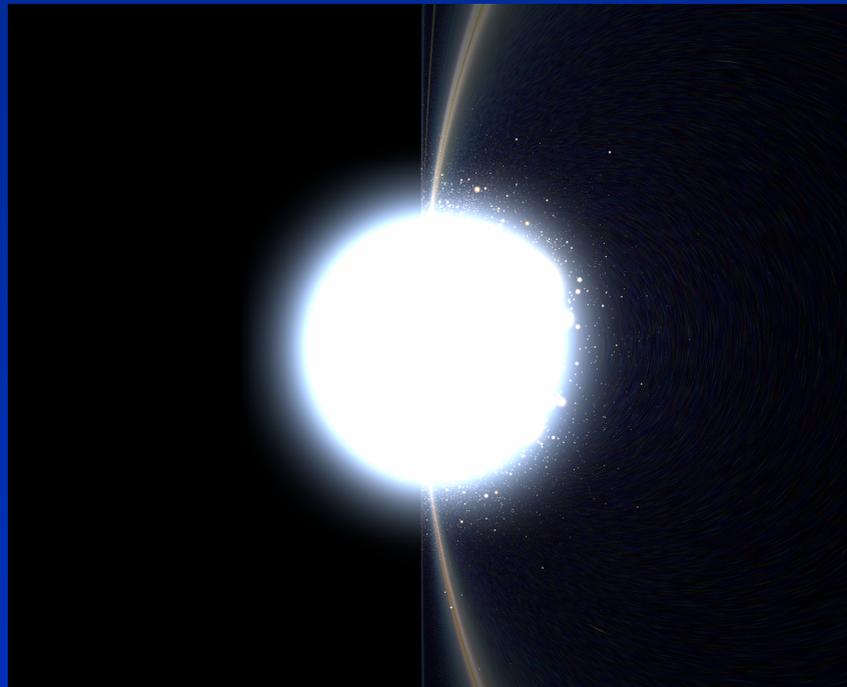


Voyage autour (et à l'intérieur) d'un trou noir

Alain Riazuelo

Institut d'astrophysique de Paris

Société astronomique de France, Paris, 28 juin 2008



Avec la participation parfois ponctuelle mais néanmoins cruciale de
Yves Zolnierowski, Gilles Esposito-Farèse, Guillaume Faye, Bernard Fort, Simon Prunet,
Éric Hivon, Sam Hocevar, Jeffrey Weeks, David Monniaux, Médéric Bocquien

Qu'est-ce qu'un trou noir ? (I)

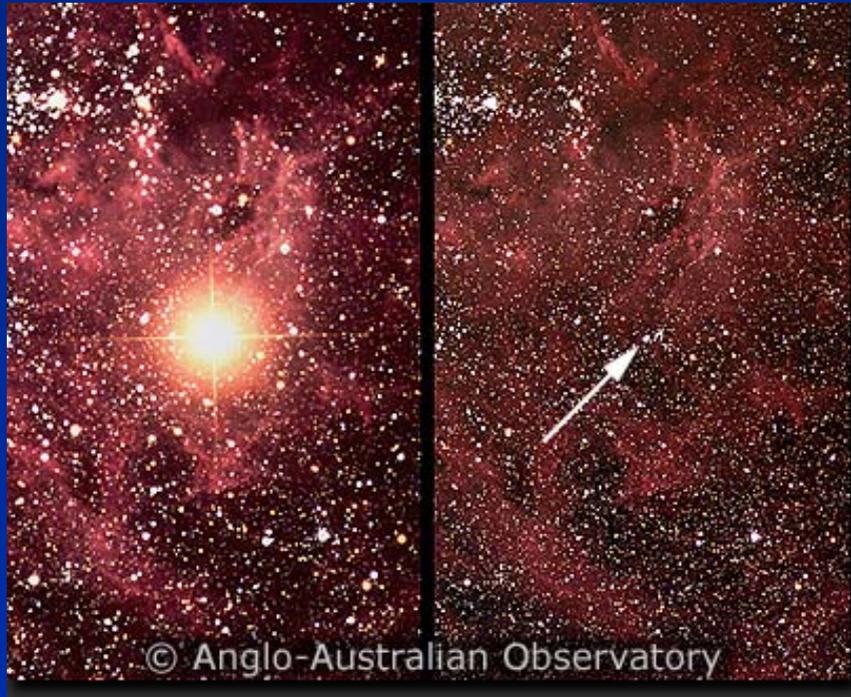
- ♣ Une région de l'espace dont le champ gravitationnel empêche tout (matière ou rayonnement) de s'échapper

$$\frac{GM}{R} \geq \frac{1}{2}c^2$$

- ♣ Le produit de l'évolution des étoiles les plus massives qui explosent en fin de vie (supernova)
- ♣ Un objet "vide" dont le contenu matériel se concentre au "centre"
- ♣ Un objet qui se forme quelles que soient les forces de pression à l'œuvre

$$\frac{dP}{dr} \propto - \left(G \frac{\left[M(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2} \right]}{r^2} \right) \left(\mu(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right)$$

Qu'est-ce qu'un trou noir ? (II)



SN 1987A, juste avant (dr.) et juste après (g.)

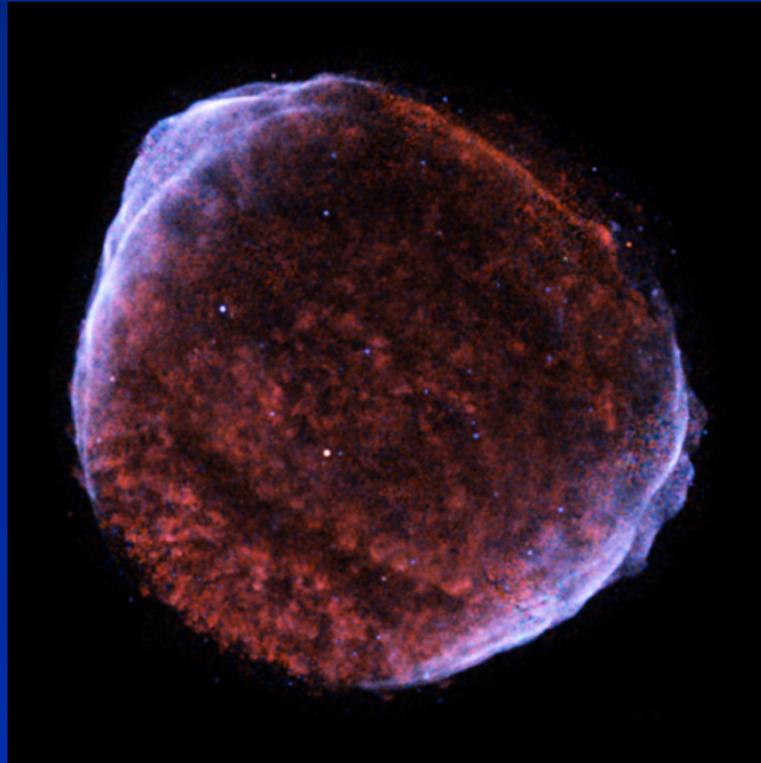
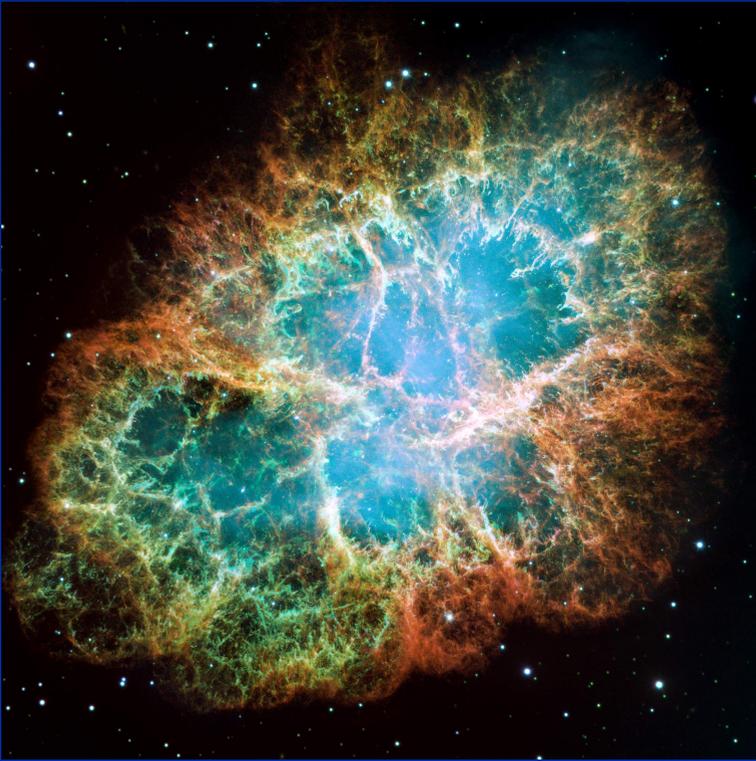
♣ Une supernova, c'est :

- L'explosion et la destruction totale d'un cadavre stellaire (naine blanche) quand celui-ci dépasse une masse critique (masse de Chandrasekhar) → **Supernova thermonucléaire**

♣ Ou alors

- L'implosion du cœur de fer de l'étoile du fait de l'arrêt des réactions nucléaires
- La dislocation des couches extérieures suite à une onde de choc générée par les neutrinos produits (${}^{56}_{26}\text{Fe} + 26e^{-} \rightarrow 13{}^4_2\text{He} + 4n + 26e^{-} \rightarrow n + p + e^{-} + \nu + \bar{\nu}$) → **Supernova à effondrement de cœur**

Qu'est-ce qu'un trou noir ? (III)

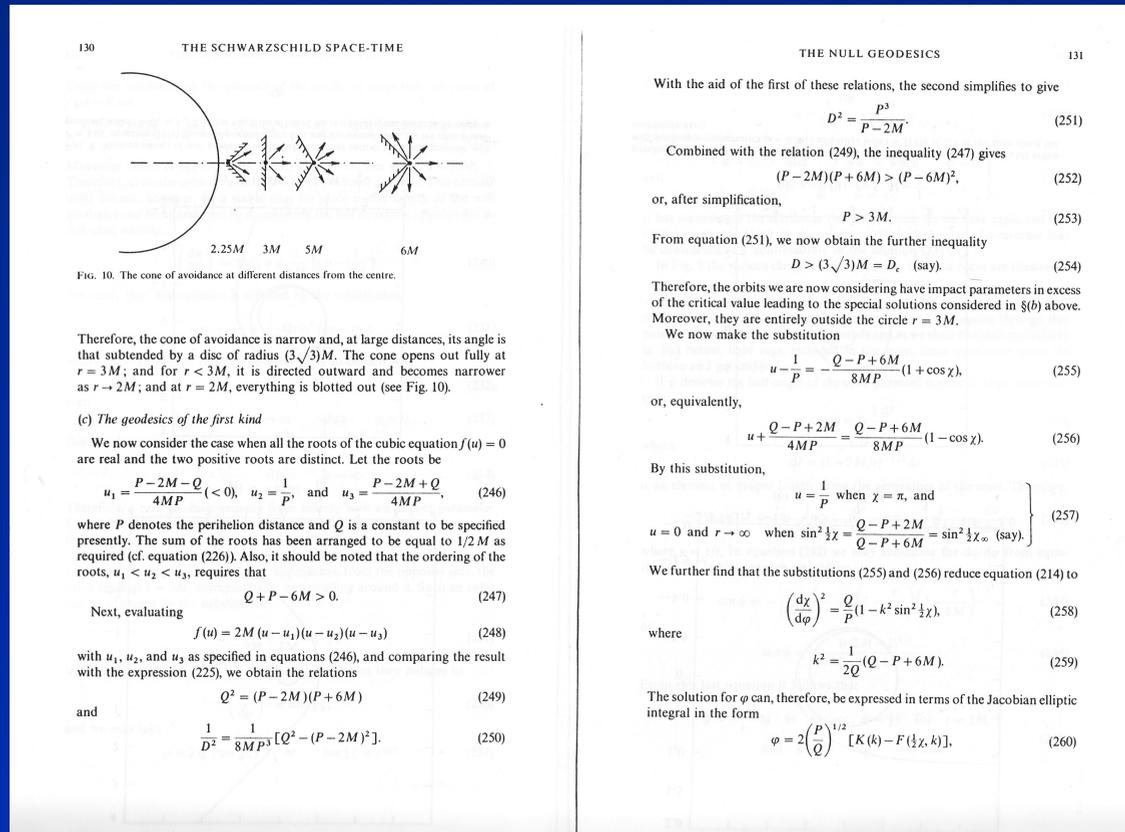


Quelques rémanents de supernova (g. : SN 1054 ; dr. : SN 1006)

♣ La supernova laisse derrière elle :

- Un rémanent de supernova (toujours), qui se dissipe dans le milieu interstellaire en quelques centaines de milliers d'années
- Un résidu compact (étoile à neutrons ou trou noir) quand elle est à effondrement de cœur

À quoi ressemble un trou noir ?



S. Chandresakhar, *The mathematical theory of black holes* (1983), 646 pages

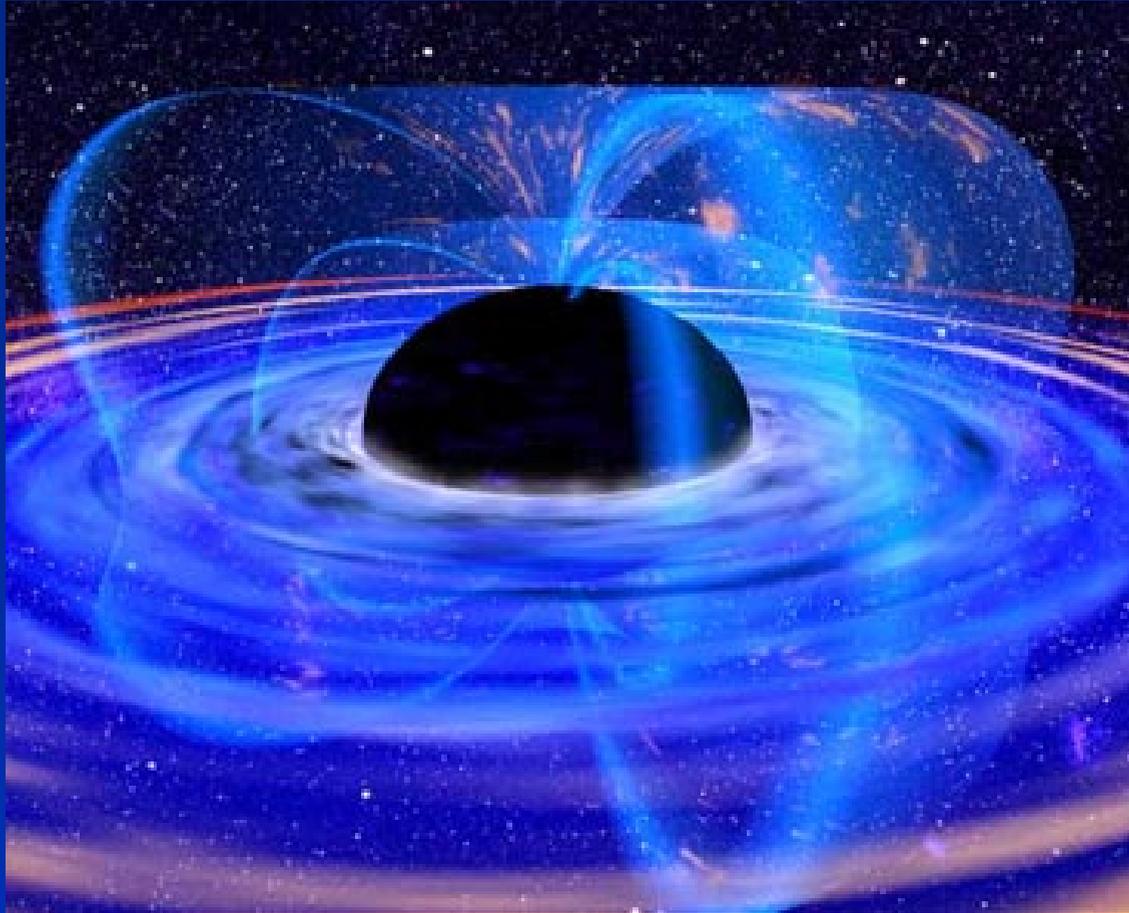
♣ Peu de travaux de visualisation...

- J.-P. Luminet, *A & A* **75**, 228–235 (1979)
- J.-A. Marck, *Class. Quant. Grav.* **13**, 393–402 (1996), gr-qc/9505010

♣ ... y compris en relativité restreinte

- C. M. Savage & A. C. Searle, *Seeing Relativity*, <http://www.anu.edu.au/Physics/Searle/> + DVD

À quoi ne ressemble *pas* un trou noir ?



Vue d'artiste NASA

♣ Erreurs au niveau de :

- Disque d'accrétion : Doppler, épaisseur, intensité, bord interne, "jets" (?)
- Silhouette : forme, effet Lense-Thirring
- Déflexions : disque, image de fond, anneau d'Einstein

À quoi ressemblera un trou noir ? (I)

♣ Taille caractéristique : Rayon **périmétrique** de Schwarzschild,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \sim \frac{M}{M_\odot} \times 3 \text{ km}$$

♣ Taille angulaire

$$\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{2R_S}{D} \sim \frac{M}{M_\odot} \frac{1 \text{ kpc}}{D} \times 10^{-4} \mu\text{as}$$

♣ Exemples :

- Cyg X-1 : $M \sim 10M_\odot$, $D \sim 1.7 \text{ kpc}$, $\theta \sim 0.6 \text{ nas}$

Note : 1 nas = détail de 1 μm vu à la distance Terre-Lune, ou un proton à 8 cm...

- Sgr A* : $M \sim 2.6 \times 10^6 M_\odot$, $D \sim 8.5 \text{ kpc}$, $\theta \sim 30 \mu\text{as}$
- M 87 : $M \sim 3.3 \times 10^9 M_\odot$, $D \sim 16 \text{ Mpc}$, $\theta \sim 20 \mu\text{as}$

Instrument optique de diamètre D : $\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D} < \frac{0.5 \mu\text{m}}{100 \text{ m}} \sim 1 \text{ mas}$

♣ → **Méthodes interférométriques** indispensables

À quoi ressemblera un trou noir ? (II)

♣ Divers projets :

- Interférométrie radio (VLBI) : $\lambda \sim 3$ mm, $B \sim 10^4$ km, $\theta \sim 100 \rightarrow 30 \mu\text{as}$
(T. P. Krichbaum *et al.*, astro-ph/0607077 ; H. Falcke *et al.*, astro-ph/9912263)
- GRAVITY : astrométrie proche IR en VLTI (phase A \rightarrow 2012), $\theta \sim 10 - 15 \mu\text{as}$
(S. Gillessen *et al.*, astro-ph/0607372)
- MAXIM (*Micro-Arcsecond X-Ray Imaging Mission* : interférométrie X (projet NASA “Beyond Einstein”), $\theta \sim 1 \mu\text{as}$
“But no studies exist as to the feasibility and technology requirements to realize an orbiting X-ray interferometer. This is because the technology challenges are severe and this program maybe at least 25-50 years in the future.”

Objectif

♣ Simuler l'environnement d'un trou noir pour un observateur situé à proximité de celui-ci

- $D \sim 0.1 - 100 R_S$
- $M \sim 10^4 - 10^6 M_\odot$ (“viabilité” + temps dynamique de la zone)

■ Effets de marées à l'horizon :

$$|\nabla g| \sim \frac{GM}{R_S^3} \sim \frac{c^6}{8G^2 M^2} \sim 10^{10} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 g \text{ m}^{-1}$$

■ Période de rotation à la dernière orbite stable ($R = 3R_S$) :

$$T^2 \sim \frac{4\pi^2 (3R_S)^3}{GM} \sim \frac{964\pi^2 G^2 M^2}{c^6}, \quad T \sim 0.5 \frac{M}{M_\odot} \text{ ms}$$

- $\theta \sim 1 \text{ rad}$
- $v \sim 0.1 - 0.5 c$
- $\theta_{\text{pix}}^{\text{Terre}} \sim 30 \text{ nas}$

♣ Trous noirs de Schwarzschild et de Reissner-Nordström (symétrie sphérique)

♣ Pas de disque d'accrétion

♣ Trajectoires géodésiques

PLAN

1. **Introduction**
2. **Un peu de relativité restreinte**
3. **Trou noir de Schwarzschild**
4. **Trou noir de Reissner-Nordström**
5. **Conclusions**

Un peu de relativité restreinte

- ♣ Comment est vue la sphère céleste par un observateur se déplaçant à vitesse relativiste par rapport à celle-ci ?
- ♣ Quels sont les effets relativistes dus à un déplacement à vitesse élevée par rapport à un référentiel donné ?
 - Aberration
 - Doppler
 - Intensité
 - Amplification (objets ponctuels)

Aberration (I)

♣ Aberration = conséquence de la loi de composition des vitesses (cf pluie sur pare-brise de voiture ou direction du vent pour un voilier)

♣ Approximation non relativiste

- Signal provenant de la direction $\hat{\mathbf{n}}_*$ à la vitesse v_s , $\rightarrow \mathbf{v}_s = -v_s \hat{\mathbf{n}}_s$
- Pour un observateur se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}_{\text{obs}} = v_{\text{obs}} \hat{\mathbf{u}}$,

$$\mathbf{v}'_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{\text{obs}}$$

- Changement de direction apparente de la lumière (Bradley + bachelier anonyme + γ Draconis, 1728–1748):

$$\hat{\mathbf{n}}'_* = \frac{v_{\text{obs}} \hat{\mathbf{u}} + c \hat{\mathbf{n}}_*}{\sqrt{v_{\text{obs}}^2 + c^2 + 2v_{\text{obs}} c \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_*}}$$

$$\theta_{\hat{\mathbf{n}}'_*, \hat{\mathbf{u}}} < \theta_{\hat{\mathbf{n}}_*, \hat{\mathbf{u}}}$$

Aberration (II)

♣ Formule relativiste ($v_s = c$, $\beta = v_{\text{obs}}/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$)

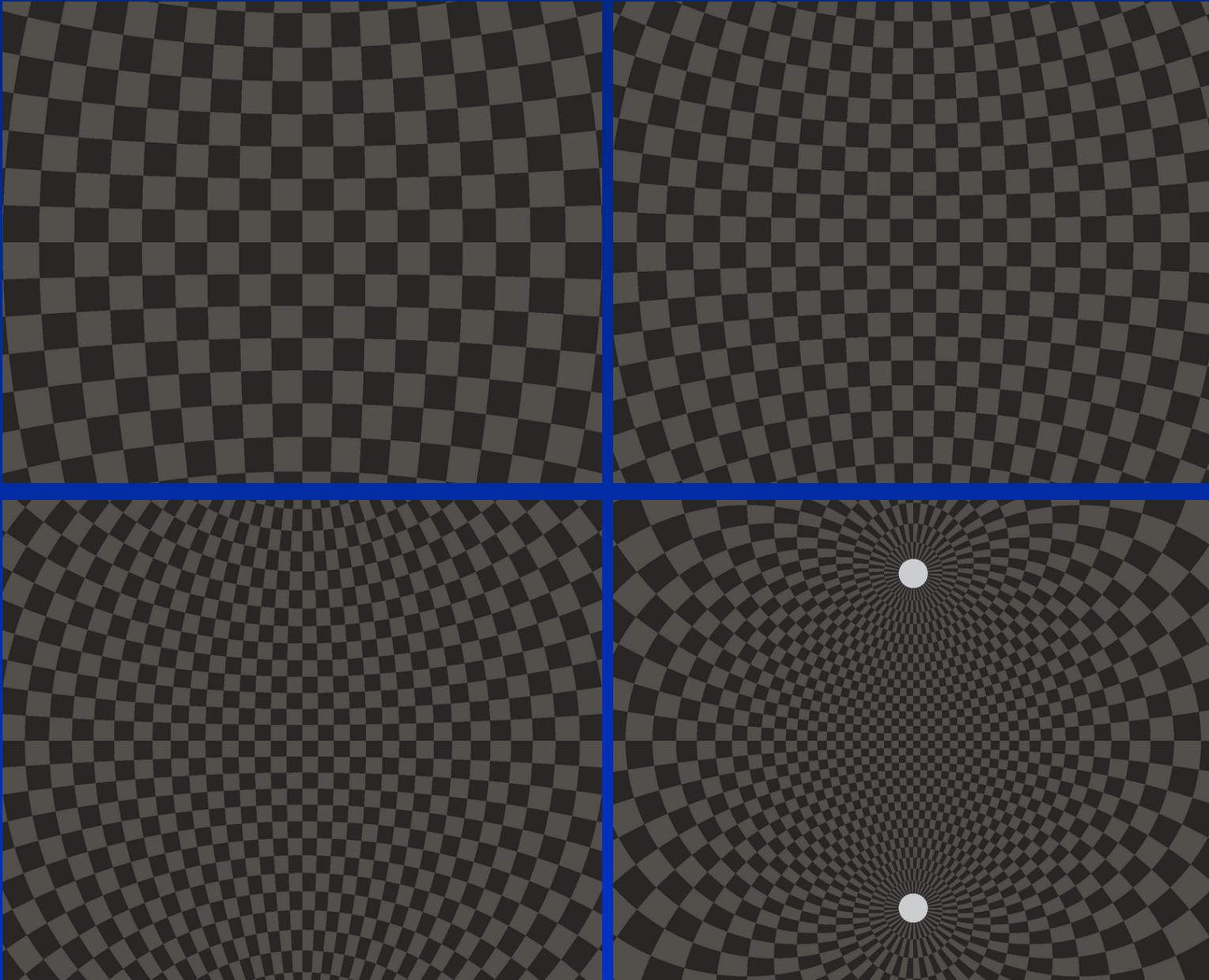
$$\hat{\mathbf{n}}'_* = \frac{1 \hat{\mathbf{n}}_* + (\beta\gamma + (\gamma - 1)\hat{\mathbf{n}}_* \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}}{\gamma (1 + \beta\hat{\mathbf{n}}_* \cdot \hat{\mathbf{u}})}$$

$$\hat{\mathbf{n}}'_* \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{\beta + \hat{\mathbf{n}}_* \cdot \hat{\mathbf{u}}}{1 + \beta\hat{\mathbf{n}}_* \cdot \hat{\mathbf{u}}} \geq \hat{\mathbf{n}}_* \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{ou } \theta_{\hat{\mathbf{n}}'_*, \hat{\mathbf{u}}} < \theta_{\hat{\mathbf{n}}_*, \hat{\mathbf{u}}})$$

- Effet contre-intuitif (opposé à la parallaxe)
- Propriété importante (Penrose 1958) :
 - L'image d'un cercle reste un cercle
 - L'image du centre géométrique d'un cercle n'est pas le centre géométrique du cercle image
 - L'image de deux cercles concentriques correspond à deux cercles non concentriques
 - Les images de deux directions antipodales ne sont pas antipodales

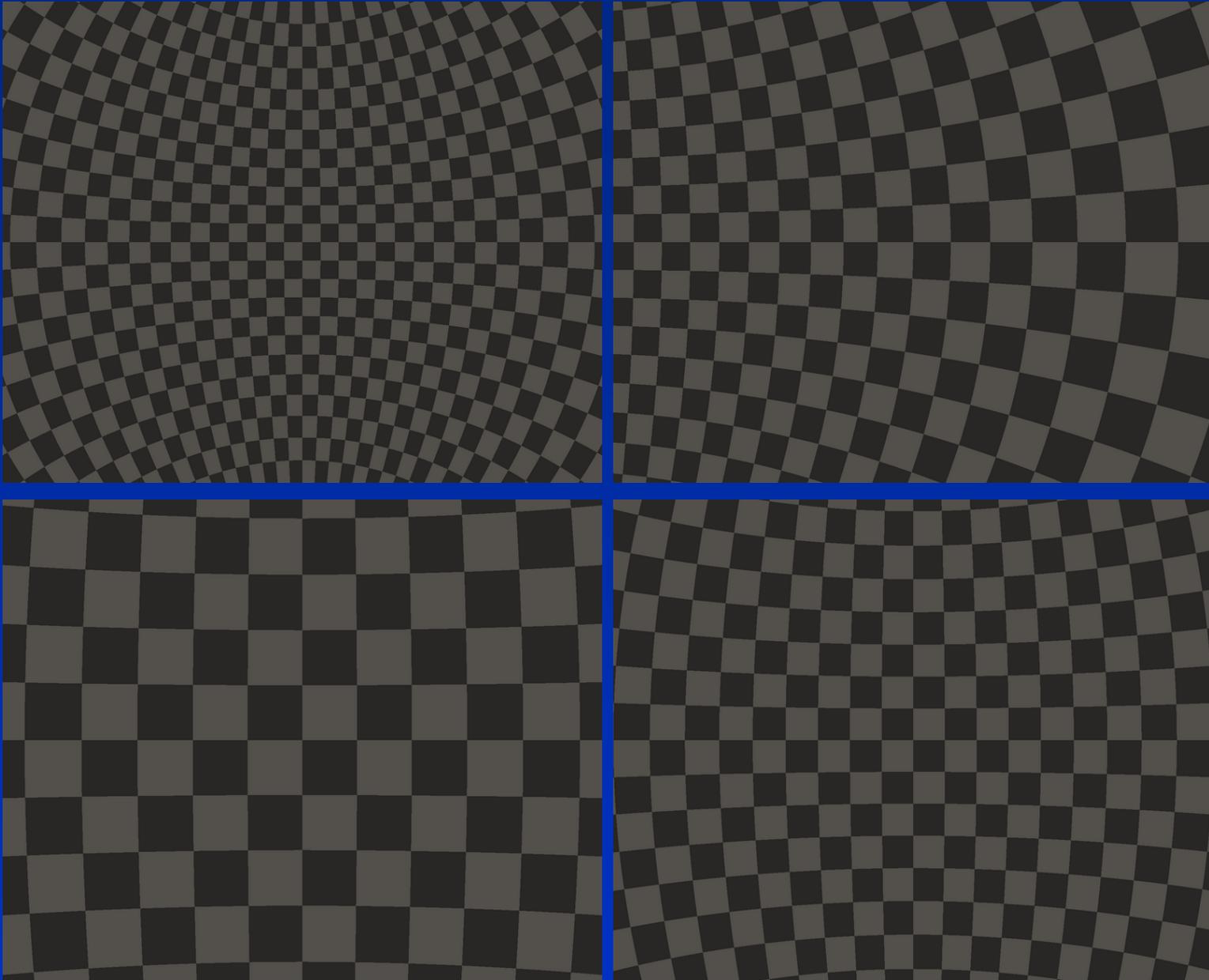
Exemples : $\beta = 0, 0.3, 0.6, 0.9$

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



Exemples : $\beta = 0.5$, vues devant, droite, derrière

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



Doppler

♣ Formule relativiste

$$\omega' = \gamma \omega (1 + \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}})$$

- Redshift (ou blueshift) :

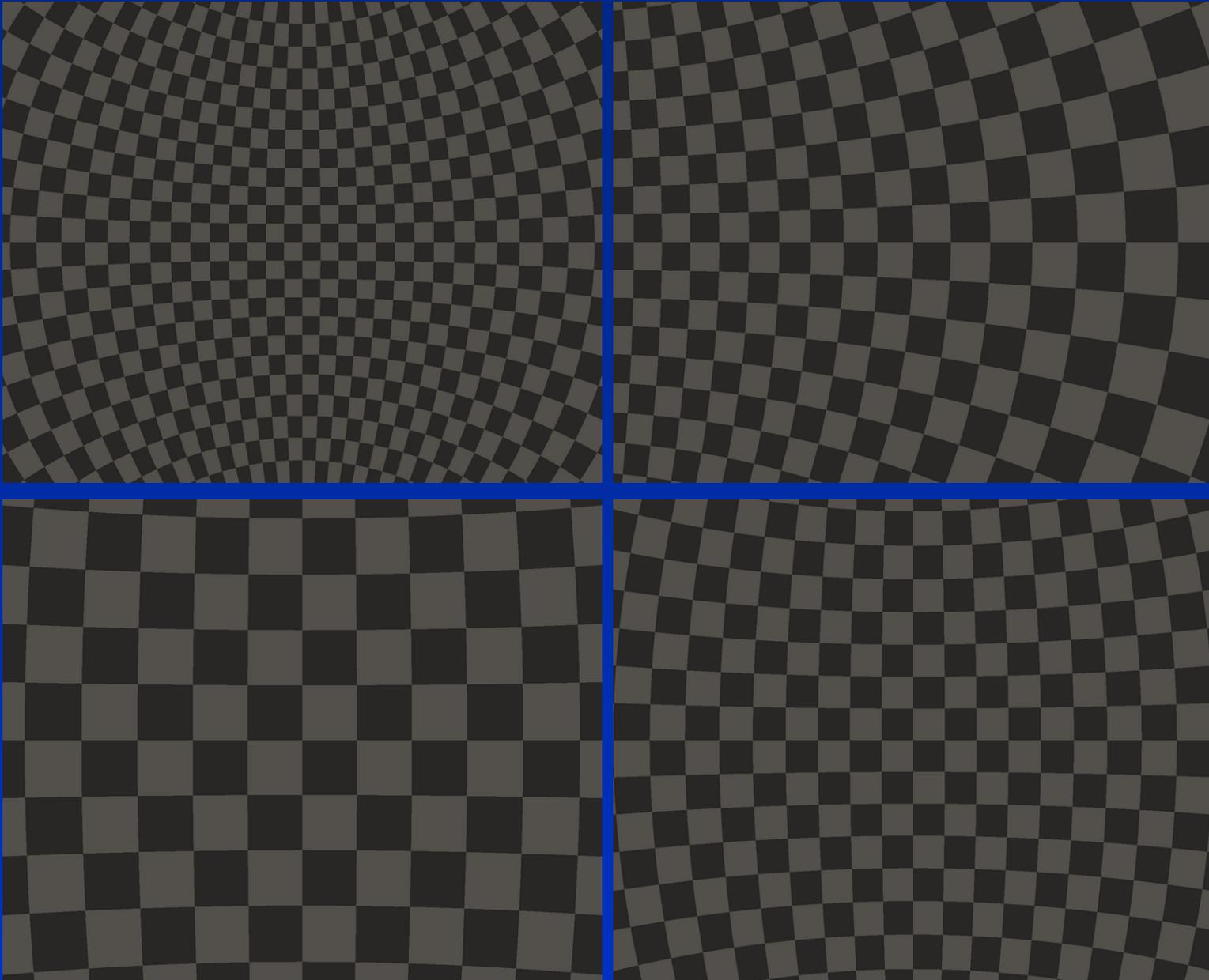
$$1 + z \equiv \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{\gamma} (1 + \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}})^{-1}$$

- $z > 0 \rightarrow$ redshift ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} < 0$)
- $-1 < z < 0 \rightarrow$ blueshift ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}} > 0$)
- Limites

$$\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < 1 + z < \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

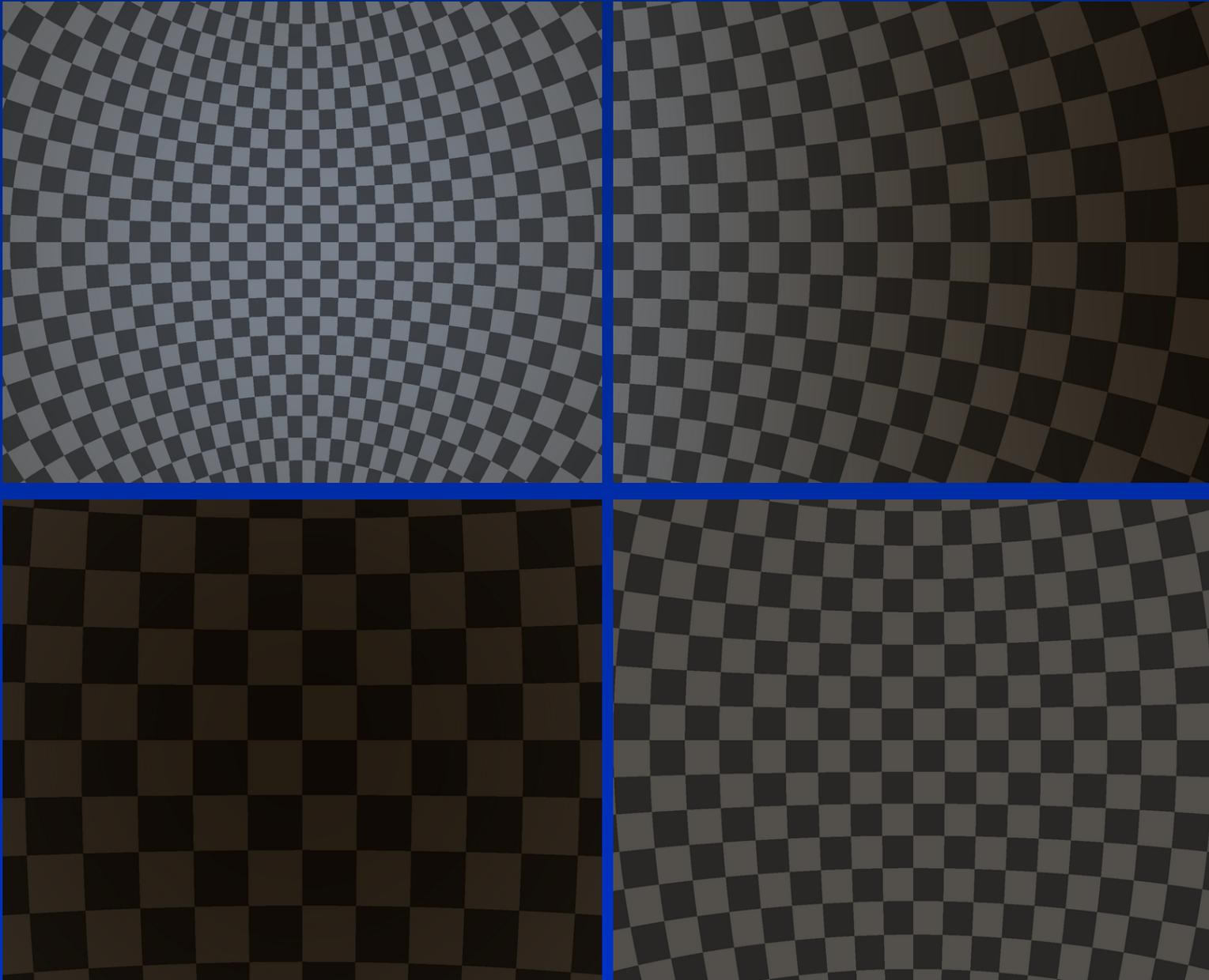
Exemples : $\beta = 0.5$, vues devant, droite, derrière sans terme Doppler

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



Exemples : $\beta = 0.5$, vues devant, droite, derrière avec terme Doppler

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)

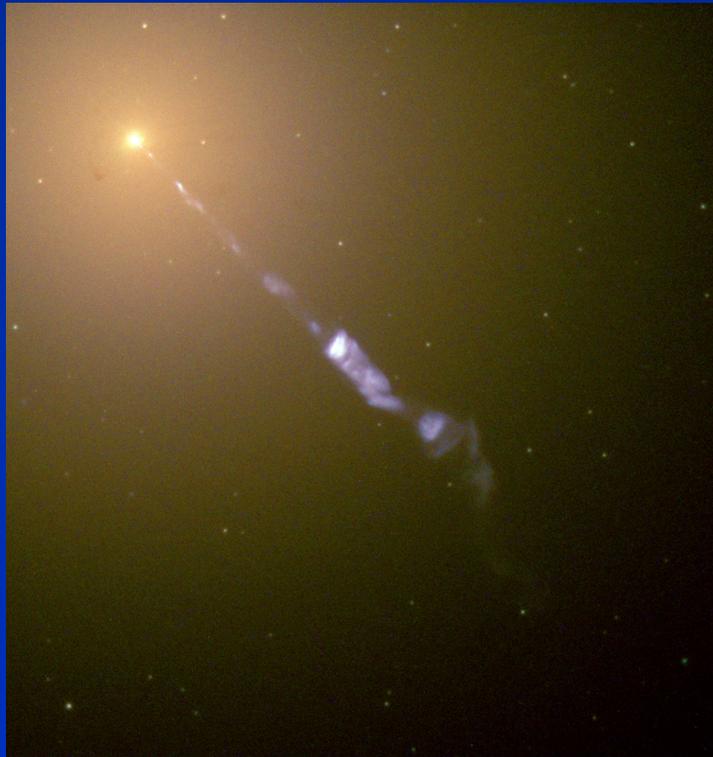


Intensité

$$I_{\text{pix}} \rightarrow \frac{I_{\text{pix}}}{(1+z)^4}$$

♣ Problème de contraste (cf jet de M87) :

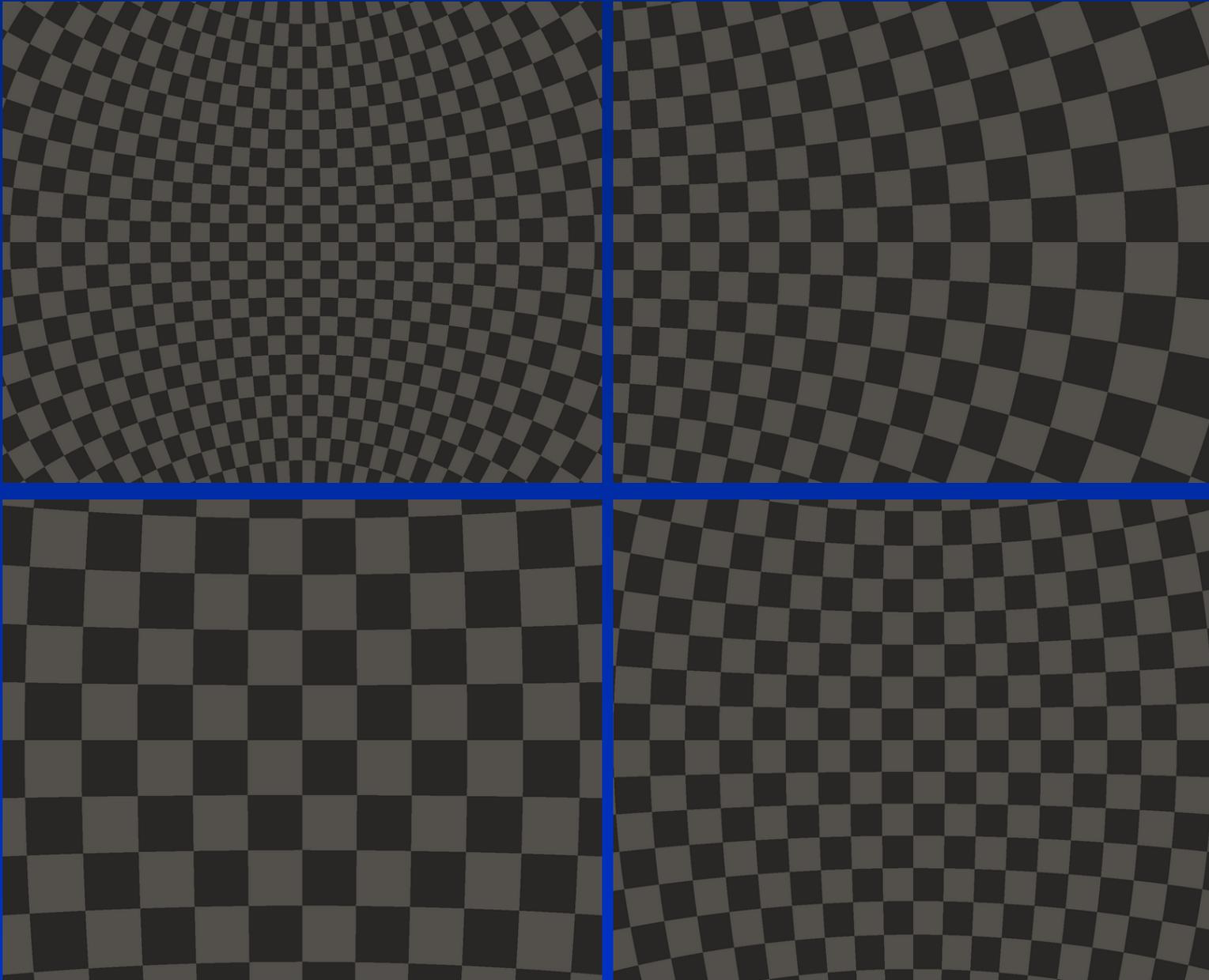
$$\frac{I_{\text{FW}}}{I_{\text{BW}}} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^4$$



♣ → On atténue l'effet, avec $(1+z)^4 \rightarrow (1+z)^{2-2.5}$

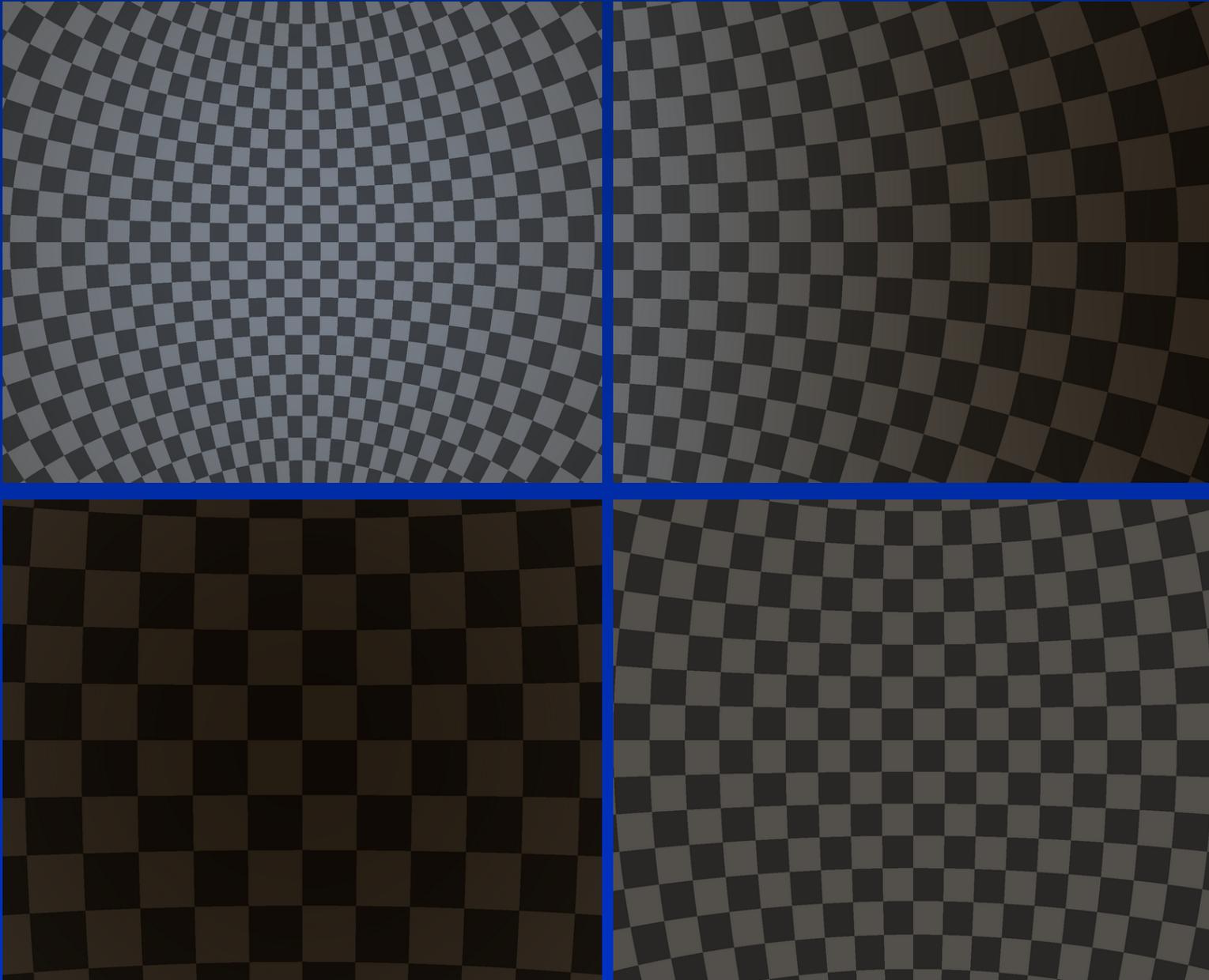
Exemples : $\beta = 0.5$, vues devant, droite, derrière **aberration seule**

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



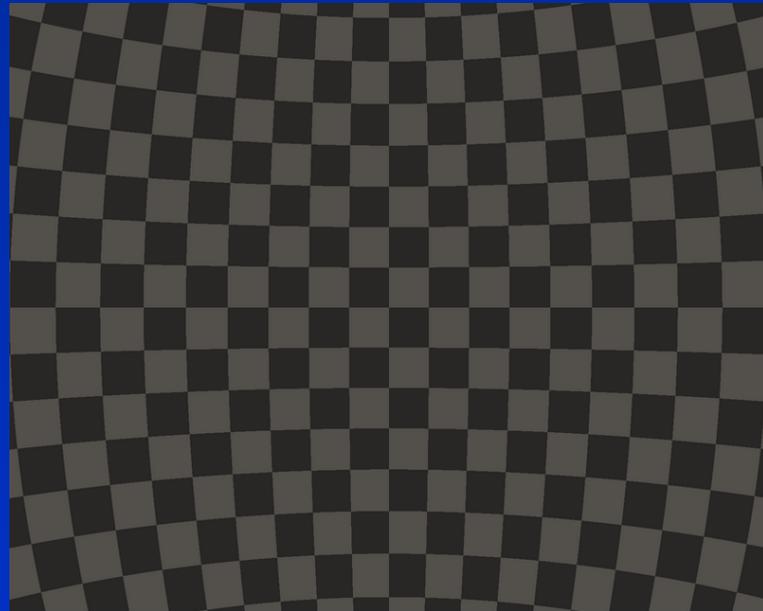
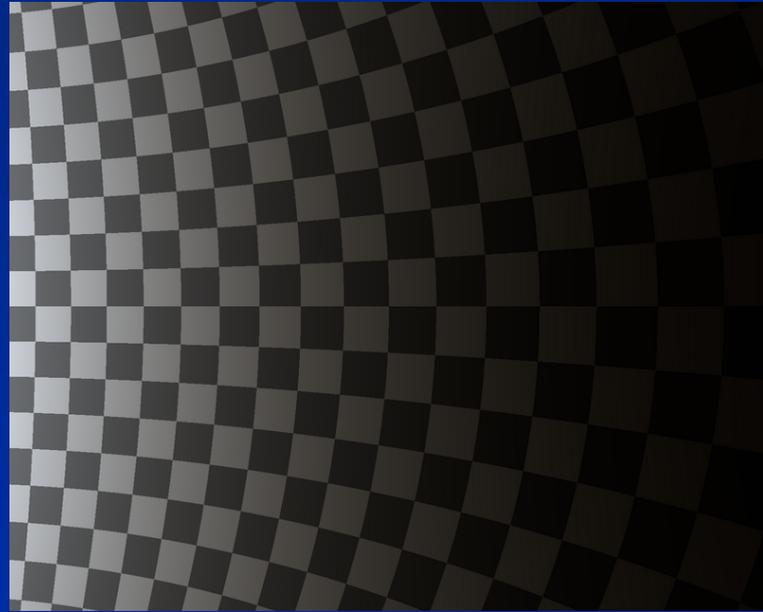
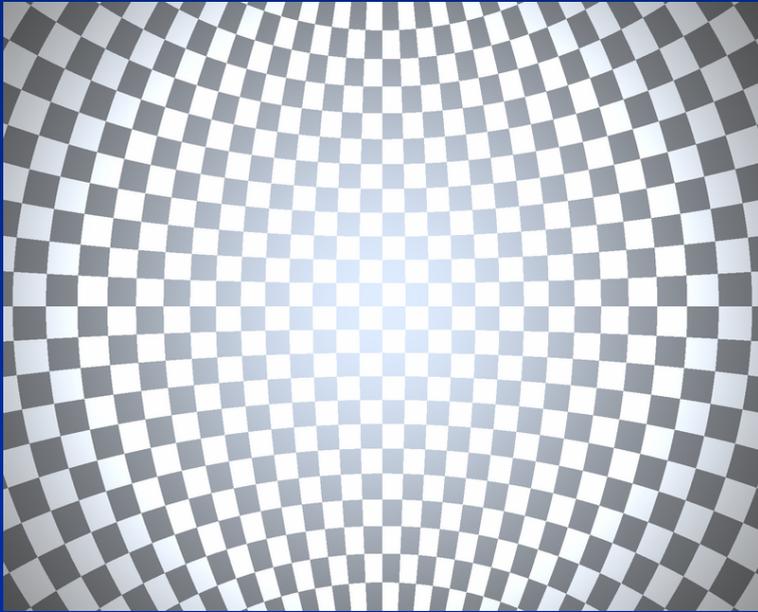
Exemples : $\beta = 0.5$, vues devant, droite, derrière **aberration + Doppler**

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



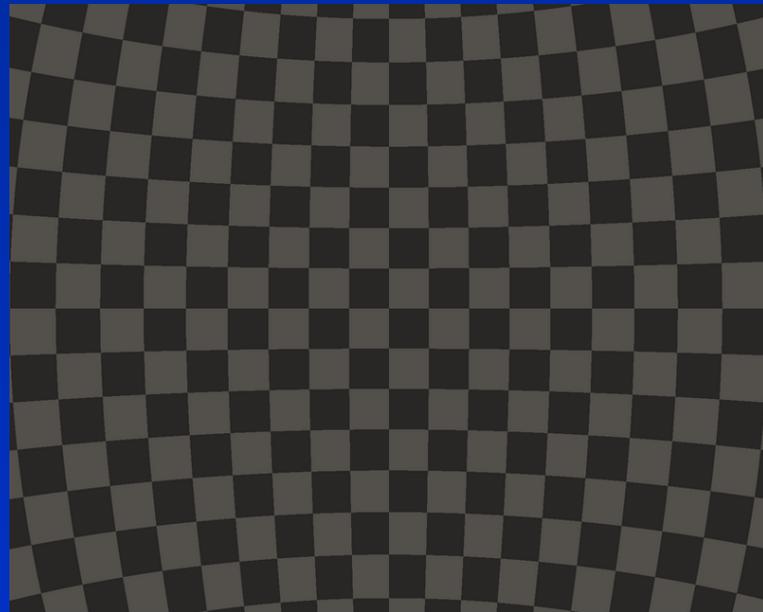
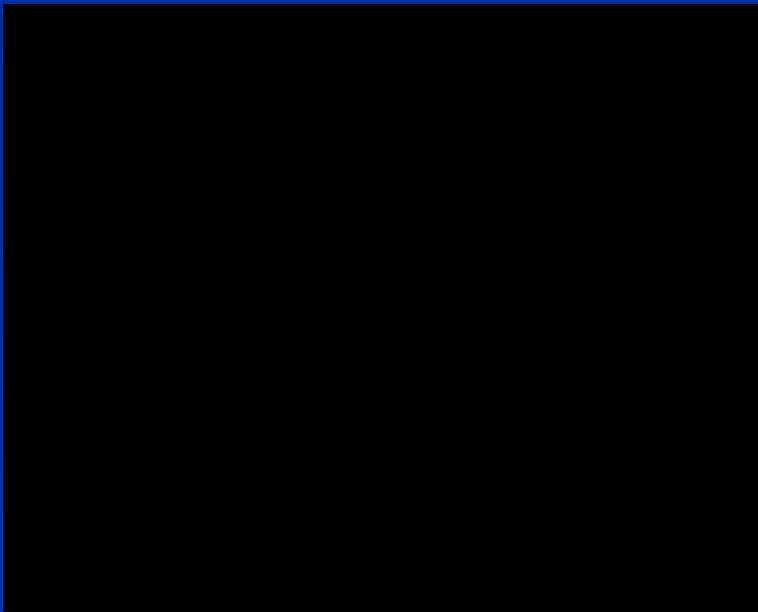
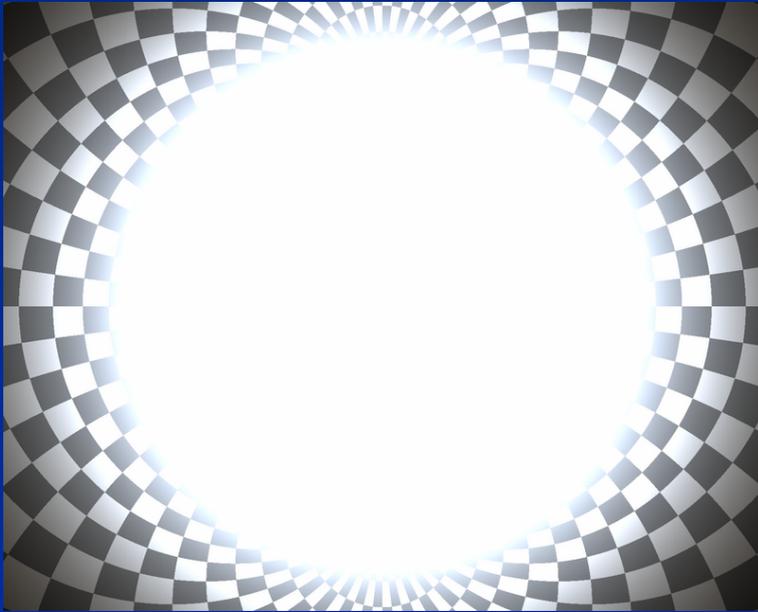
Exemples : $\beta = 0.5$, vues devant, droite, derrière **aberration + Doppler + intensité**

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



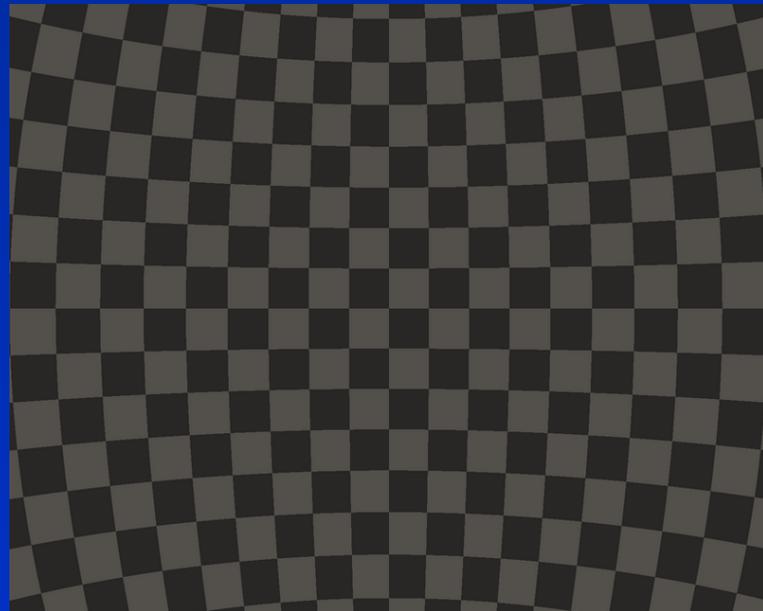
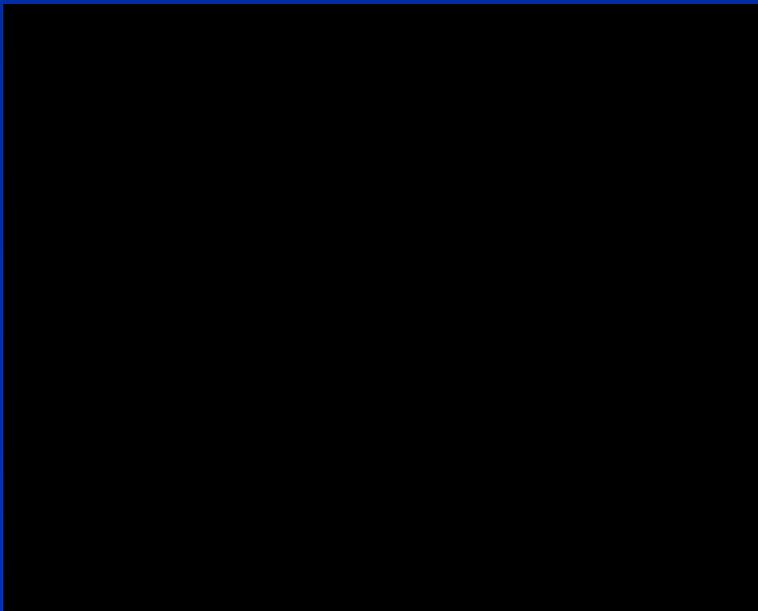
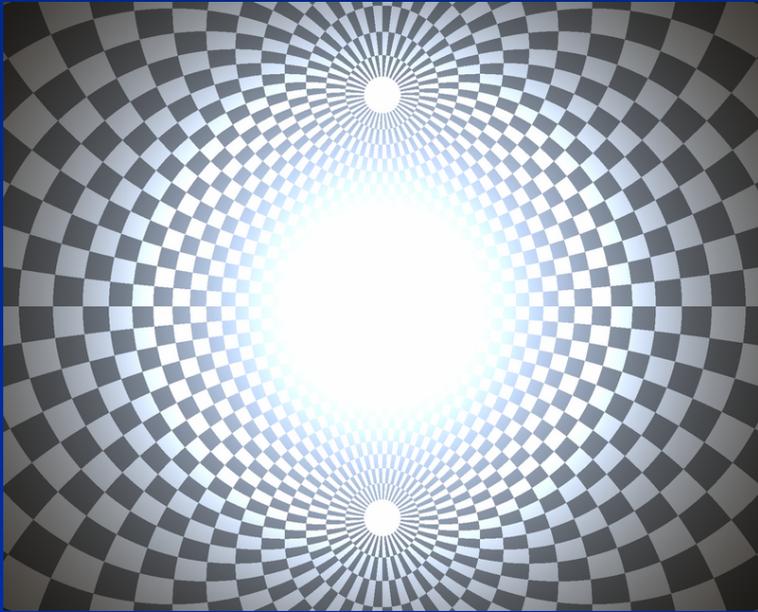
Exemples : $\beta = 0.9$, vues devant, droite, derrière **aberration + Doppler + intensité**

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



Exemples : $\beta = 0.9$, intensité corrigée, vues devant, droite, derrière

($\theta_X = 90$ deg, $\theta_Y = 72$ deg, sphère céleste composée de carrés de 5 deg en RA et dec)



Amplification

♣ Pour un objet étendu,

$$I_{\text{tot}} = N_{\text{pix}} I_{\text{pix}} \rightarrow N'_{\text{pix}} \frac{I_{\text{pix}}}{(1+z)^4}$$

♣ Pour un objet “ponctuel” ($N_{\text{pix}} = 1$)

$$I_* \rightarrow \frac{\Omega_{\text{obs}}}{\Omega_{\text{sky}}} \frac{I_*}{(1+z)^4}$$

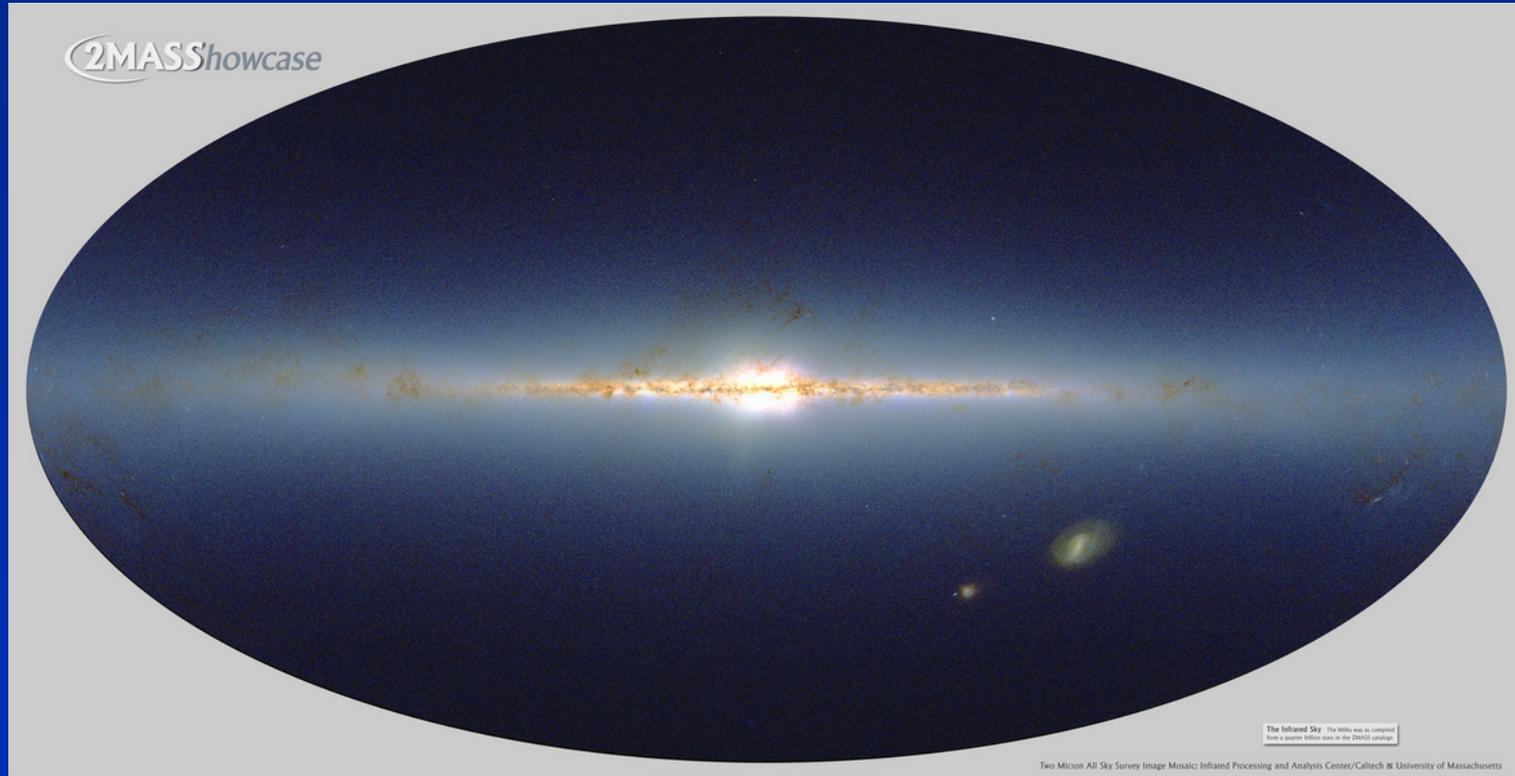
avec

- Ω_{sky} = angle solide sous-tendu par trois directions voisines de \hat{n}_* dans le référentiel initial de la sphère céleste ($\beta = 0$),
- Ω_{obs} = angle solide sous-tendu par ces trois directions dans le référentiel de l'observateur ($\beta \neq 0$).

Histoire que ce soit joli

La sphère céleste correspond à :

- ♣ Une image de fond *sans étoiles* (carte 2MASS, bandes J, H, K)



- ♣ Un catalogue d'étoiles (catalogue Henry Draper) :

- Homogénéisé, $N_* \sim 200\,000$
- Converti en coordonnées galactiques
- Étoiles supposées avoir une émission de corps noir, $T_{\text{eff}} = f(\text{type spectral})$

Exemple d'accélération relativiste

- ♣ Passage de $\beta = 0$ à $v = 0.995c$ avec accélération a constante

$$v = c \tanh \left(\frac{a\tau}{c} \right)$$

- ♣ $v = 0.995c \Rightarrow a\tau/c = 3$

- ♣ Durée de l'accélération $\Delta\tau = 3$ min, d'où

$$a = \frac{3c}{\Delta\tau} \sim 500\,000\,g$$

- ♣ À titre de comparaison :

- Aéronautique : $a_{\max}^{\text{cont}} \sim 10\,g$

- Accidentologie sports mécaniques : $a_{\max}^{\text{choc}} \sim 180\,g$, $\Delta l = 66$ cm, $\Delta v = 50$ m/s, $\Delta t \sim 0.025$ s (D. Purley, Silverstone 1977)

- ♣ Accélération "réaliste" : 30 images/seconde \rightarrow 5 images/jour, $\Delta\tau \rightarrow 3$ yr

Trou noir de Schwarzschild

♣ Hypothèses

- Métrique à symétrie sphérique
- Absence de matière
- Absence de champ électromagnétique
-

$$ds^2 = A_{\text{Schw}} c^2 dt^2 - \frac{1}{A_{\text{Schw}}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$A_{\text{Schw}} = 1 - \frac{G 2m}{c^2 r}$$

- K. Schwarzschild, *Sitz. Kön. Preuss. Akad. Wiss.*, **1**, 189-196 (1916).

- Unités réduites : $G = c = 1$,

●

$$m \rightarrow M = \frac{Gm}{c^2}$$

●

$$\frac{M}{3 \text{ km}} \sim \frac{m}{M_{\odot}}$$

●

$$A_{\text{Schw}} = 1 - \frac{2M}{r}$$

Pourquoi "trou" noir ?

♣ Quadrivitesse : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu$

♣ $u_\mu u^\mu = 1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right)$

♣ $r < 2M \Rightarrow \dot{r} \neq 0$:

$$1 = \frac{1}{\left|\frac{2M}{r} - 1\right|} \dot{r}^2 - \left|\frac{2M}{r} - 1\right| \dot{t}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right)$$

♣ Au passage $r = 2M$, $\dot{r} < 0$

♣ Donc r décroît inéluctablement jusqu'à 0.

Géodésiques dans Schwarzschild (I)

♣ La région $r = 0$ est une singularité gravitationnelle

♣ Propriété fondamentale :

$$r < 2M \Rightarrow \dot{r} \neq 0$$

- La région $r = 2M$ agit comme une membrane unidirectionnelle (horizon)
- Une fois arrivé dans la région $r < 2M$ on est voué à heurter la singularité en $r = 0$
- On ne peut a priori être issu de $r = 2M$ car auparavant le trou noir était une étoile

♣ Constantes du mouvement ($\tau =$ temps propre pour une particule massive, paramètre affine de la trajectoire pour un photon) :

■ Mouvement plan

■

$$E = A_{\text{Schw}} \frac{dt}{d\tau},$$

■

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

♣ Équation du mouvement :

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(\kappa + \frac{L^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

$\kappa = 0$ pour les photons, $\kappa = 1$ pour les particules massives

Géodésiques dans Schwarzschild (II)

♣ en unités vraies, pour $\kappa = 1$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \epsilon + \frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2} + \frac{GML^2}{c^2 r^3}$$

avec, pour les trajectoires libres,

$$\epsilon = \frac{1}{2}c^2(E^2 - 1) \rightarrow \frac{1}{2}v_\infty^2$$

soit un déplacement d'une particule d'énergie par unité de masse ϵ dans le potentiel

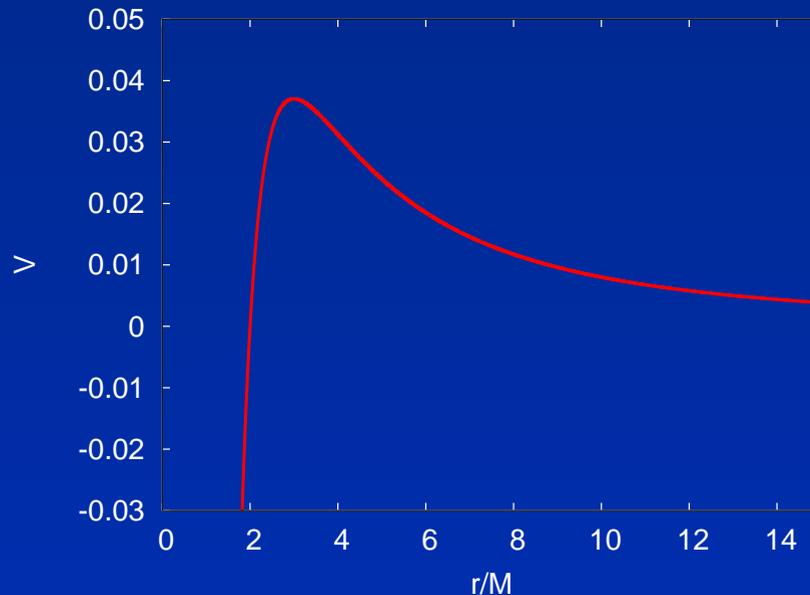
$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2} - \frac{ML^2}{r^3}$$

♣ Pour les photons,

$$V(r) \propto \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

Géodésiques de genre lumière (I)

$$V(r) \propto \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$



- ♣ Existence d'une trajectoire circulaire *instable* en $r = 3M$ ("cercle de lumière")
- ♣ Un observateur statique en $r = 3M$ voit la silhouette du trou noir occuper la moitié de la sphère céleste

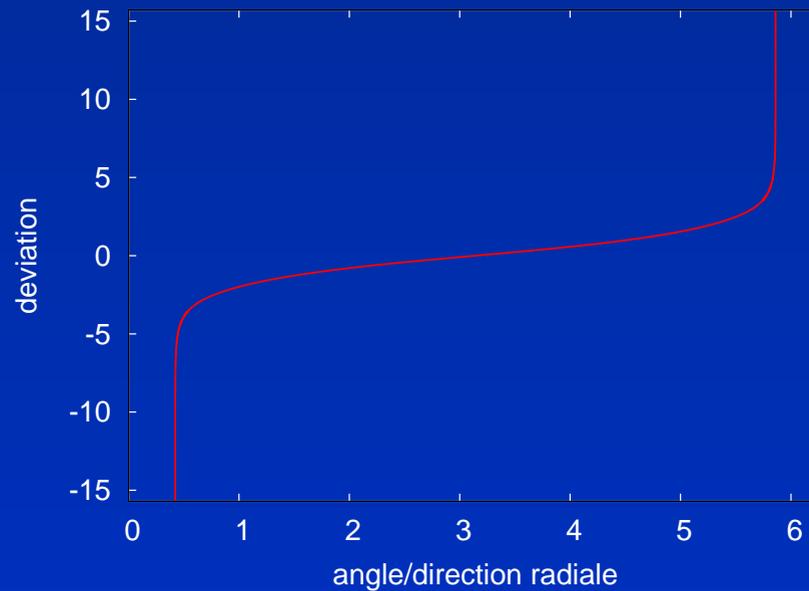
Géodésiques de genre lumière (II)

♣ Un photon subit une déflexion lors de son passage au plus près du trou noir

$$R_{\min} \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow \frac{4GM}{R_{\min}c^2}$$

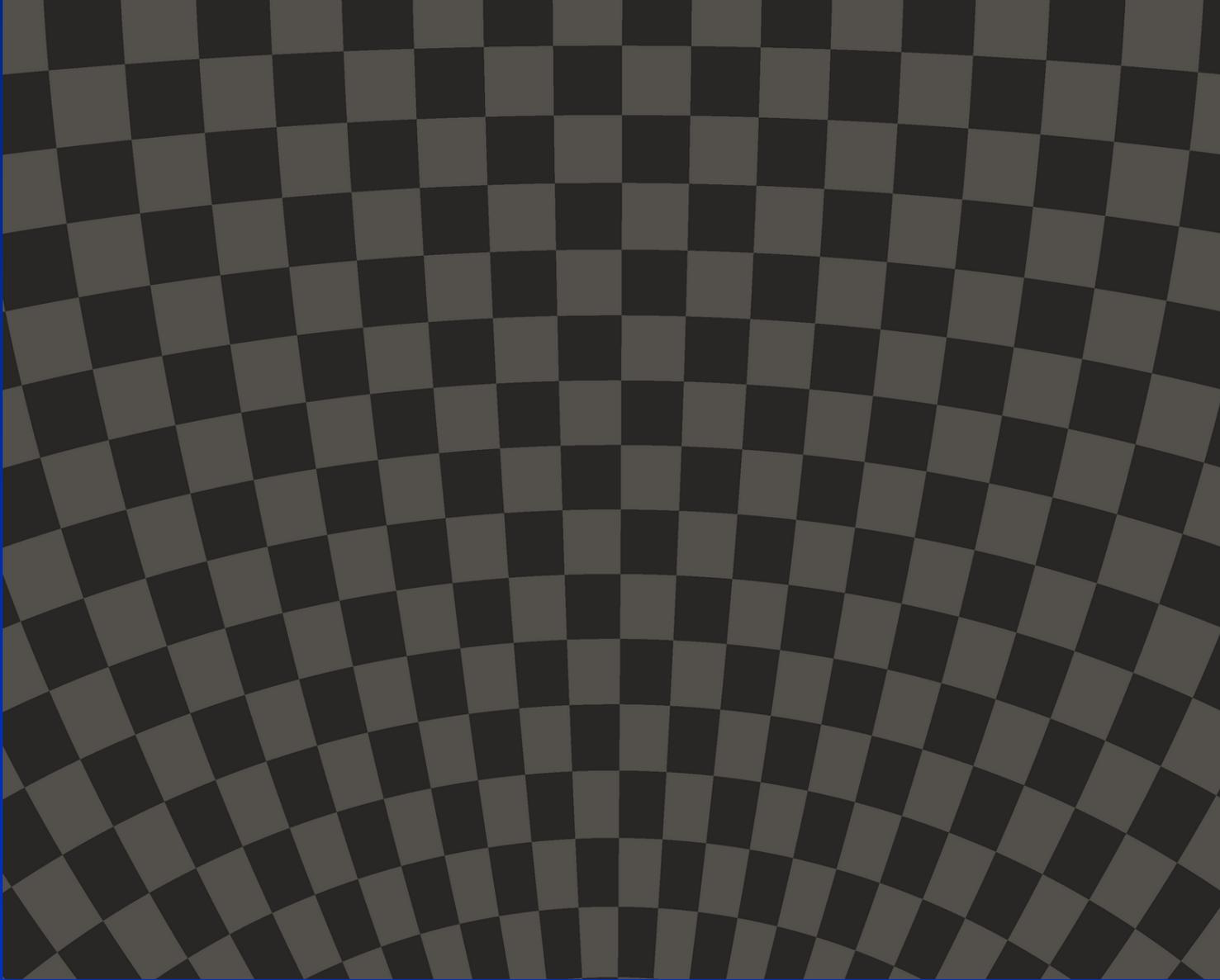
$$R_{\min} \rightarrow 3M \Rightarrow \theta \rightarrow \infty$$

♣ Exemple de déviation



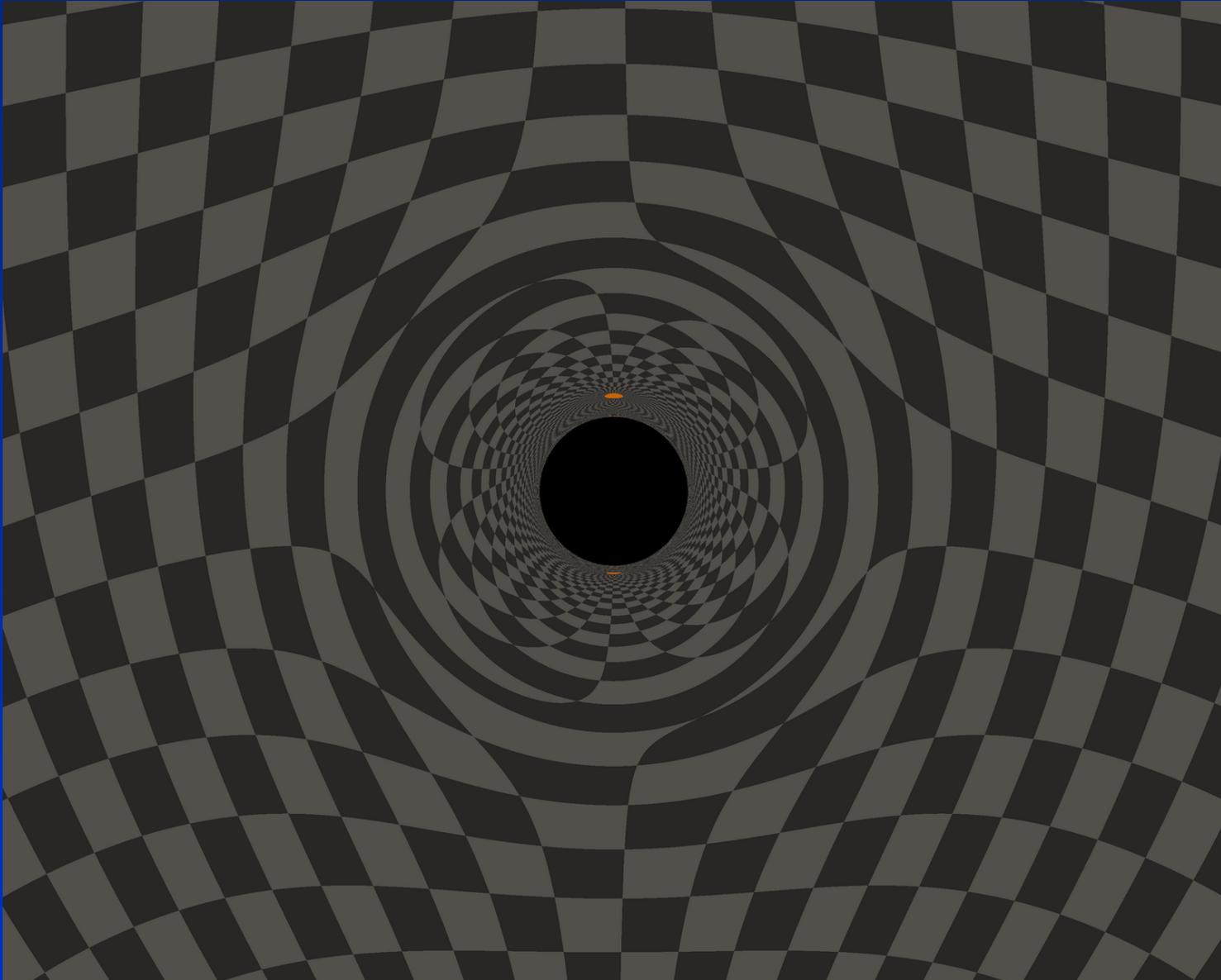
Effets gravitationnels sur la lumière (I)

Minkowski



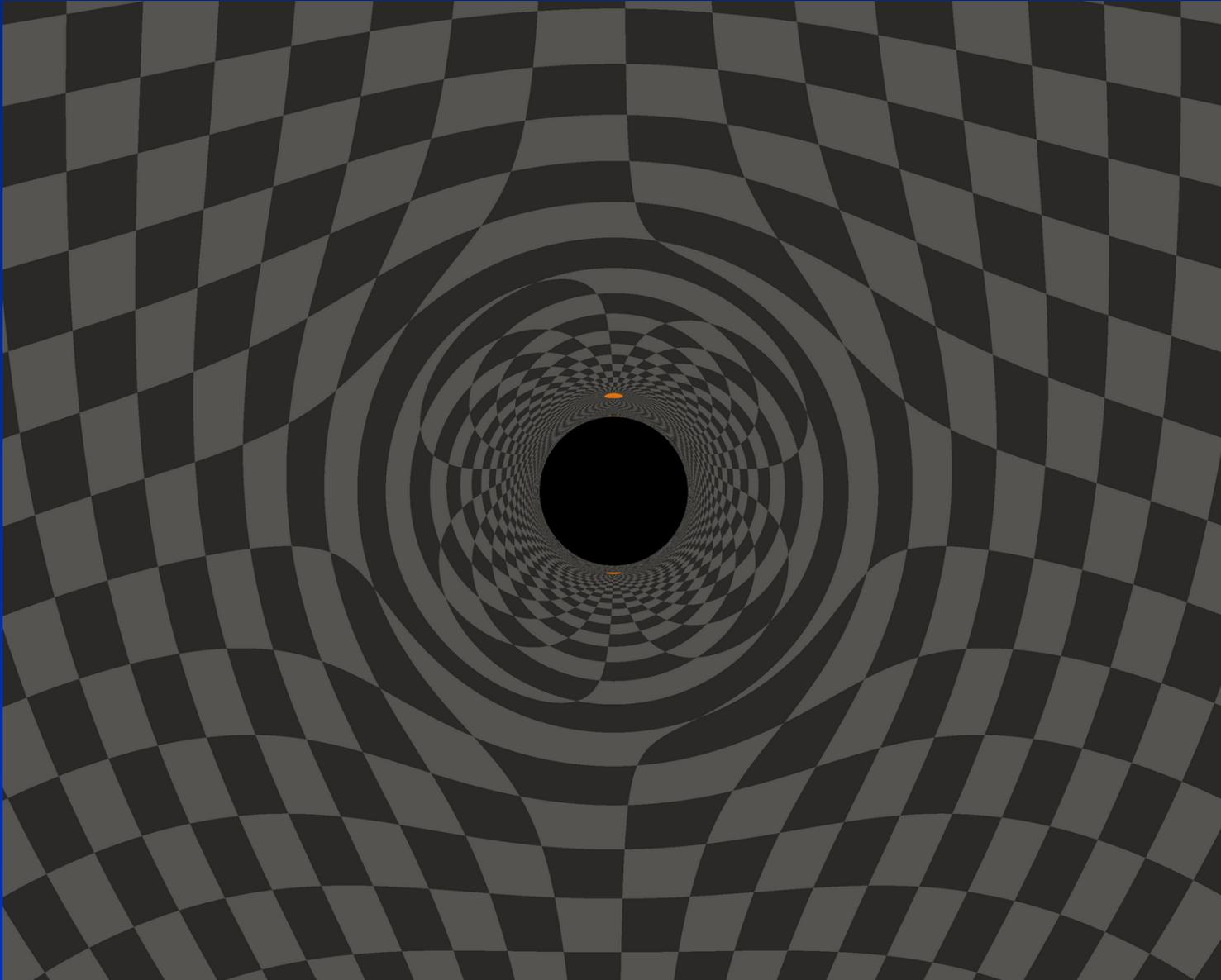
Effets gravitationnels sur la lumière (II)

Schwarzschild, déflexion seule



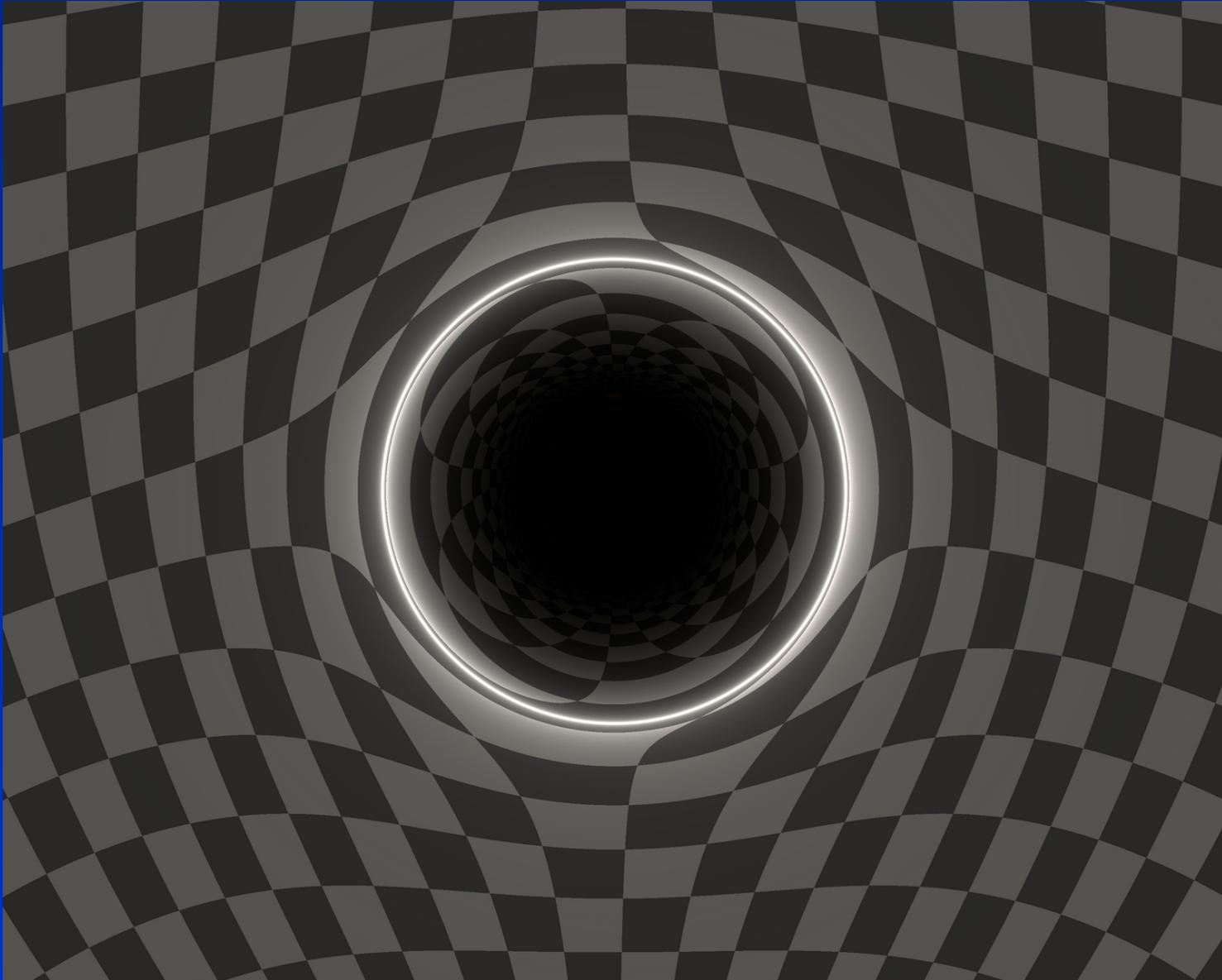
Effets gravitationnels sur la lumière (III)

Schwarzschild, déflexion + blueshift



Effets gravitationnels sur la lumière (IV)

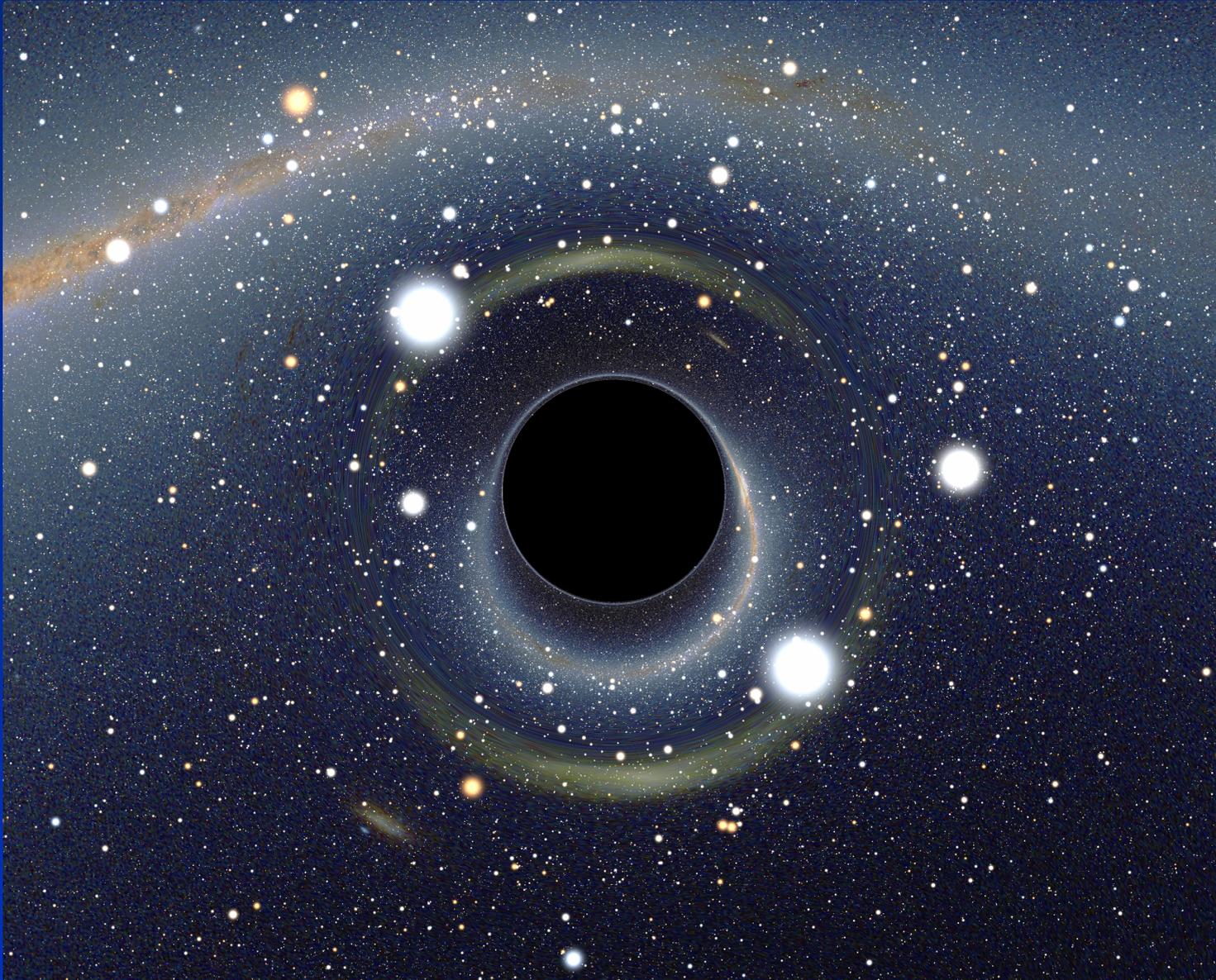
Schwarzschild, déflexion + blueshift + amplification



Conséquences de la déflexion

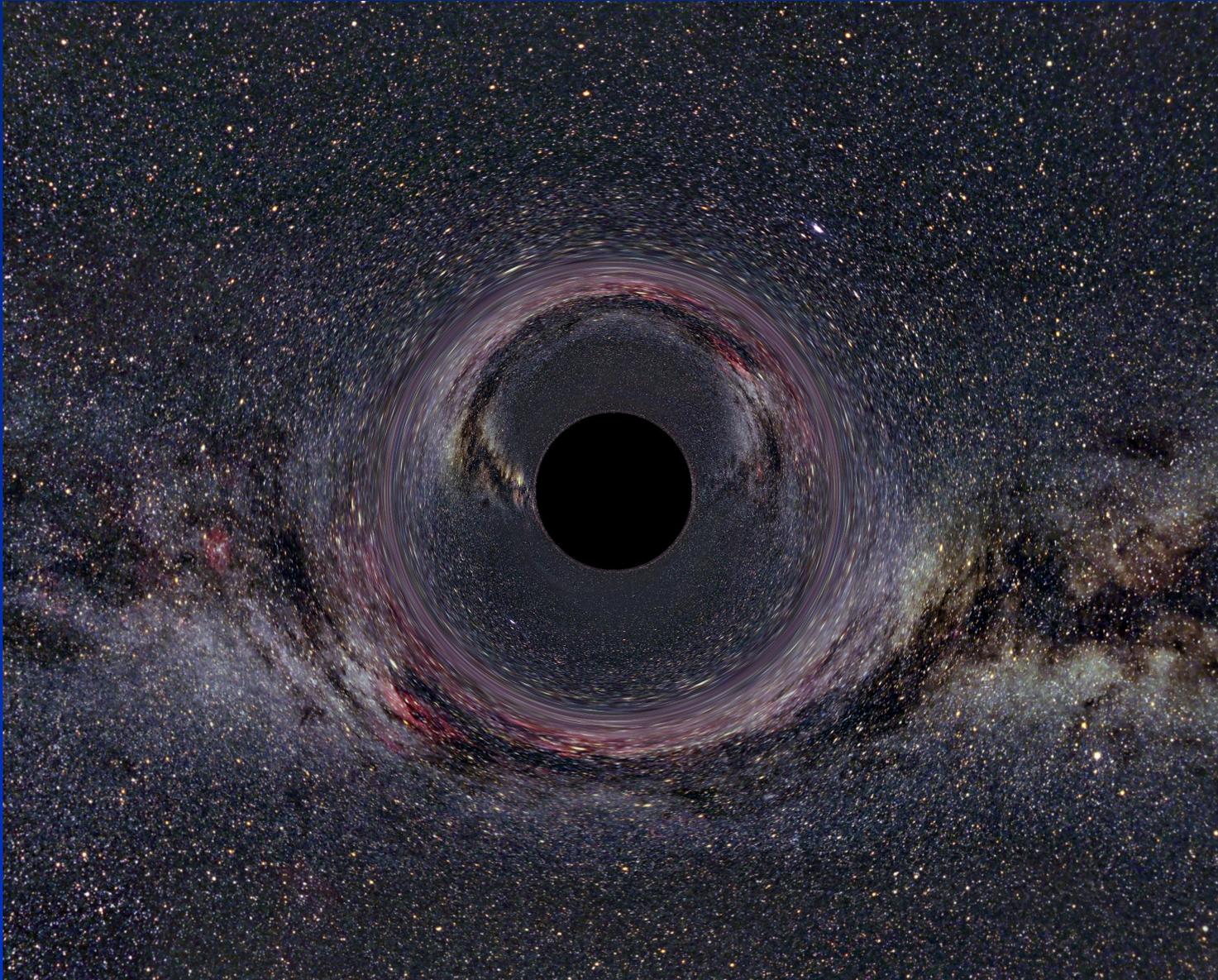
- ♣ La région située exactement derrière le trou noir apparaît sous la forme d'un anneau (l'anneau d'Einstein)
- ♣ La luminosité de cette région est considérablement amplifiée (du fait de sa surface et non de sa brillance de surface)
- ♣ Il existe une copie de la sphère céleste à l'intérieur de l'anneau d'Einstein
- ♣ Il existe en fait une infinité d'anneaux d'Einstein concentriques et une infinité de copies de la sphère céleste de plus en plus déformées.

En prenant tout en compte...

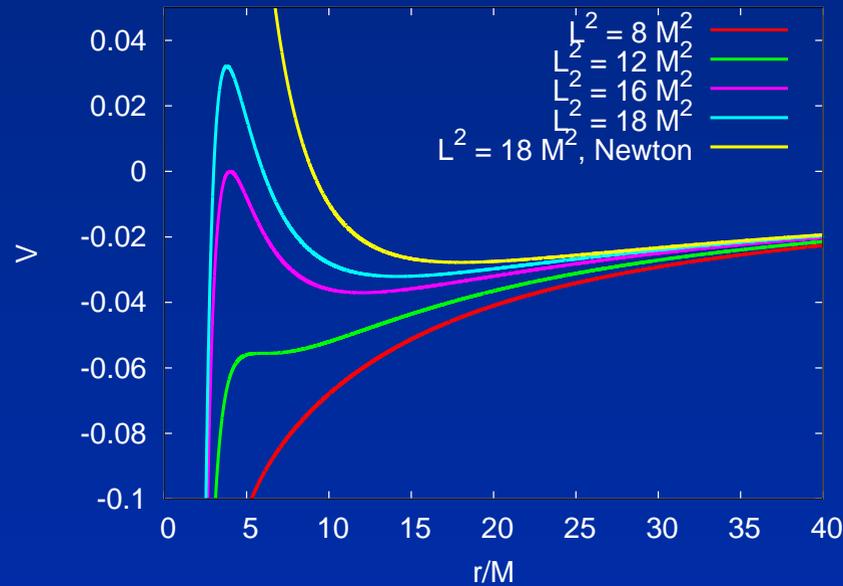


De l'utilité de séparer étoiles et image de fond

Une étoile ne doit pas ressembler à un spaghetti !



Géodésiques de genre temps (I)



♣ $E^2 - 1 < 0 \rightarrow$ trajectoire “elliptique” :

■ $r_{\min, \max} = \frac{p}{1 \pm e}$

■ Contrainte : $p > 2M(3 + e)$

■ Cas limites : $r_{\min} > 4M$ ($r_{\max} \rightarrow \infty$), $r_{\text{circ}} \geq 6M$

■ Phénomène de précession du périastre

Géodésiques de genre temps (II)

♣ $E^2 - 1 = 0 \rightarrow$ trajectoire “parabolique” :

■ $r_{\min} > 4M$

■ $\Delta\phi > \pi$

♣ $E^2 - 1 > 0 \rightarrow$ trajectoire “hyperbolique” :

■ $r_{\min} > 3M$

■ Cas limite : $E \rightarrow \infty, b \rightarrow 3\sqrt{3}M$

♣ $E^2 - 1 > V_{\max} \rightarrow$ trajectoire “plongeante”, sans équivalent classique

♣ Quelques exemples...

• $r = 30M$

• $r = 6M$

• $7.5M < r < 20M$

• $e = 1, r_{\min} = (4 + \epsilon)M$

• $e > 1, r_{\min} = 3.5M$

• $e > 1, r_{\min} = 3.001M$

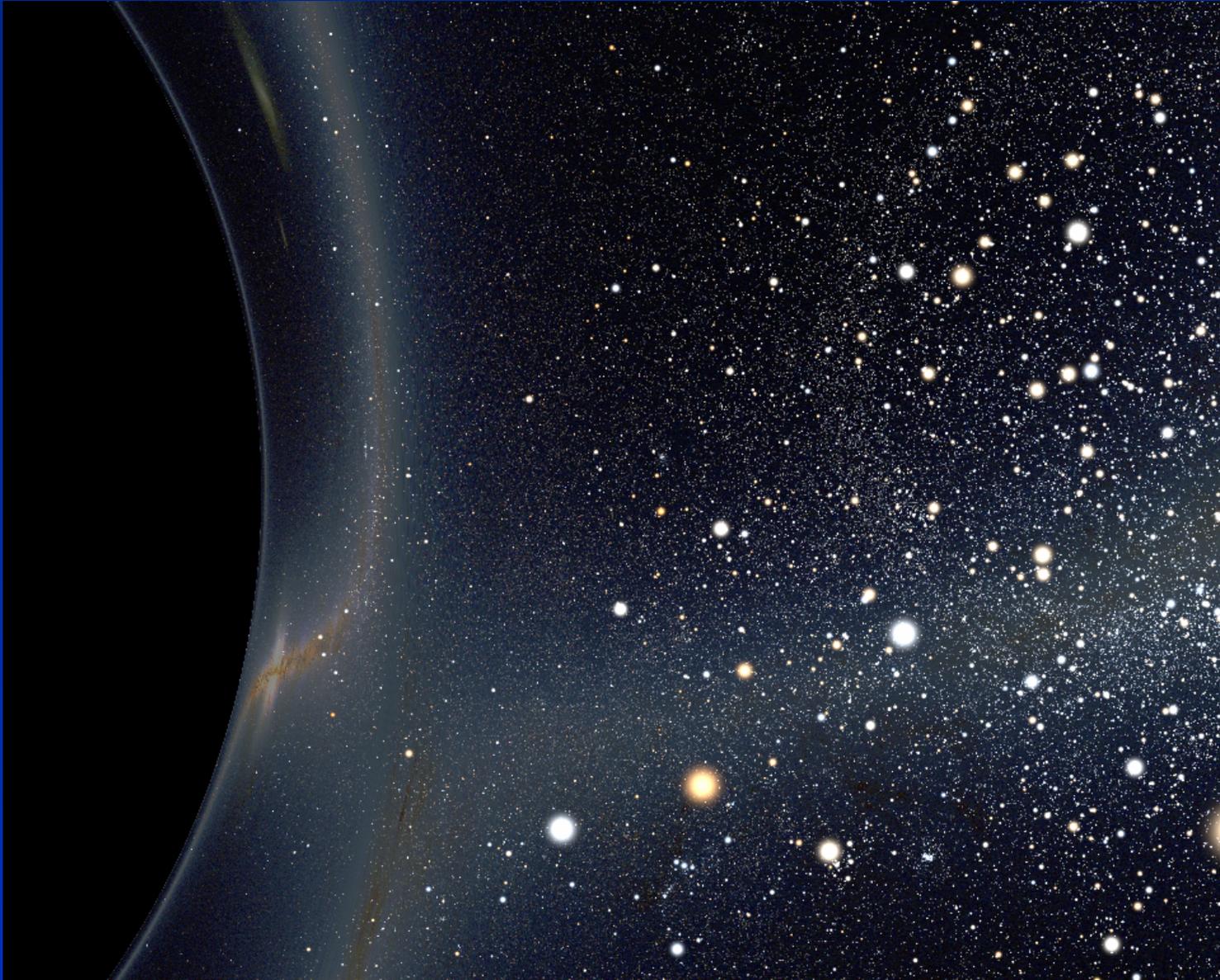
Jeu : Êtes-vous de bons astronomes relativistes ? (I)

Sauriez-vous reconnaître quelques constellations familières sur cette image ?

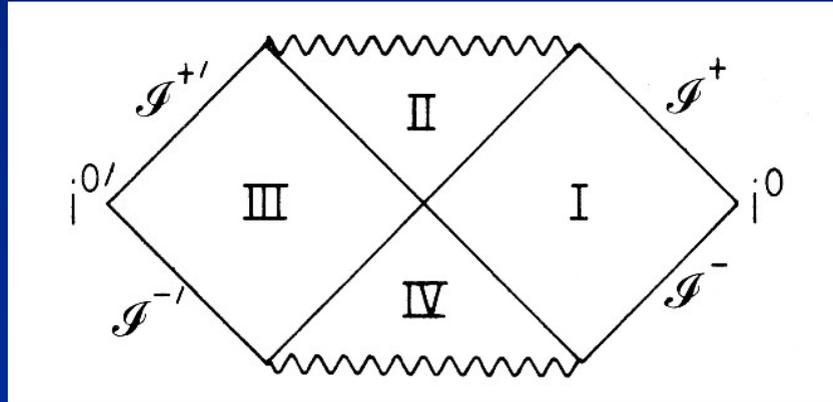


Jeu : Êtes-vous de bons astronomes relativistes ? (II)

Solution



Dans l'horizon...



- ♣ La solution mathématique décrit en réalité deux régions (dites asymptotiques) reliées par le trou noir
- ♣ Ces régions ne sont pas causalement reliées, mais visibles depuis l'intérieur de l'horizon
- ♣ L'une ou l'autre n'influence pas le devenir d'un observateur traversant l'horizon
- ♣ Le trou noir possède un horizon passé duquel pourrait être émis quelque chose (cf Big Bang)
- ♣ Quelques illustrations...

Métrie de Reissner-Nordström (I)

♣ Hypothèses

- Métrie à symétrie sphérique
- Absence de matière
- Présence d'un champ électrique à symétrie sphérique



$$ds^2 = A_{\text{RN}} c^2 dt^2 - \frac{1}{A_{\text{RN}}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$A_{\text{RN}} = 1 - \frac{G}{c^2} \frac{2m}{r} + \frac{G}{c^4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

- H. Reissner, *Ann. Physik*, **50**, 106-120 (1916).
- G. Nordström, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **20**, 1238-1245 (1918).

♣ Unités réduites : $G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$,

$$m \rightarrow M = \frac{Gm}{c^2}$$

$$q \rightarrow Q = \sqrt{\frac{G}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{c^2}}$$

$$A_{\text{RN}} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

Métrie de Reissner-Nordström (II)

$$A_{\text{RN}} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

♣ Trou noir si $A_{\text{RN}} = 0$, i.e. $|Q| < M$

♣ Comportement répulsif à courte distance (cf rayon classique de l'électron)

♣ Trois cas possibles :

■ $|Q| < M$: Trou noir de Reissner Nordström $r_{\text{hor}} = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$,
 $M < r_{\text{hor}} < 2M$

■ $|Q| = M$: Trou noir "extrême"

■ $|Q| > M$: Singularité nue

♣ Ordre de grandeur :

$$\frac{Q}{1 \text{ m}} = 8.62 \times 10^{-18} \frac{q}{1 \text{ C}}$$

$$\left. \frac{|Q|}{M} \right|_{e^-} = 2 \times 10^{21}$$

♣ Configuration $|Q| > M$

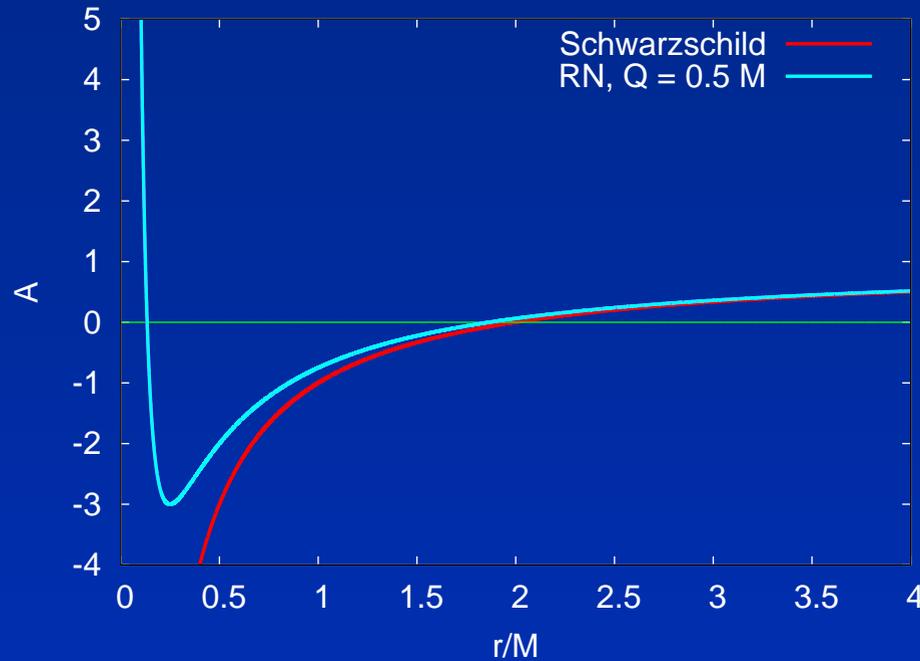
■ A priori non réalisable (supersymétrie)

■ Inatteignable classiquement à partir de $|Q| < M$ (cf thermodynamique des trous noirs)

♣ Intéressant même si ça n'existe pas (cf univers de Gödel, espace de Taub-NUT)

Métrie de Reissner-Nordström (III)

♣ Structure interne pour $|Q| < M$:



■ En réalité deux horizons,

$$r_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

■ Horizon externe, $r_{\text{hor}} = r_2$

■ Horizon interne (de Cauchy), r_1

Géodésiques dans Reissner-Nordström (I)

♣ Constantes du mouvement :

■ Mouvement plan

■

$$E = A_{\text{RN}} \frac{dt}{d\tau},$$

■

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

♣ Équation du mouvement :

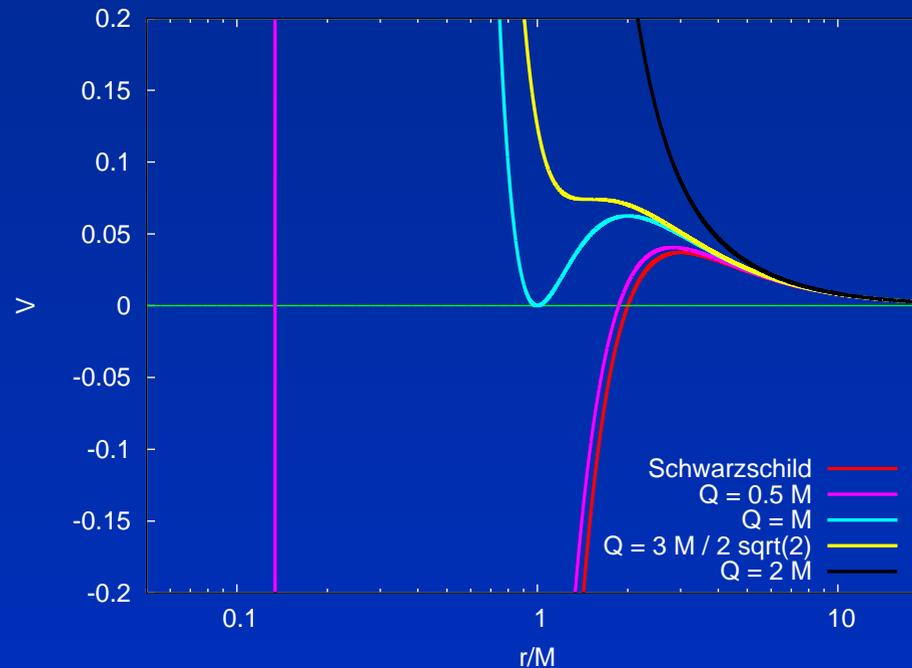
$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(\kappa + \frac{L^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$

♣ Pour les photons,

$$V(r) \propto \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$

Géodésiques dans Reissner-Nordström (II)

- ♣ Un photon n'atteint jamais la singularité (sauf si $L = 0$) du fait de son comportement répulsif
- ♣ Existence d'états liés (2 racines à $V' = 0$) pour $Q^2 < 9M^2/8$
- ♣ → Effet de “coquille noire”



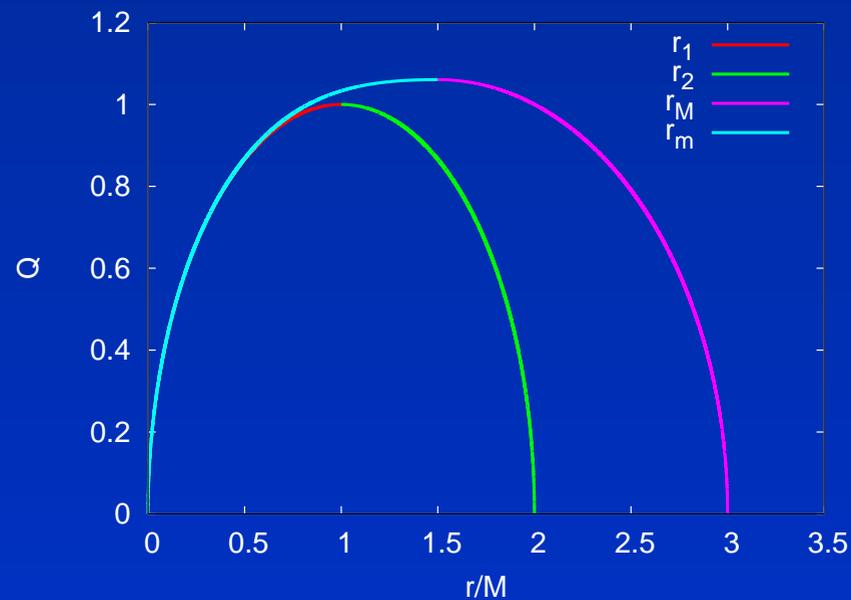
Effet de coquille noire

♣ Possibilité d'états liés pour les photons quand $r_m \leq r \leq r_M$, avec

- $V'(r_M) = 0$, $V''(r_M) < 0$, $r_M > r_2$
- $V(r_m) = V(r_M)$, $r_m < r_1$

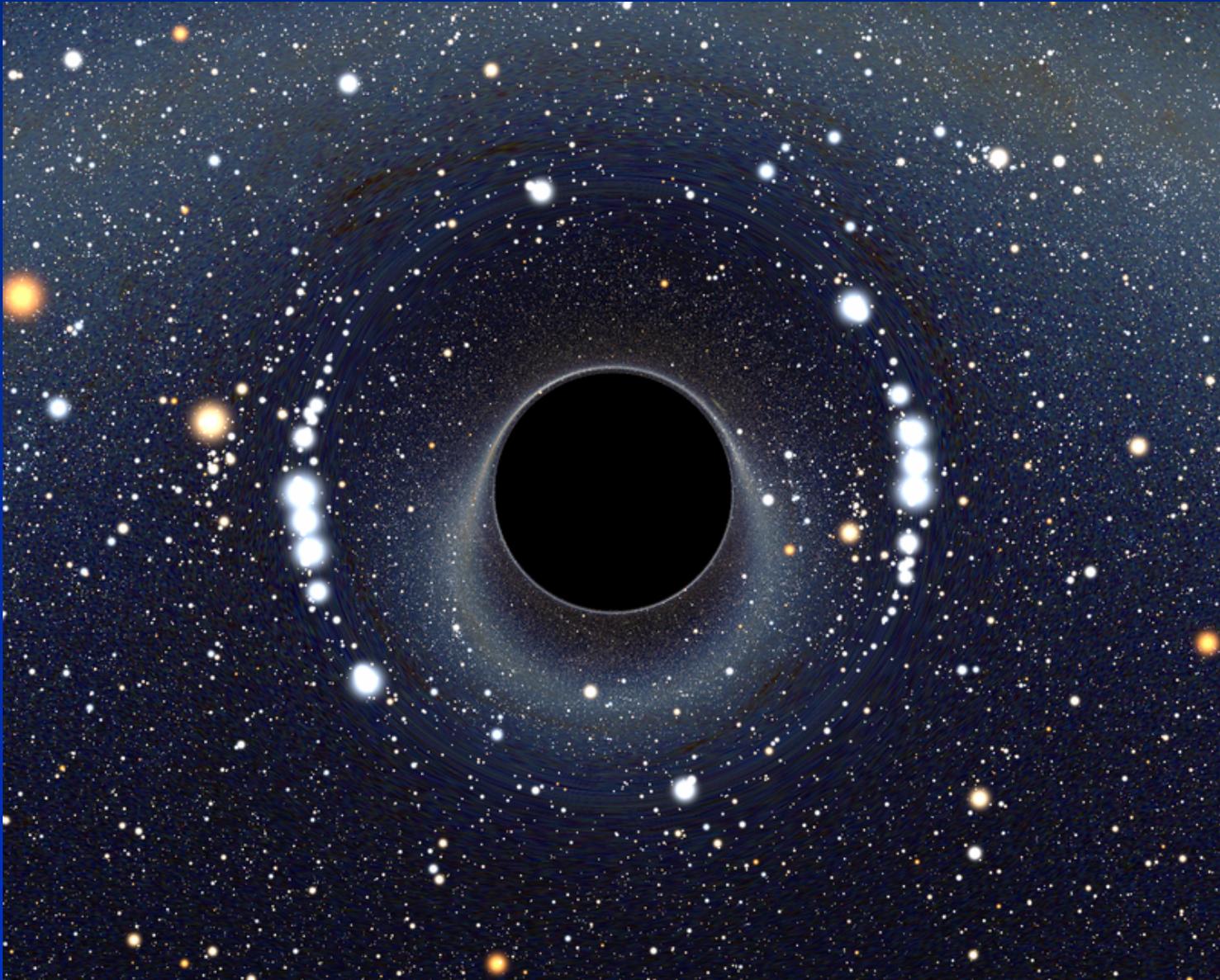
$$r_M = \frac{3}{2}M + \sqrt{\frac{9}{4}M^2 - 2Q^2}$$

$$r_m = r_M \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Q^2}{Mr_M}}} \right)$$



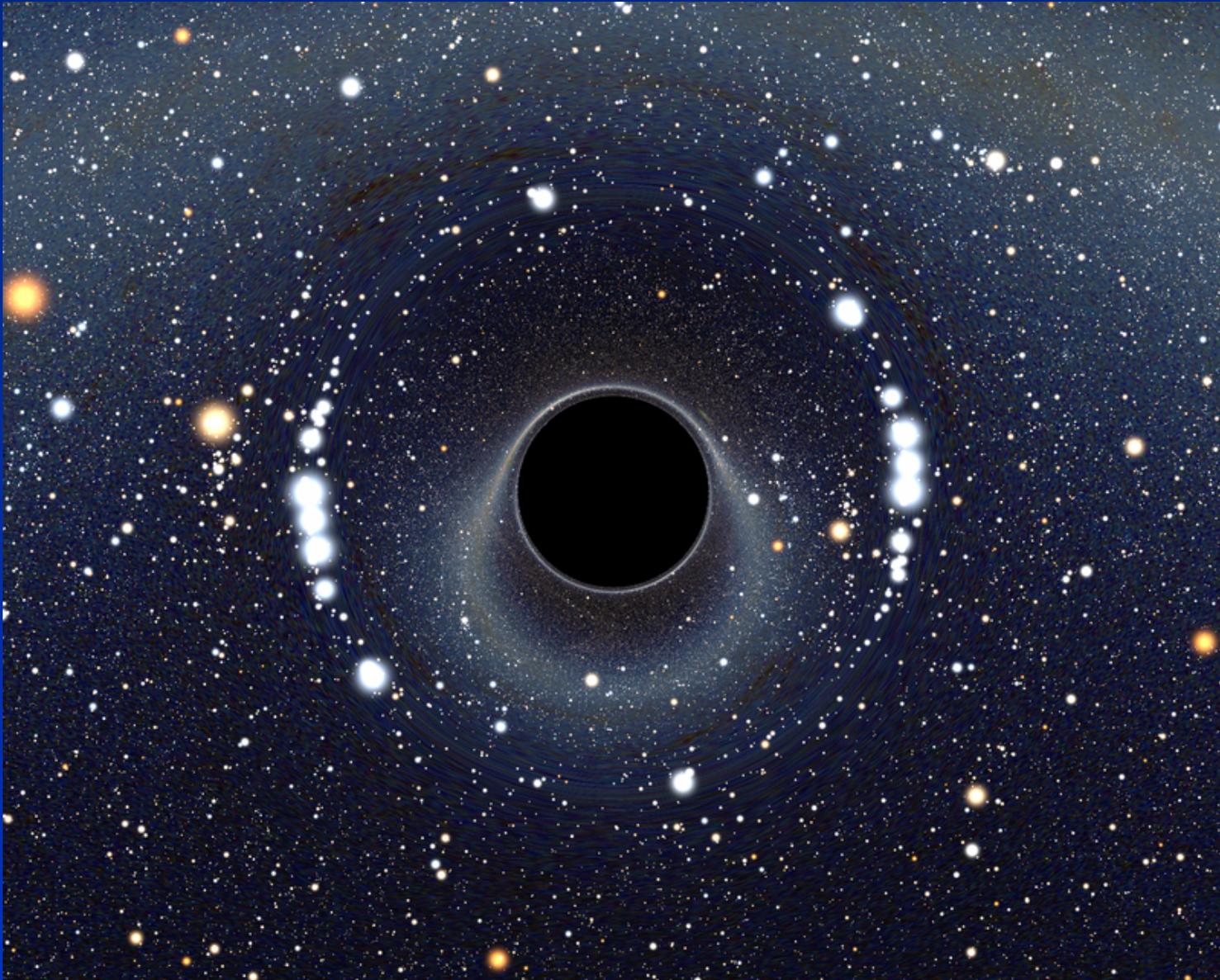
Hors l'horizon

$$Q = 0.5M$$



Hors l'horizon

$$Q = 0.999M$$



Singularité nue

$$Q = 1.001M$$



Singularité nue

$$Q = 2M$$

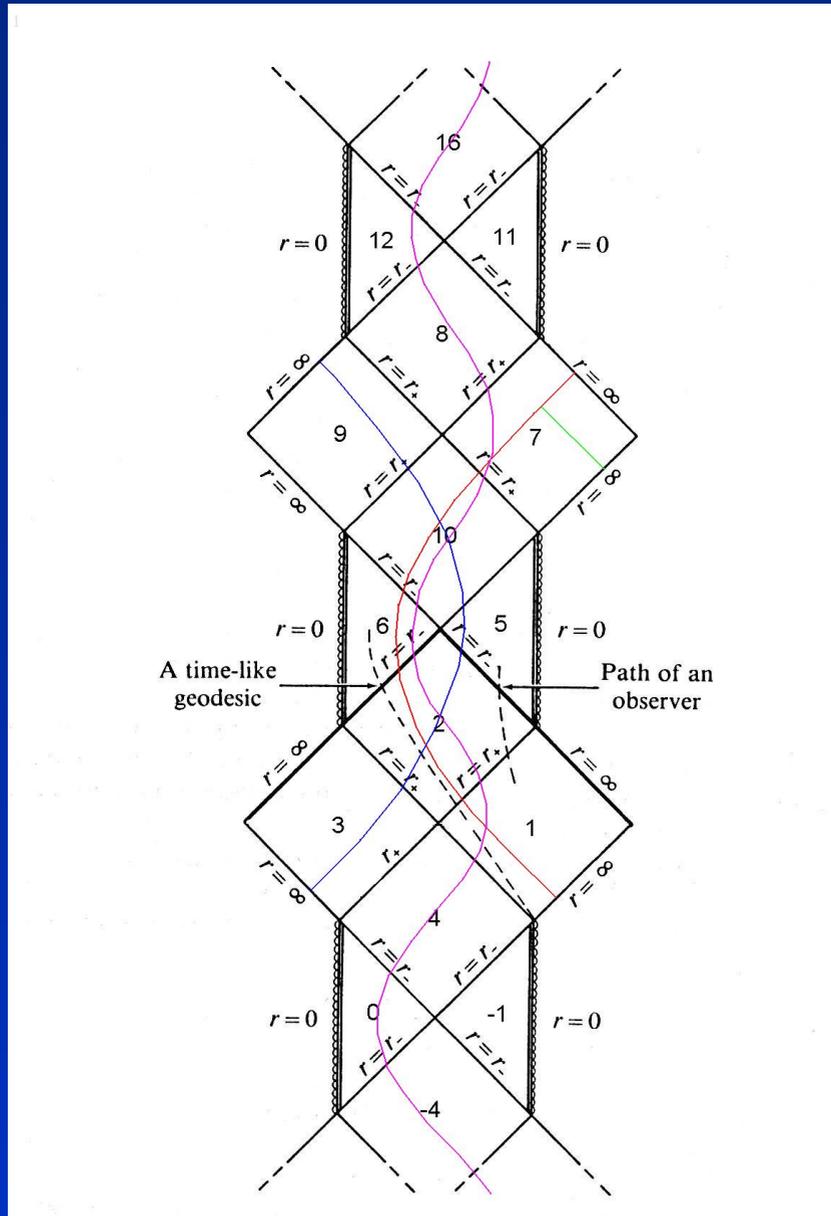


Singularité nue

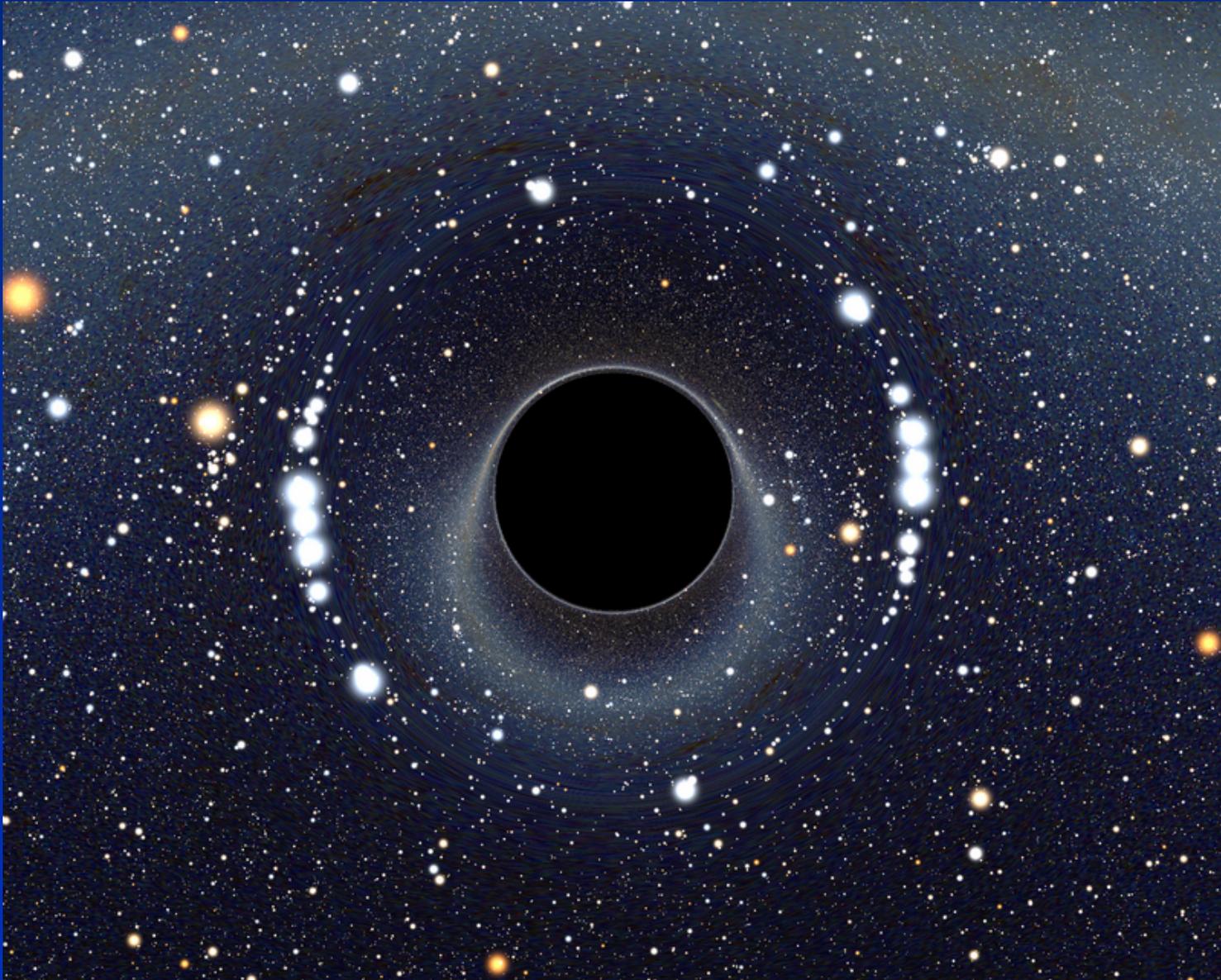
$$Q = 2M$$



Extension analytique maximale

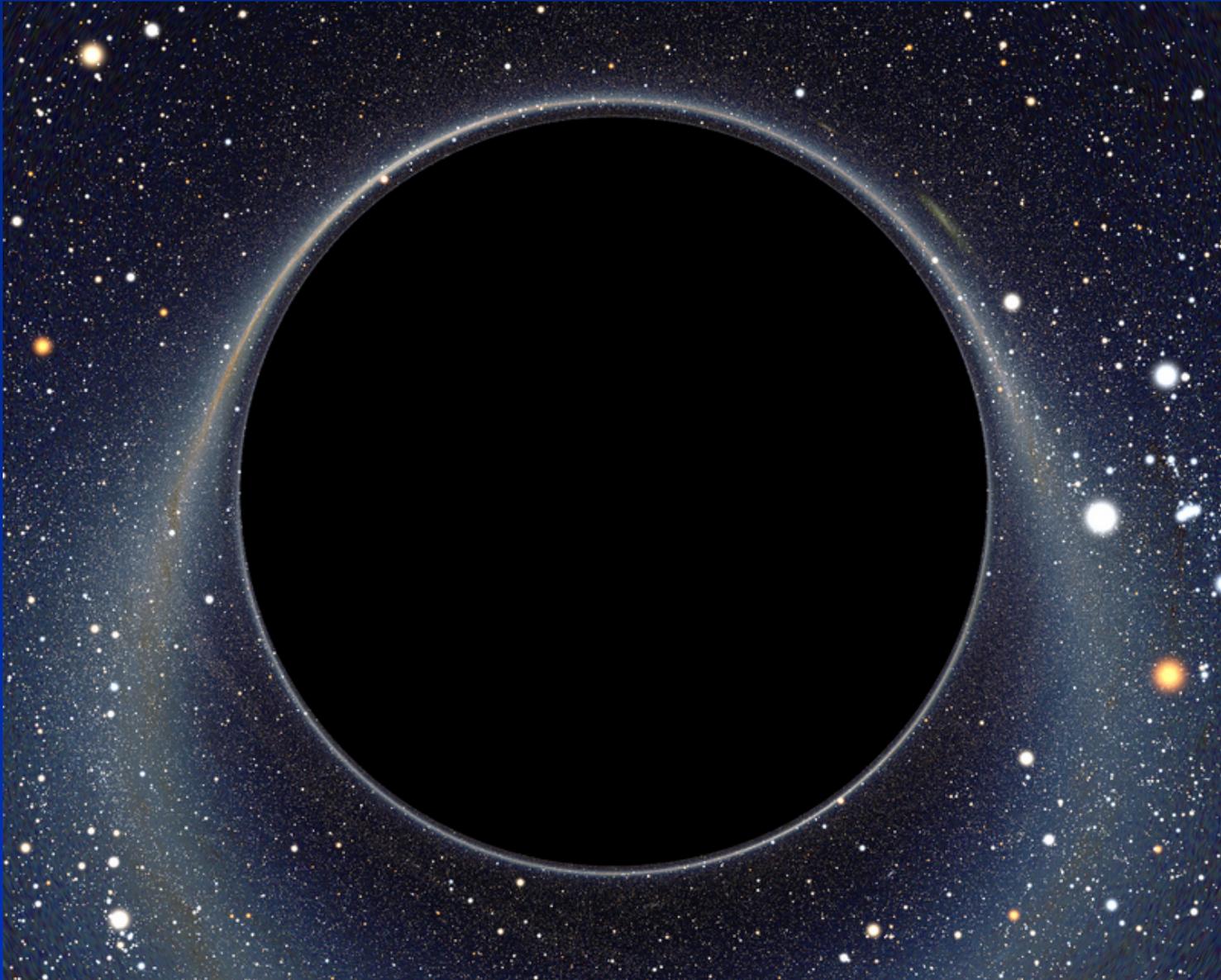


$Q = 0.5M$, une seule région asymptotique (1)





$Q = 0.5M$, une seule région asymptotique (1), zoom

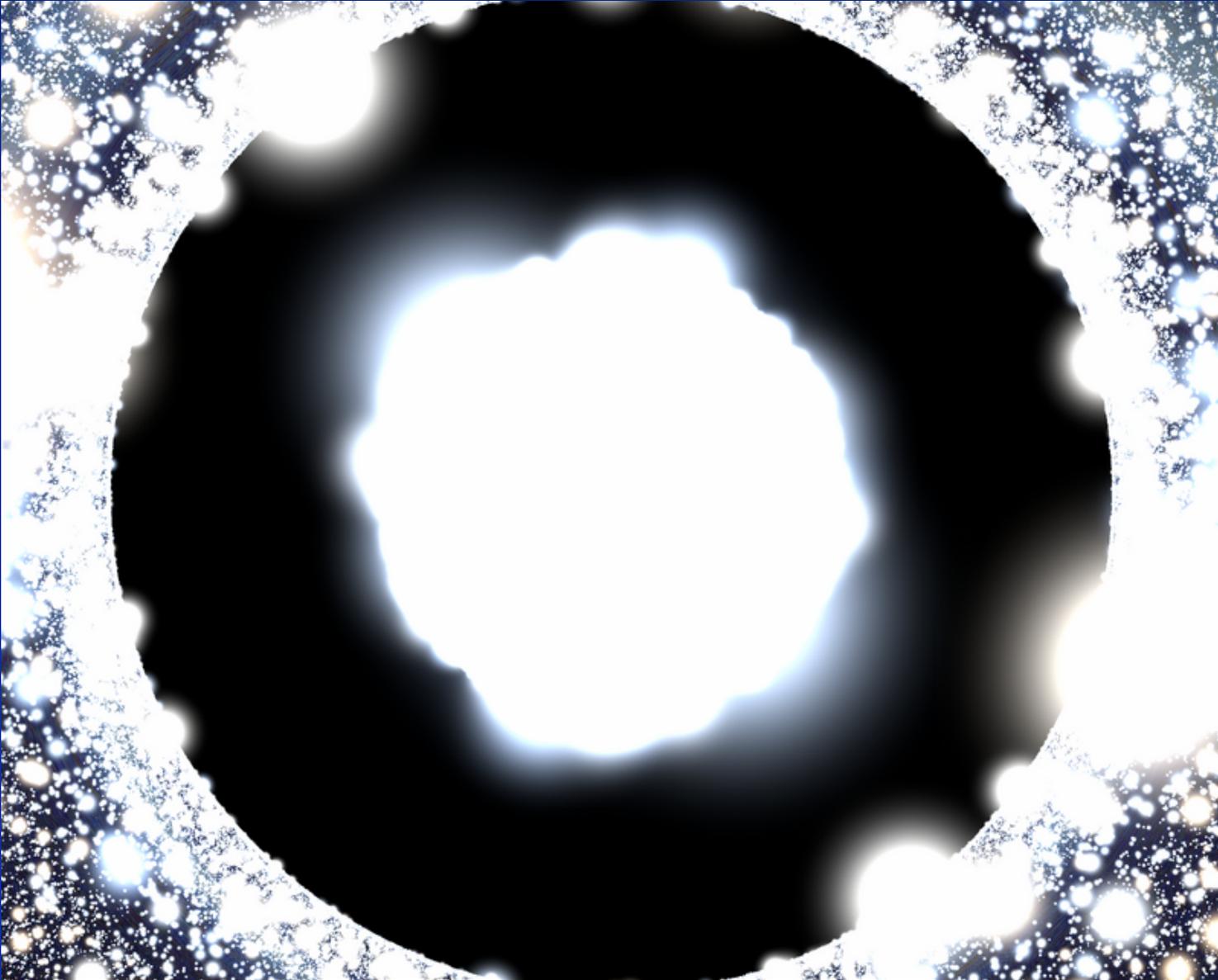


$Q = 0.5M$, extension analytique maximale (régions 1 et -5), zoom



$Q = 0.5M$, extension analytique maximale (régions 1 et -5),

coquille noire (chôte libre, $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_M)$, $(1+z)^4 \rightarrow (1+z)^{\frac{1}{2}}$)



Passage par le trou de ver (I)

- ♣ Trajectoire géodésique radiale en chute libre, $r_{\min} = Q^2/2M$
- ♣ Pas d'étoiles pour éviter phénomènes de saturation et faciliter la compréhension
- ♣ $\Delta\tau$ variable pour éviter des passages trop rapides à des endroits intéressants
- ♣ Passages successifs dans les régions 1, 2, 6, 10 et 7
 - Depuis la région 1 :
 - Région 1, région -5 ($r > r_M$)
 - Région 1, région -5, coquille noire ($r < r_M$)
 - Depuis la région 2 :
 - Région 1, région 3, coquille noire
 - Depuis la région 6 :
 - Région 1, coquille noire ($r > r_m$)
 - Région 1, ($r < r_m$)
 - Région 1, coquille noire ($r > r_m$)
 - Depuis la région 10 :
 - Région 1, région 3, coquille noire
 - Depuis la région 7 :
 - Région 7, région 1, coquille noire ($r < r_M$)
 - Région 7, région 1 ($r < r_M$)

Passage par le trou de ver (II)

♣ Cartes utilisées :

- Région 1 : 2MASS
- Région -5 : rien
- Région 3 : WMAP
- Région 7 : grille (en attendant mieux)

♣ Film 1 : Champ de vision dans la direction de déplacement

♣ Film 2 : Champ de vision vers la singularité (= film 1 pour la première partie)

Conclusion

Ça marche!

♣ Fait :

- Toutes les configurations possibles des métriques de Schwarzschild et Reissner-Nordström
- Tous les effets relativistes (RR et RG)
- Prise en compte du rendu correct des objets ponctuels et étendus
- Première réalisation du passage dans l'horizon
- Mise en évidence d'effets non triviaux peu voire pas documentés (extention analytique maximale : Schwarzschild \rightarrow horizon passé, arrivée sur l'horizon ; Reissner-Nordström \rightarrow coquille noire, trou de ver, singularité nue)
- Temps de calcul raisonnable ($\sim 1-2$ min/image)
- Pas de problème numérique sérieux
- Réalisation de films de plusieurs minutes $\sim O(1$ jour)
- Métrique "amusante" (Papapetrou-Majumdar, Σ trous noirs extrêmes statiques)

♣ À faire :

- Disque d'accrétion
- Métriques "réalistes" (analytique : Kerr, numérique : TN binaire)
- Simulations des modes de vibrations