

Lagrangien métrique géodésique en relativité 24/04/2026, J. Fric

Ce sujet est proposé à titre d'exercice, par exemple dans le cours de Luc Blanchet :

<https://www2.iap.fr/users/blanchet/images/coursRG.pdf>

Chapitre 5- paragraphe D, commençant p.36 dont quelques extraits (entre les barres d'étoiles) sont donnés ci-après.

En relativité, on rappelle que la métrique s'écrit : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Rappel de la définition des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}] \quad (5.19)$$

Nous verrons que l'utilisation des équations de Lagrange avec le lagrangien « géodésique » permet de déterminer l'équation géodésique sans utiliser *a priori* les symboles de Christoffel. Ils vont apparaître naturellement dans le calcul. Considérons l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/dp)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad (5.21)$$

où L est ce qu'on appelle le *lagrangien géodésique* donné par

$$L \left(x, \frac{dx}{dp} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dp} \right)^2 \quad (5.22)$$

Comme on a pu réécrire L à l'aide de l'intervalle, on voit que les trajectoires solutions de l'équation des géodésiques sont bien les lignes géodésiques de l'espace-temps, c'est-à-dire les lignes extrémalisant la distance carrée entre les événements au sens de l'intervalle ds^2 . On peut en fait montrer que les géodésiques extrémalisent aussi la distance $ds = \sqrt{\pm ds^2}$.

:

Développons l'équation de Lagrange (5.21) avec le lagrangien (5.22), où p est le paramètre dynamique (affine), qui remplace le temps de la mécanique classique, en relativité, d'une part :

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/dp)} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu}) \left(\frac{dx^\nu}{dp} + \frac{dx^\mu}{dp} \right) = (g_{\mu\nu}) \left(\frac{dx^\nu}{dp} \right)$$

On peut l'écrire sous les 2 formes car la forme de l'équation est : $\frac{\partial(k \cdot x^2)}{\partial x} = 2 \cdot kx$

D'autre part :

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)$$

En insérant dans (5.21)

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dp} [g_{\mu\nu}] \left(\frac{dx^\nu}{dp} \right) + \frac{d}{dp} [g_{\mu\nu}] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \right) + g_{\mu\nu} \left(\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \frac{d^2 x^\nu}{dp^2} \right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \right\} = 0 \quad (5.23)$$

Dans la suite nous utiliserons les propriétés suivantes : La métrique est symétrique par rapport à ses indices $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, et un indice de sommation peut être renommé, puisque c'est un paramètre intermédiaire qui disparaît à la fin.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}(g_{\mu\nu}) &= \partial_\nu g_{\mu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \\ \frac{d}{dp}(g_{\mu\nu}) &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{dp}\end{aligned}$$

En insérant dans l'équation (5.23), l'équation elle peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} [g_{\mu\nu} \left(2 \frac{d^2 x^\mu}{dp^2} \right) + [(\partial_\nu g_{\mu\lambda}) + (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)] = 0$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par la métrique inverse et effectuer pour faire disparaître la métrique, en facteur avec les dérivées secondes.

$$g^{\rho\lambda} \frac{1}{2} \left[2g_{\mu\lambda} \left(\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} \right) + (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda}) \left(\frac{dx^\mu}{dp} \right) \left(\frac{dx^\nu}{dp} \right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \right] = 0$$

$$\delta_\mu^\rho \left(\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} \right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \Rightarrow \frac{d^2 x^\rho}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0$$

On a utilisé la relation $\rho = \mu$, pour que $\delta_\mu^\rho = 1$. L'expression de l'équation géodésique déduite des équations de Lagrange nous la présente sous la forme qui inclût la dérivée covariante.