l'homogénéité et l'isotropie, ensemble, vont impliquer que l'espace va contenir un maximum de vecteurs de Killing.

En fait, ceci va se révéler limité, dans le modèle standard en cosmologie, les observations montrant que ceci est vrai pour l'espace mais pas pour l'espace temps.

Peut-on, étendre ce concept de symétrie maximale à l'espace-temps, c'est ce que nous allons étudier

En effet, il est instructif de commencer l'étude par les espaces temps à symétrie maximum, qui sont en fait la généralisation du cas particulier d'une situation où c'est seulement l'espace qui est à symétrie maximale.

Comme nous le verrons, dans un certain sens, de tels univers sont des « états de base » de la Relativité Générale. Cette discussion est assez spéculative, elle peut être ignorée de ceux qui s'en tiennent aux situations plus physiques.

# Construction espace-temps à symétrie maximale

- Quel niveau de symétries pour un « espace » (au sens général)?
- Un espace à  $n$  dimensions  $R_n$  de métrique euclidienne est invariant par les translations et rotations autour de tout point P.
- Il y a  $n$  translations linéairement indépendantes et comme il y a  $n$  axes de rotations, autour de chaque axe considéré il y a  $n-1$  rotations des autres axes, mais compte tenu qu'une rotation de  $x$  vers  $y$  est la même que  $y$  vers  $x$  il faut diviser l'ensemble par 2.
- Ceci fait donc :  $\frac{1}{2} n(n-1)$  rotations.
- Au total cela fait :  $n + \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1)$

# Construction espace-temps a symétrie maximale

- En espace de Minkowski de signature Lorenztienne, certaines rotations sont des boosts.
- Pour des espaces non euclidiens, il existe des espaces comme la sphère, et les hypersphères qui sont aussi à symétrie maximum, ainsi que leurs équivalents de type hyperbolique.
- Si la variété non euclidienne représentant l'espace-temps est à symétrie maximum sa courbure doit être la même partout et dans toutes les directions (homogène et isotrope).
- Si nous la connaissons en un point alors nous la connaissons pour tous les points. Il y a peu d'espaces à symétrie maximale.

# Quelques rappels

- Le tenseur de Riemann s'écrit :

- $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$

- OÙ  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  est un symbole de Christoffel qui vaut :

- $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$

- OÙ  $g_{\mu\nu}$  est la métrique et  $g^{\lambda\sigma}$  la métrique inverse définie par :

- $g^{\mu\rho} \cdot g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$

- OÙ  $\delta^{\mu}_{\nu}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 pour  $\mu = \nu$  et zéro sinon.

- Rappelons que la métrique et la métrique inverse permettent respectivement d'abaisser et d'élever des indices dans les tenseurs. Ainsi la version du tenseur de Riemann avec tous les indices bas s'écrit :

$$\bullet R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$$

- On doit sommer sur l'indice  $\rho$  de 0 à 3 sur son expression pour réaliser l'opération.

Le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  qui est la contraction du tenseur de Riemann s'écrit :

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

Conformément à la notation d'Einstein, on contracte en sommant sur l'indice  $\rho$  de 0 à 3.

Quant au scalaire de Ricci  $R$ , il vaut :

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Les variétés à symétrie maximale sont classées par la valeur du scalaire de courbure de Ricci  $R$  qui sera constant partout, le nombre de dimensions  $n$ , la signature de la métrique et la topologie (distinguer un  $n$ -tore de l'espace euclidien  $R_n$ ).

Pour de tels espaces nous pouvons reconstruire le tenseur de Riemann à partir du scalaire de Ricci  $R$

Il n'y a que peu de tenseurs qui ont cette propriété, la métrique, le tenseur de Kronecker et celui de Levi-Civita.

Cela implique que le tenseur de Riemann, dans ces coordonnées doit être proportionnel à un tenseur construit à partir de ces tenseurs invariants.

Comme ce tenseur doit respecter les symétries intrinsèques du tenseur de Riemann, la seule solution est :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = k. (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

Pour ces symétries on utilise la version du tenseur de Riemann avec tous les indices bas qu'on obtient en abaissant un indice sur la définition que nous avons donnée dans les rappels par multiplication par le tenseur métrique et contraction pour éliminer l'indice haut.

En fait, on montre ces propriétés sur sa valeur exprimée en coordonnées localement inertielles (voir par exemple « Spacetime and geometry », S. Carroll p. 140-141).

Dans cette version, il est évident qu'il est antisymétrique sur ses 2 premiers et 2 derniers indices, invariant par échange de la première paire avec la seconde la somme des permutations sur les 3 derniers indices est nulle, ceci fait que sur les 256 composantes il n'y a, au maximum, que  $1/12 (n^2(n^2-1))$  valeurs différentes, soit 20 pour  $n = 4$ .

Il peut y en avoir moins si des contraintes s'appliquent (symétries).

Où  $k$  est un facteur de proportionnalité.

Vérifions, par exemple, que cette solution satisfait bien à l'antisymétrie par permutation sur les 2 premiers indices ( $\rho \leftrightarrow \sigma$ ) du tenseur de Riemann

$$R_{\sigma\rho\mu\nu} = k. (g_{\sigma\mu} g_{\rho\nu} - g_{\sigma\nu} g_{\rho\mu})$$
$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = k. (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}) = - R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

Vous pouvez vérifier à titre d'exercice que les autres « symétries » sont bien réalisées.

Comme cette relation est tensorielle, elle est valide dans n'importe quelles coordonnées.

# Calcul de la constante de proportionnalité

- Quelques rappels :
- On utilise la convention d'Einstein pour la contraction des tenseurs (qui réduit leur ordre) un indice haut se contracte avec un indice bas de même nom, de dimension  $n$ , selon la loi :
- $A^\mu_{\nu} B_{\mu\rho} = C_{\nu\rho} = A^0_{\nu} B_{0\rho} + A^1_{\nu} B_{1\rho} + A^2_{\nu} B_{2\rho} + A^3_{\nu} B_{3\rho}$
- Dans cet exemple on somme sur  $\mu$  pour sa valeur de 0 à 3.
- Avec ces précisions, on doit être capable de comprendre la suite.

On peut facilement calculer la constante de proportionnalité en contractant les 2 termes de la relation ce qui se fait comme suit :

$$g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = R^{\mu}_{\sigma\mu\nu} = k. g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

On va d'abord élever le premier indice puis contracter sur cet indice et comme  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = n$  où  $n$  est le nombre de dimensions de la variété qui vaut 4 en relativité générale.

$$R^{\mu}_{\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\nu} = k. g^{\rho\mu} (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}) = k. (n g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} g_{\sigma\mu}) = k. (n g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\nu}) = k. (n - 1) g_{\sigma\nu}$$

Puis pour obtenir le scalaire de Ricci on va contracter une deuxième fois.

$$g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu} = R = k. (n - 1) g^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} = k. (n - 1)n \rightarrow \\ k = R/[n(n-1)]$$

Rappelons que  $n = 4$ , en relativité générale, donc:

On obtient alors :  $k = R/12$

Ce qui donne:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R/[n(n-1)] (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu}) = R/12 (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu})$$

Et le scalaire de Ricci «  $R$  » doit être constant partout dans la variété. Comme nous pouvons toujours mettre la métrique sous sa forme canonique en un point quelconque ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ), les sortes d'espaces temps à symétrie maximum vont être caractérisés localement par la signature de la métrique et par le signe du paramètre constant  $K$ .

Nous disons, localement, pour permettre différentes solutions globales possibles, comme pour le plan et le tore.

Nous nous intéressons aux métriques de signature  $(- + + +)$ .

**Les 3 cas génériques correspondent donc à  $K < 0$  espace-temps anti De Sitter ,  $K = 0$  espace-temps de Minkowski ,  $K > 0$  espace-temps de De Sitter**

- 
- Pour  $K = 0$  nous connaissons bien cette métrique, c'est celle de Minkowski.
- 
- $$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4.3)$$
- 
- Le diagramme conforme associé est connu. C'est l'espace-temps de la relativité restreinte. Nous ne développerons pas ce cas.

# L'espace-temps à symétrie maximum avec $K > 0$ , courbure positive est appelé l'espace De Sitter .

- Considérons un espace de Minkowski à 5 dimensions de métrique
- $ds_5^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ ,
- De la même manière qu'on définit la surface 2D d'une sphère, imbriquée dans un espace Euclidien 3D, par  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , définissons l'hyperboloïde :
- $-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$
- Le choix à priori de l'**hypersurface 4D** « Hyperboloïde » imbriqué dans un espace **Minkowskien 5D**, s'appuie sans doute sur la connaissance de la courbure d'une telle hypersurface compatible avec ce qu'on recherche.

Maintenant définissons les coordonnées  $(t, \chi, \theta, \Phi)$  sur l'hyperboloïde via:

$$\begin{aligned} u &= \alpha \sinh(t/\alpha), \quad w = \alpha \cosh(t/\alpha) \cos \chi, \quad x = \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \chi \cos \theta \\ y &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \chi \sin \theta \cos \Phi, \quad z = \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \chi \sin \theta \sin \Phi \end{aligned}$$

La métrique sur l'hyperboloïde est alors:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2)] \quad (1)$$

Remarque sur les notations : Par 2-sphère nous entendons la surface (à deux dimensions) d'une sphère classique, par une 3-sphère il s'agit d'une hypersphère 3D.

Entre parenthèses c'est la métrique sur une 2-sphère  $d\Omega_2^2$  et entre crochets la métrique sur une 3-sphère  $d\Omega_3^2$ .

Donc la métrique de "de Sitter" décrit une 3-sphère qui initialement rétrécit, atteint son minimum pour  $t = 0$ , et ensuite rebondit et gonfle à jusqu'à l'infini.

Bien sûr cette description est valide dans ce système de coordonnées, nous verrons qu'il y a d'autres descriptions tout aussi valides.

Ces coordonnées couvrent toute la variété. On peut le vérifier en étudiant le comportement des géodésiques aux limites du système de coordonnées, car si les coordonnées sont incomplètes, les géodésiques se terminent alors que le paramètre affine associé reste fini.

La topologie de l'espace « de Sitter » est donc  $\mathbb{R} \times S^3$ .

Il y correspond un diagramme conforme très simple, on peut en effet écrire cette métrique dans une forme conformément reliée à l'univers statique d'Einstein: un espace temps de topologie  $\mathbb{R} \times S^3$ , décrivant une 3-sphère spatiale (hypersphère) de rayon constant dans le temps.

Considérons la transformation de coordonnée de  $t$  en  $t'$  par :

$$\cosh(t/\alpha) = 1/\cos(t')$$

La métrique (1) devient alors:

$$ds^2 = [ \alpha^2/\cos^2(t') ] ds'^2,$$

Où  $ds'^2$  est la métrique de l'univers statique d'Einstein

$$ds'^2 = -dt'^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi \cdot d\Omega_2^2, \quad (2)$$

La nouvelle coordonnée temps  $t'$  s'étend de  $-\pi/2 < t' < \pi/2$  quand  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$

Ceci est représenté par le diagramme ci-dessous.

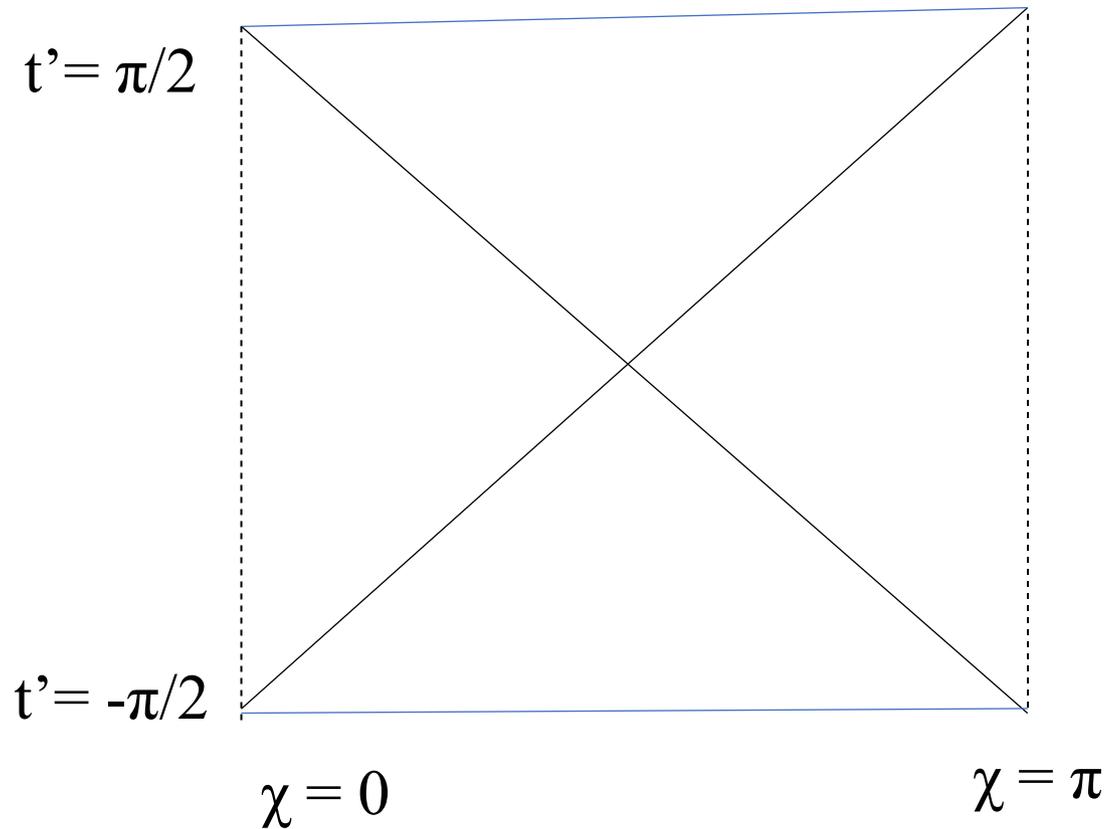


Fig.1: Diagramme conforme de l'espace-temps «de Sitter». Les tranches d'espace sont des 3-sphères, (à  $t'$  constant), donc les points du diagramme sont des 2-sphères, sauf sur les bords droits et gauche qui représentent des points (les pôles nord et sud de la sphère) .

Le diagramme conforme de l'espace temps « de Sitter » est simplement la représentation de la pièce de l'univers statique d'Einstein, qui y est conformément équivalent. Il ressemble à un carré, comme la figure 1 le montre.

Les lignes diagonales représentent des trajectoires de photons. Un photon partant de l'infini du passé va aller à l'antipode de cette 3 sphère à l'infini du futur.

Gardons à l'esprit que l'espace se « termine » dans le passé et dans le futur par la « magie » de la transformation conforme, l'espace-temps de « De Sitter » s'étendant indéfiniment vers le passé et vers le futur.

Remarquons aussi que deux points peuvent avoir des cônes de lumière du futur ou du passé qui sont complètement disjoints.

Ceci est dû au fait que les sections sphériques spatiales s'étendent si rapidement que la lumière d'un point ne peut jamais rencontrer celle émise par l'autre.

# Espace-temps anti-De sitter

- Une construction similaire d'hyperboloïde nous révèle l'espace temps de symétrie maximum pour  $K < 0$ , appelé espace-temps anti-de Sitter.
- Commençons par une variété à 5 dimensions plate de métrique :  $ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$   
et définissons y un hyperboloïde donné par:
  - $-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2$
- Remarquons tous les signes moins. Puis définissons des coordonnées  $(t', \rho, \theta, \Phi)$  sur l'hyperboloïde via:
  - $u = \alpha \sin(t') \cdot \cosh(\rho)$ ,  $v = \alpha \cos(t') \cdot \cosh(\rho)$
  - $x = \alpha \sinh(\rho) \cdot \cos\theta$ ,  $y = \alpha \sinh(\rho) \cdot \sin\theta \cos\Phi$
  - $z = \alpha \sinh(\rho) \cdot \sin\theta \sin\Phi$

La métrique sur l'hyperboloïde est alors:

$$ds^2 = \alpha^2[-\cosh^2(\rho)dt'^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_2^2] \quad (3)$$

Sur ces coordonnées on peut remarquer que "t'" est périodique. On voit sur que  $t'$  et  $t' + 2\pi$  représentent le même point sur l'hyperboloïde.

Comme  $\partial t'$  est partout de type temps, une courbe à  $(\rho, \theta, \Phi)$  constants va être une boucle temporelle lorsque "t'" aura varié de  $t'$  à  $t' + 2\pi$ .

Cependant ceci n'est pas une propriété intrinsèque de l'espace temps, mais simplement un artéfact lié à la façon dont nous avons dérivé la métrique d'une imbrication particulière.

Considérons plutôt l'espace de recouvrement de cette variété, l'espace temps associé à la métrique (3) où  $t'$  peut varier de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Il n'y a pas de boucles temporelles dans cet espace-temps que nous allons considérer comme définissant l'espace temps « anti de Sitter »

Pour construire le diagramme conforme, réalisons une transformation de coordonnée similaire à celle de l'espace de "de Sitter", mais sur la coordonnée radiale.

$$\cosh(\rho) = 1/\cos(\chi), \quad (4)$$

de sorte que

$$ds^2 = (\alpha^2/\cos^2\chi).ds'^2$$

où  $ds'^2$  représente comme précédemment la métrique de l'univers statique d'Einstein.

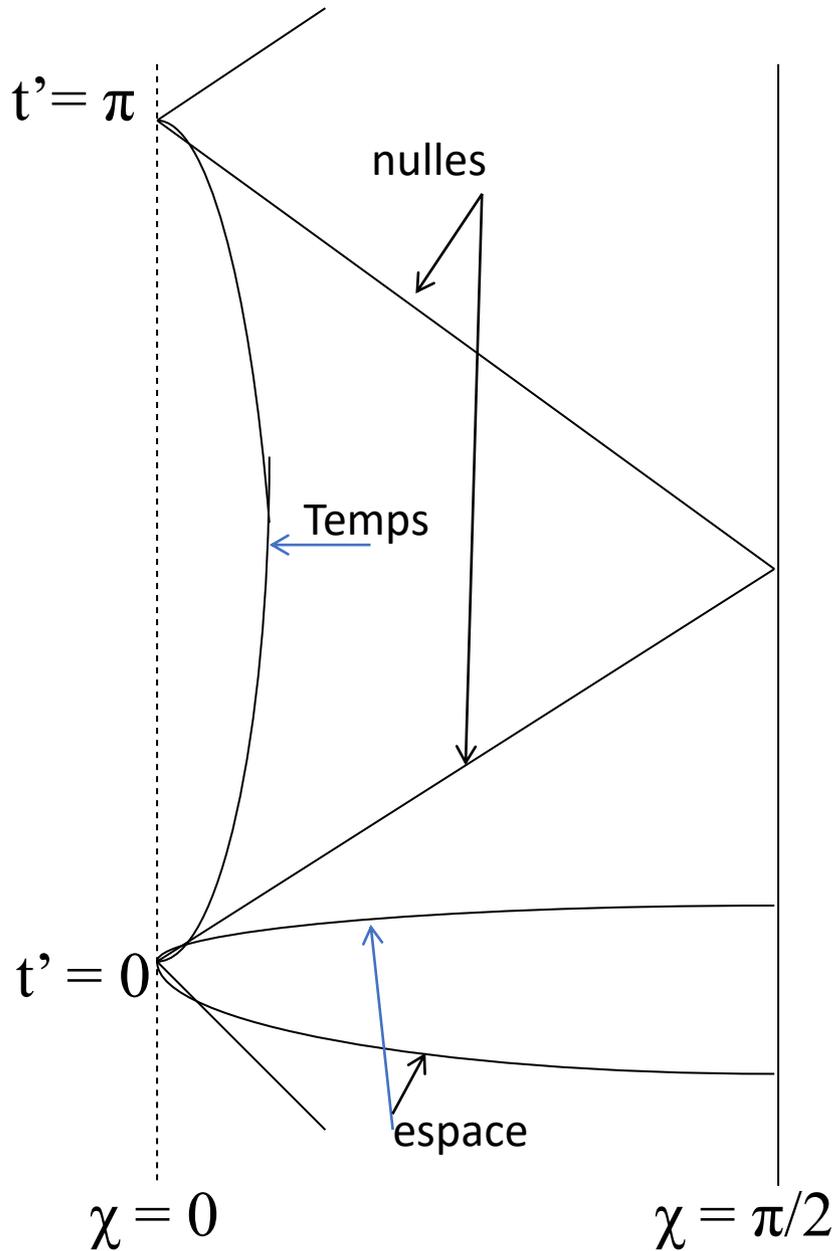
A la différence de la métrique de « de Sitter », la coordonnée radiale apparaît maintenant dans le facteur conforme. De plus pour anti de Sitter, la coordonnée  $t'$  varie de moins l'infini à plus l'infini, tandis que, d'après (4), la variation de la coordonnée radiale  $\rho$  (de 0 à  $\infty$ ) va correspondre à la variation de  $0 \leq \chi < \pi/2$

Donc l'espace temps anti de Sitter est conformément relié à un demi univers statique d'Einstein. Le diagramme conforme montre quelques géodésiques de type espace et temps passant par  $t'=0$ ,  $\chi = 0$ . Comme  $\chi$  varie de 0 à  $\pi/2$  et non pas jusqu'à  $\pi$ , une tranche de type espace de cet espace temps a la topologie de l'intérieur d'un hémisphère de  $S^3$ , de topologie  $R^3$  (et l'espace entier a la topologie  $R^4$ ).

Remarquons que nous avons tracé le diagramme en coordonnées polaires, de sorte qu'un point à gauche représente un point à l'origine spatiale, tandis qu'à droite cela représente un point à l'infini spatial.

Une autre représentation courante représente l'espace temps en coupe, l'origine spatiale est alors au milieu et les bords gauches et droits ensemble représentent l'infini spatial.

# Diagramme conforme anti-de Sitter.



Les tranches d'espace ont la topologie de  $\mathbb{R}^3$ , que nous avons représenté en coordonnées polaires, de sorte que les points sur le diagramme sont des 2-sphères sauf sur le bord gauche qui sont des points à l'origine spatiale.

L'infini est une surface de type temps sur le côté droit.

Une propriété intéressante de l'espace anti de Sitter est que l'infini prend la forme d'une hypersurface de type temps, définie par  $\chi = \pi/2$ .

Comme l'infini est de type temps, l'espace n'est pas globalement hyperbolique, nous n'avons pas un problème de valeur initiale bien posé en termes d'information spécifiée sur une tranche d'espace, car de l'information peut toujours émerger de l'infini.

.

Autre propriété intéressante, la carte exponentielle n'est pas définie sur toute la variété : des géodésiques comme celles dessinées sur la figure, qui sont issues d'un point particulier ne s'étendent pas dans la variété complète

Les géodésiques de type temps orientées vers le futur, comme indiqué, peuvent s'étendre radialement vers l'infini depuis  $t'=0$ ,  $\chi = 0$ , mais éventuellement se refocaliser au point  $t' = \pi$ ,  $\chi = 0$  et ainsi de suite.

# Correspondance AdS/CFT

- En prime, il est difficile de passer sous silence que la nature de type temps de l'infini correspond à une propriété remarquable de la théorie des cordes, la correspondance AdS/CFT. AdS est l'espace anti de Sitter, que nous avons vu et CFT ( Conformally-invariant Theory) signifie Théorie des Champs conformément invariante ( invariante vis-à-vis d'une transformation conforme) définie sur la frontière de l'espace AdS qui est un espace temps de dimension  $(n-1)$ .

La correspondance AdS/CFT suggère que jusqu'à un certain point, il y a équivalence entre la gravité quantique (ou une de ses versions super symétriques) dans un cadre AdS et une théorie des champs non gravitationnelle conformément invariante définie sur sa frontière. Comme la théorie quantique des champs non gravitationnelle est quelque chose que nous connaissons, nous escomptons que cette correspondance ( si elle se révèle exacte, ce que nous supposons, mais n'avons pas prouvé) nous apprendra beaucoup sur ce qui peut se passer en théorie de gravitation quantique.

# Cas des espaces 3 D symétriques: exemple de la métrique de Robertson-Walker

## Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique

Si on s'intéresse aux métriques 3D à symétrie maximum  $\gamma_{ij}$ , elles obéissent à la loi:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) \quad (2)$$

où  $k$  est une constante et l'indice  ${}^{(3)}$  sur le tenseur de Riemann nous rappelle que c'est une métrique 3D (spatiale),  $\gamma_{ij}$  n'est donc pas la métrique de l'espace temps.

## Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D

Les composantes (d'espace) du tenseur de Ricci prennent la forme très simple suivante:

$${}^{(3)}R_{jl} = 2k \cdot \gamma_{jl} \quad (3)$$

Un espace à symétrie maximale possède nécessairement une symétrie sphérique, soit

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\Phi^2) \quad (4)$$

Les composantes du tenseur de Ricci,  $R_{ik} = \partial_l \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km}$ , se réduisent à :

$${}^{(3)}R_{11} = (2/r) \partial_1 \beta, \quad {}^{(3)}R_{22} = e^{-2\beta} (r \cdot \partial_1 \beta - 1) + 1, \quad {}^{(3)}R_{33} = [e^{-2\beta} (r \cdot \partial_1 \beta - 1) + 1] \sin^2\theta \quad (5)$$

On les pose proportionnels à la métrique en utilisant (3), et on résout pour  $\beta(r)$ :

$$\beta = -1/2 \ln(1 - k \cdot r^2) \quad (6)$$

Détaillons le résultat de (6) à partir de (3) (4) et (5)

Les coordonnées 1, 2, 3 sont respectivement  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Les composantes de la métrique spatiale sont données par (4)

$$\gamma_{11} = e^{2\beta(r)} \quad \gamma_{22} = r^2 \quad \gamma_{33} = r^2 \cdot \sin^2(\theta) \quad (7)$$

Pour la composante  $\gamma_{11}$  de la métrique qui est  $r$  cela donne :

$$R_{11} = 2k \cdot e^{2\beta(r)} = (2/r) \partial_r \beta(r) \quad (8)$$

$$R_{22} = 2k \cdot r^2 = [e^{-2\beta(r)} (r \cdot \partial_r \beta(r) - 1)] + 1 \quad (9)$$

$$R_{33} = 2k \cdot r^2 \cdot \sin^2(\theta) = \{ [e^{-2\beta(r)} (r \cdot \partial_r \beta(r) - 1)] + 1 \} \sin^2(\theta) \quad (10)$$

On voit que les 2 dernières équations sont identiques

Vérifions que la solution donnée par (6) satisfait bien ces équations :

$$R_{11} = 2k \cdot e^{2(-1/2 \ln(1-kr^2))} = 2k \cdot e^{-\ln(1-kr^2)} = 2k/(1-kr^2) = (2/r) \partial_r(-1/2 \ln(1-kr^2)) \quad (11)$$

$$R_{22} = 2k \cdot r^2 = [e^{-2(-1/2 \ln(1-kr^2))} \cdot r \cdot \partial_r(-1/2 \ln(1-kr^2)) - 1] + 1 = [r(1-kr^2)] \cdot [\partial_r(-1/2 \ln(1-kr^2)) - 1] + 1 \quad (12)$$

En utilisant la formule  $\ln(u)' = (u'/u)$ , nous obtenons :

$$\partial_r \beta(r) = \partial_r(-1/2 \ln(1-kr^2)) = -1/2 \cdot (-2kr)/(1-kr^2) = kr/(1-kr^2) \quad (13)$$

Vérifions que la solution proposée est correcte en substituant ce résultat dans (11) :

$$2k/(1-kr^2) = (2/r)kr/(1-kr^2) = 2k/(1-kr^2) \quad (14)$$

C'est correct.

Vérifions pour l'équation (12).

$$2k \cdot r^2 = [(1-kr^2)] \cdot [kr^2/(1-kr^2) - 1] + 1 = [(1-kr^2)] \cdot [(kr^2 - 1 + kr^2)/(1-kr^2)] + 1 = (kr^2 - 1 + kr^2) + 1 = 2kr^2 \quad (15)$$

Ce qui est bien vérifié.