

Géodésiques de type espace et de type nul en relativité générale

Les oubliées de la relativité générale

Introduction

C'est sans doute parce qu'on se demande à quoi elles peuvent servir et comment leur donner une interprétation physique que cette classe de géodésiques est peu étudiée en RG.

On en parle à propos des trous de ver (connectant les régions I et IV en métrique de Kruskal) dans les TN statiques, puisque les lignes d'univers les traversant sont de type espace, ce qui nous renseigne sur la structure, pas évidente, de cet espace-temps.

<https://preposterousuniverse.com/wp-...otes-seven.pdf>, (p. 188-190)

Géodésiques circulaires de type espace (Trou Noir)

Pour calculer les géodésiques de type espace dans un TN, en métrique de **Schwarzschild** par exemple, en suivant,

<https://preposterousuniverse.com/wp-...otes-seven.pdf>,

particulièrement p. 173-179)

qui utilise la méthode générale, avec les constantes du mouvement (énergie = E , moment angulaire = L , qui sont conservés sur une géodésique, car la métrique ne dépend ni de t ni de φ).

- La forme obtenue en (7.48) P.174 est pratique pour déterminer les géodésiques circulaires de type temps.

On connaît le résultat correspondant aux racines d'une équation du second degré, paires de géodésiques, pour une valeur du moment angulaire, une stable et une instable, et pas de solution pour $r < 3GM$) pour les géodésiques circulaires de type temps et 1 seule géodésique instable, nulle pour $r = 3GM$, où l'invariant métrique est spécifié de type temps ou nul.

L'énergie associée est positive.

Pour les géodésiques de type espace il faut poser que l'invariant métrique est de type espace.

Concernant les constantes du mouvement elles sont de même "type" mais adaptées pour le paramètre affine (appelons E l'énergie et L le moment angulaire "spatial").

Si on considère que L est réel on obtient des géodésiques circulaires de type espace entre $r = 0$ et $r = 3 GM$.

Constantes du mouvement

- (1)- Conservation de l'énergie : $E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}$
- (2)- Conservation de moment angulaire: $L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$
- (3)- Invariant métrique $\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$

- L'invariant métrique vaut :
- 1 pour les intervalles d'espace-temps de type temps
- 0 pour les intervalles d'espace-temps de type nul (lumière)
- -1 pour les intervalles d'espace-temps de type espace

Equation « géodésique » sous forme hamiltonienne

En insérant les constantes du mouvement E et L dans l'invariant métrique, on obtient:

$$(4) \quad -E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) = 0$$

Mise sous forme « hamiltonienne » (énergie cinétique et potentielle)

$$(5) \quad \text{On écrit cela :} \quad \frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r)$$

On reconnaît une « forme Hamiltonienne » avec une énergie totale $E^2/2$, somme de l'énergie cinétique (premier terme du membre de droite) et une énergie potentielle $V(r)$

$$(6) \quad \text{Où } V(r) = \frac{1}{2} \epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

Solutions du problème (rappel)

- **Cas des géodésiques de type temps et de type nul: $\epsilon = 1$ et $\epsilon = 0$.**

•

Pour déterminer les orbites circulaires de rayon r_c on cherche les extrema du potentiel, pour cela on prend sa dérivée par rapport à r , ce qui donne :

- (7)
$$\epsilon GM(r_c)^2 - L^2(r_c) + 3GM L^2 = 0$$

- Equation du second degré qu'il est simple de résoudre pour les différents types d'espace-temps.

Géodésiques de type espace ($\epsilon = -1$)

L'équation à résoudre devient: $-GMr_c^2 - L^2r_c + 3GML^2 = 0$

$$(8) \quad L^2(3GM - r) = GMr^2 \rightarrow L^2 = \frac{GMr^2}{3GM - r}$$

$$(9) \text{ Dont les solutions sont : } r_c = \frac{-L^2 \pm \sqrt{L^4 + 12G^2M^2L^2}}{2GM}$$

Discussion sur les solutions

- La racine positive donne une solution pour $2GM < r_c < 3 GM$ pour $L > 1$ et $0 < r_c < 2 GM$, pour $L < 1$, la racine négative donne une solution où : $0 > r_c > -\infty$.
- Si on l'interprète comme une solution dans « l'anti-univers » (le trou blanc), où r serait négatif, ce qui a un sens dans la métrique de Painlevé, par exemple, (mais pas dans celle de Schwarzschild), alors ce n'est pas incohérent puisqu'on sait que la phénoménologie décrite par les mathématiques est « répulsive » dans le trou blanc.
- Cela ne préjuge en rien du caractère physique de cette solution.

Longueur d'une orbite de type espace.

- De l'équation (2)
$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$
- On déduit
$$d\lambda = \frac{r^2 d\phi}{L}$$
- Pour la longueur Λ de l'orbite circulaire intégrons ϕ de 0 à 2π :
$$\Lambda = \frac{2\pi r^2}{L}$$
 - En utilisant λ comme paramètre affine de type espace et en utilisant l'équation (8) pour remplacer L^2 par sa valeur en fonction de r qui s'écrit :
$$L^2 = \frac{GM \cdot r^2}{3GM - r} \quad \rightarrow \quad \Lambda = \frac{2\pi r^2 \sqrt{3GM - r}}{\sqrt{GM} r^2} = \frac{2\pi r \sqrt{3GM - r}}{\sqrt{GM}}$$
- On note que cette équation est définie pour $r < 3GM$ et que les valeurs négatives de r sont (mathématiquement) autorisées.

Comparaison avec la géodésique circulaire de type temps : Géodésique circulaire de type temps.

Les calculs sont les mêmes que ceux fait pour les géodésiques de type espace mais avec l'invariant métrique ϵ qui vaut 1.

Pour une orbite circulaire géodésique de type temps, le paramètre affine est le temps propre τ , on peut vérifier, par la même méthode, qu'alors, la période de la géodésique s'écrit :

$$\tau = \frac{2\pi r \sqrt{r - 3GM}}{\sqrt{GM}}$$

L'expression est alors valide pour $r > 3GM$, conformément aux résultats connus. Concernant la pseudo-période de paramètre « cordonnée temps » sa valeur :

$$T = \frac{r}{r-3GM} \tau = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}}$$

Obtenu, par le même type de calcul que pour le cas de la géodésique de type espace, est également la même que celle donnée par la loi de Képler.

Notons que cette équation est valide jusqu'à $r = 0$, alors que la plus petite orbite circulaire géodésique vaut $r = 3GM$ en relativité.

Les deux théories montrent leurs différences.

Pont de Rosen et trous de ver (Trou noir-trou blanc)

- A la différence de la métrique spatiotemporelle, la métrique spatiale n'est pas singulière pour $r = 0$, en effet, dans la forme de Painlevé :
- $ds^2 = -(1-2GM/r)dt^2 \pm 2(2GM/r)^{1/2}dt.dr + d\Omega^2$ (dans \pm , signe $+$ pour le cas du trou noir, signe $-$ dans le cas du trou blanc).
- $d\Omega^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ est la section de type espace à $t = \text{cste}$.
- Alors que pour $r = 0$, ds^2 devient infini du fait du terme $1-2GM/r$, coefficient de dt^2 , pour $d\Omega^2$, rien de tel ne se produit à $r = 0$ si ce n'est que la partie sphérique se réduit à un point. L'utilisation de la double forme de Painlevé montre que les sections spatiales du trou noir et blanc se raccordent à $r = 0$. La singularité est de type « temps » dans cet espace-temps. Ce point avait été remarqué par Kruskal dans son article.

La forme de Kruskal pour caractériser le trou de ver

- « L'extension maximale de la variété a une topologie non euclidienne (fig 1) et appartient à une classe de topologies étudiées par Einstein, Rosen, Wheeler et Misner.
- Elle se présente comme un pont entre 2 espaces par ailleurs euclidiens comme Einstein et Rosen ont cherché à obtenir en modifiant les équations du champ.
- Il peut aussi être interprété comme la gorge d'un trou de ver, au sens de Wheeler, connectant deux régions distantes d'un seul espace euclidien, dans la limite où la distance entre les 2 bouches du trou de ver est grande par rapport à la circonférence de la gorge.

La forme de Kruskal pour caractériser le trou de ver

- La longueur de la connexion du trou de ver peut être, bien sûr, minuscule par rapport à la distance entre les bouches du trou de ver, dans l'espace approximativement euclidien.
- Cependant, comme la fig.2 le montre il est impossible d'envoyer un signal à travers la gorge qui violerait la causalité car la gorge se ferme empêchant le rayon lumineux de traverser.

Extrait article Kruskal: Trous ver et pont de Rosen

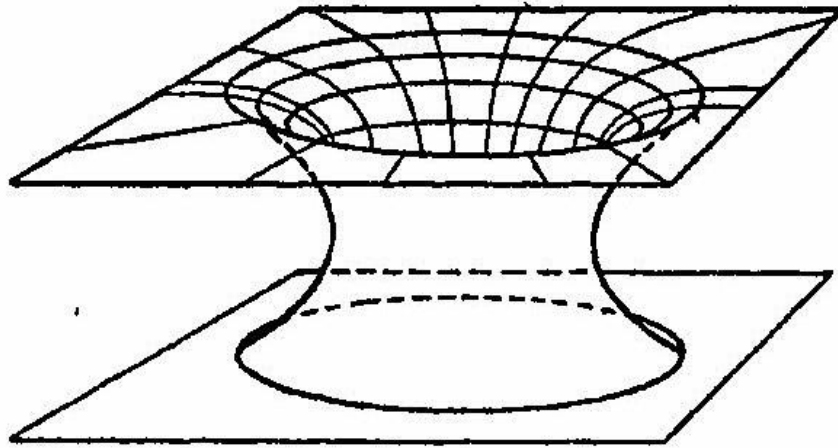


FIG. 1. Two interpretations of the 3-dimensional "maximally extended Schwarzschild metric" at the time $T=0$. Above: A connection or bridge in the sense of Einstein and Rosen between *two* otherwise Euclidean spaces. Below: A wormhole in the sense of Wheeler connecting two regions in *one* Euclidean space, in the limiting case where these regions are extremely far apart compared to the dimensions of the throat of the wormhole.

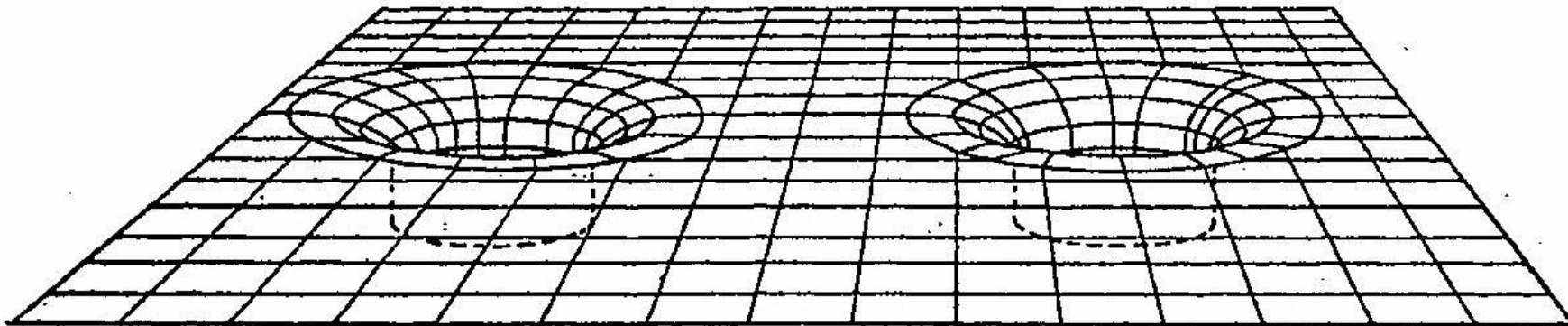
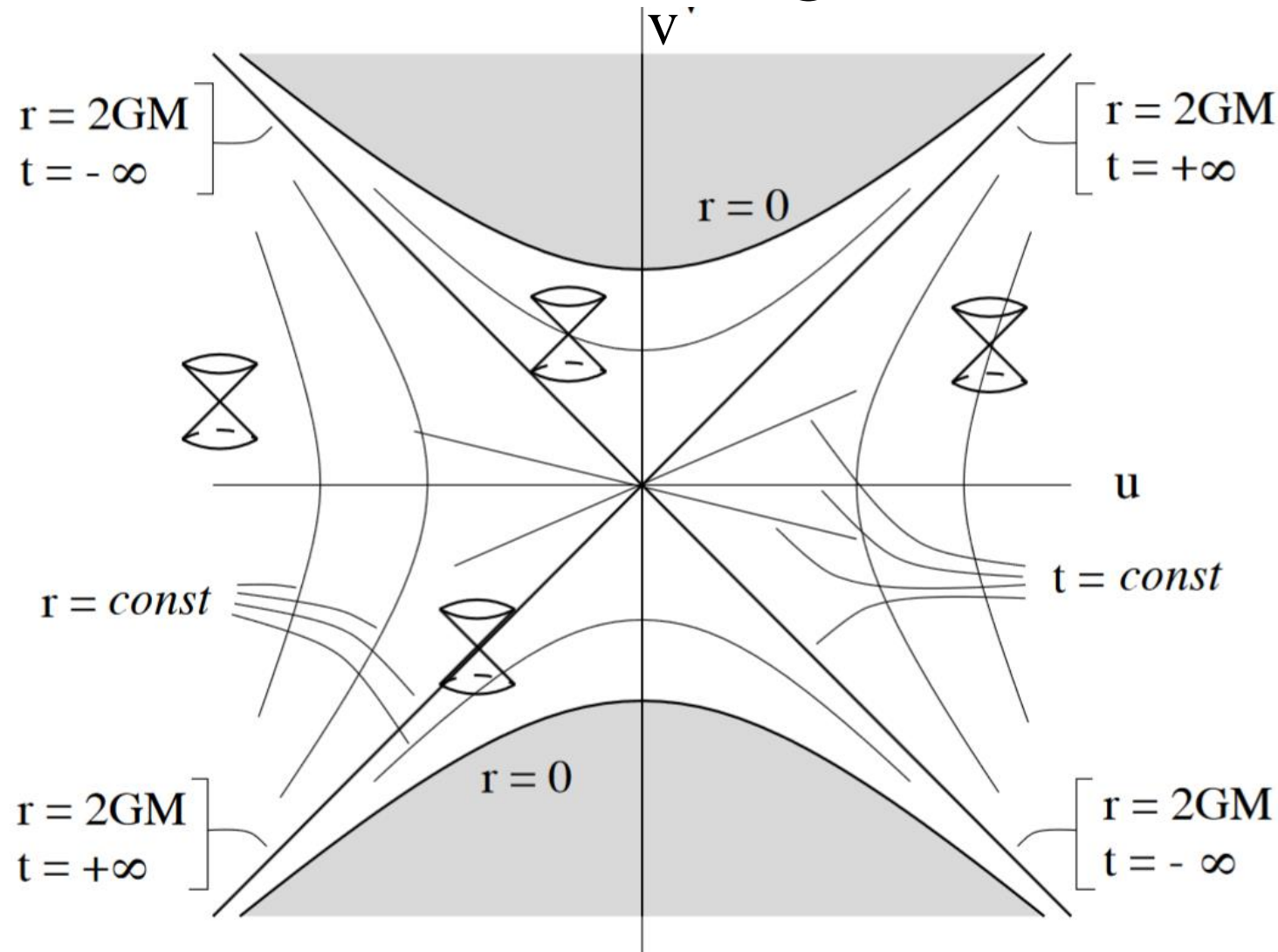


Diagramme de Kruskal



Les coordonnées u et v sont des coordonnées « composites », u est de type espace et v est de type temps.

$$u = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh(t/4GM)$$

$$v = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh(t/4GM)$$

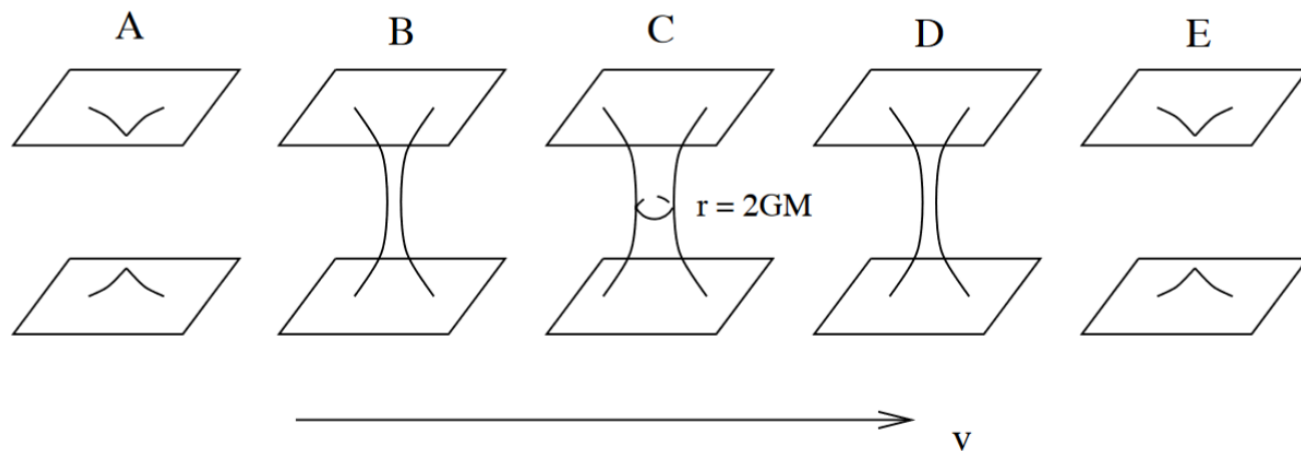
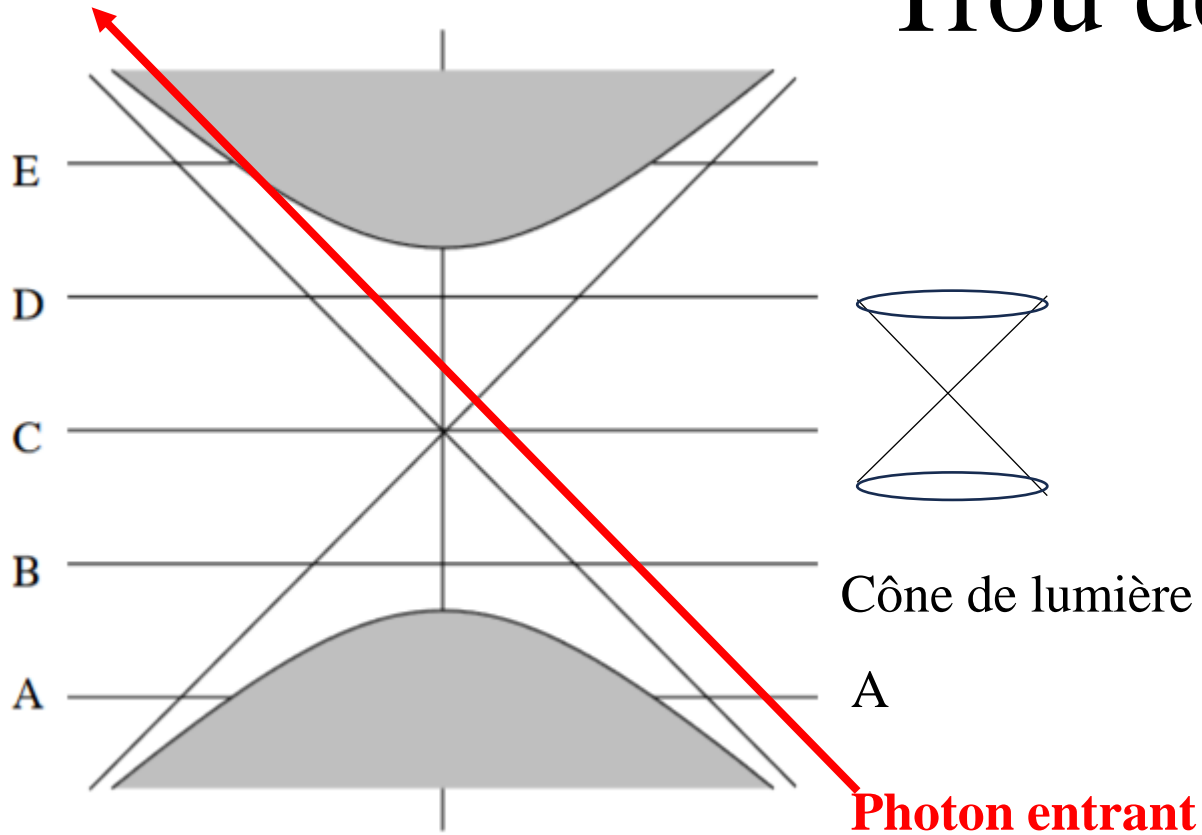
Où r est implicitement défini par:

$$(u^2 - v^2) = \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) e^{r/2GM} .$$

Et où $v/u = \tanh(t/4GM)$ et où pour $r = \text{constante}$ on a $u^2 - v^2 = \text{constante}$

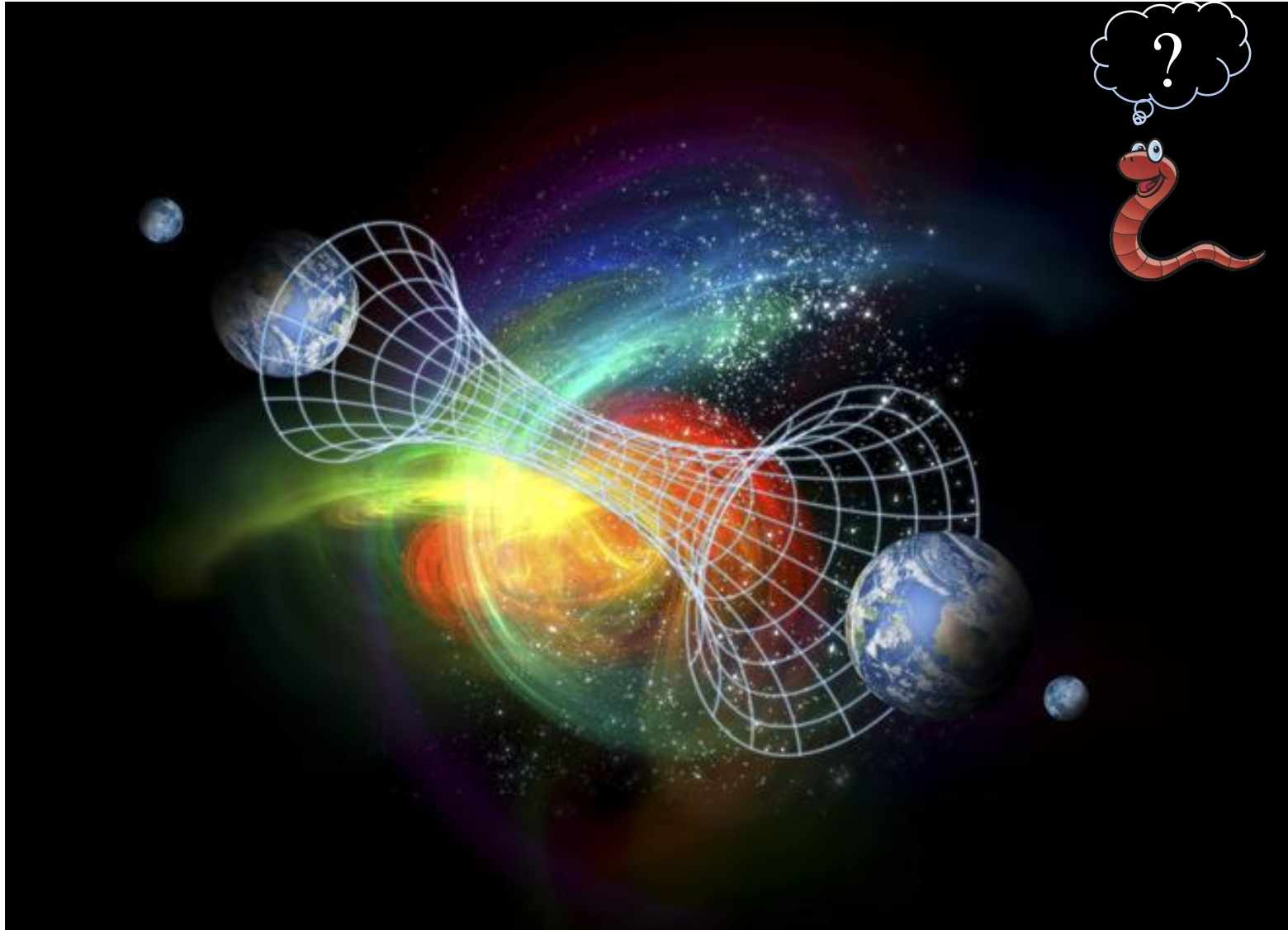
$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2$$

Trou de Ver



On a représenté la géométrie du trou de ver pour différentes valeurs constantes de la coordonnée v . Seule la coordonnée u varie sur ces sections spatiales. La valeur maximale de la gorge du trou de ver vaut $r = 2GM/c^2$. la trajectoire d'un photon (rouge) est parallèle aux lignes à 45° (voir cône de lumière). On voit comment le trou de ver s'ouvre en A et se ferme en E.

La terre passant par un trou de ver géant: Interstellar



Les géodésiques nulles

Lumière et géodésiques nulles

Vitesse de la lumière vs géodésiques nulles

• Le paradigme de la lumière

- La lumière ne doit pas être pensée, comme en mécanique classique, comme une onde (ou même un photon) se propageant dans un espace absolu (fictif) à la vitesse (constante et relative au référentiel où elle est observée) d'environ 300 000 km/s mais comme un **objet physique spatio-temporel**, associé à une **ligne d'univers de type nul**, caractérisé un **paramètre physique (de type fréquence) comme le décrit la relativité**.
- Dans le langage de la relativité originelle, on se raccrochait aux concepts de temps et d'espace newtoniens en balisant les référentiels galiléens en temps et espace. Le paramètre dynamique était, en général, le temps propre défini dans ce référentiel galiléen (résultant du ds^2).

Comme sur une géodésique nulle (d'où son nom) ce paramètre de temps propre est nul, on considérait qu'on ne pouvait pas parler de « **référentiel** » pour la lumière puisque ce type de synchronisation n'était pas possible.

Mais la notion de géodésique nulle, plus moderne (introduite par Minkowski en 1907) montre qu'on peut se passer de cette contrainte sans restriction de généralité.

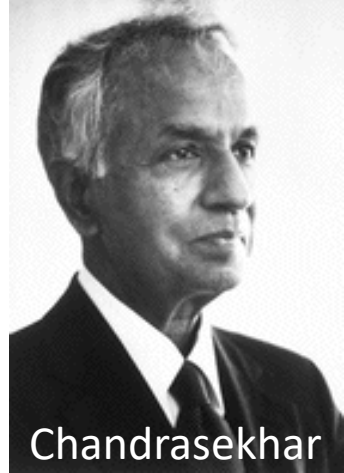
En effet, si le temps propre ne peut pas être utilisé sur un géodésique nulle, on utilise, en général, **l'impulsion relativiste** directement lié à la **fréquence** du photon (ou de manière plus classique de l'onde électromagnétique que nous désignons par lumière).

Notons que cette fréquence qui est mesurée sur une ligne d'univers de type temps peut être arbitraire puisque que ce sont les rapports entre les fréquences mesurées sur différentes lignes d'univers de type temps qui ont un caractère physique.

Avec cette description le mystère de la constance de la vitesse de la lumière disparaît, puisque, intrinsèquement associée à une géodésique de type nul, c'est une propriété intrinsèque géométrique (une géodésique de type nul, reste de type nul par toutes les transformations géométriques).

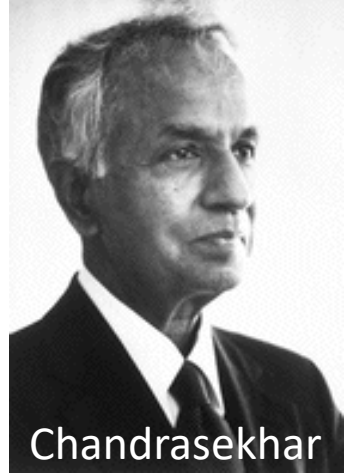
Mais rappelons, encore une fois que l'existence de ce repère, formé par un ensemble de géodésiques nulles, ne préjuge pas de l'existence d'un quelconque rayonnement de fond, même si cela peut être le cas dans certaines solutions de la relativité générale!

Introduction au formalisme NP

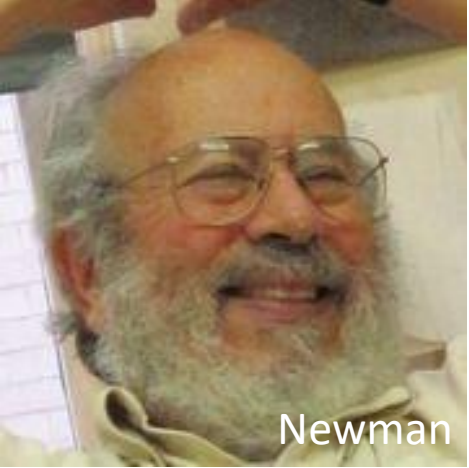


- Une bonne introduction au formalisme de Newman-Penrose (NP) est donnée par S. Chandrasekhar dans [4]: « Le formalisme de Newman-Penrose est un formalisme tétrade avec un choix particulier des vecteurs de base.
- Le choix qui est fait est une tétrade de vecteurs nuls l , n , m et m^* dont l et n sont réels et m et m^* sont conjugués complexes l'un de l'autre.

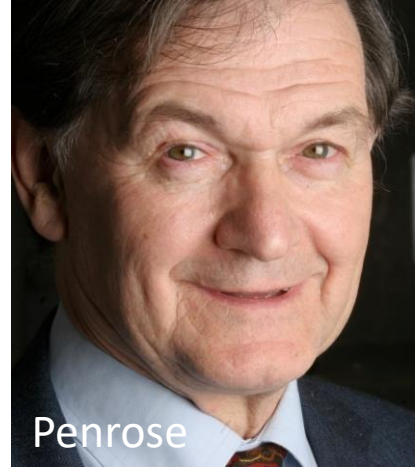
Introduction au formalisme NP



La nouveauté du formalisme, lorsqu'il a été proposé pour la première fois par Newman et Penrose en 1962 [5], résidait précisément dans leur choix d'une base nulle : c'était un écart par rapport au choix d'une base orthonormale qui était usuel jusqu'alors.



Introduction au formalisme NP



- Penrose a été initialement amené à envisager l'introduction d'une base nulle en incorporant des spineurs dans l'analyse de la relativité générale d'une manière essentielle. La motivation sous-jacente pour le choix d'une base nulle était la forte conviction de Penrose que l'élément essentiel d'un espace-temps est sa structure de cône de lumière qui rend possible l'introduction d'une base de spineur.



Introduction au formalisme NP



Et il apparaît que la structure du cône de lumière de l'espace-temps des solutions des trous noirs de la relativité générale est exactement celle qui rend le formalisme de Newman-Penrose plus efficace pour saisir les symétries inhérentes à ces espace-temps et révéler leur richesse analytique. S. Chandrasekhar souligne que ce formalisme est particulièrement efficace pour les solutions du trou noir (plus généralement des solutions de type D dans la classification de Petrov-Pironi [6,7]).

Introduction au formalisme NP

- Le mot « lumière » est un terme générique désignant les ondes électromagnétiques ou tout phénomène dont la vitesse est celle de la lumière, c'est-à-dire également les ondes gravitationnelles. En fait, c'est le fait que, pour se conformer au principe de relativité, il existe un invariant de vitesse dans le formalisme de la relativité, agissant comme une limite supérieure pour toute phénoménologie physique, qui est la contrainte structurelle physique.

Introduction au formalisme NP

Par conséquent, ce n'est pas la lumière elle-même qui régit la causalité en relativité, mais le fait qu'il existe une limite supérieure de vitesse, la lumière n'étant qu'une sorte de messenger voyageant à cette limite supérieure de vitesse.

C'est cette limite qui invalide l'espace et le temps universels de la mécanique newtonienne.

Formalisme de Newman-Penrose

- Dans ce nouveau formalisme, le tenseur métrique n'est plus celui de la relativité restreinte :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Mais, au lieu d'un tenseur à valeur de spineur, voir [8] pour la démonstration.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Morphisme présenté par le formalisme NP

- Ceci est mathématiquement parfaitement défini, mais il est difficile d'en donner une représentation physique. Les vecteurs nuls sont tangents aux chemins de la lumière dont le paramètre affine est nul ($ds^2 = 0$). Comme un vecteur nul est orthogonal à lui-même, il n'y a que 3 vecteurs nuls orthogonaux indépendants dans l'espace-temps 4D.
- C'est pour obtenir 4 degrés de liberté que l'un d'eux est complexe dans le formalisme NP.

Morphisme présenté par le formalisme NP

Néanmoins, un tel formalisme, qui semble très obscur, simplifiera les équations dans de nombreux cas, ce qui signifie qu'il existe un morphisme entre la structure (symétries) de ce formalisme et la structure de la phénoménologie qu'il décrit.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Premier exemple

- Dans les trous noirs de Kerr [9] ou Kerr Newman [10], dans ce formalisme NP, l'espace-temps peut être entièrement défini par un seul scalaire complexe de Weyl, qui contient toutes les informations sur cet espace-temps, au lieu de plusieurs dans tous les autres formalismes. Rappelons qu'un tel espace-temps de type D est entièrement défini par le tenseur de Weyl, qui est le tenseur de Riemann dans le vide.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Premier exemple (suite)

- Le tenseur de Weyl a 256 composantes, mais selon ses symétries, il n'a que dix valeurs indépendantes, généralement représentées par 5 scalaires complexes, appelés scalaires de Weyl. Le fait qu'un seul d'entre eux soit nécessaire dans le formalisme NP montre qu'il est le plus efficace pour définir ce type d'espace-temps.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Deuxième exemple

En relativité restreinte, nous pouvons également utiliser le formalisme NP. La première étape consiste à écrire la métrique de Minkowski (coordonnées t, x, y, z) :

- $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

- en coordonnées nulles en définissant : $U = a(t+x)$, $V = a(t-x)$,
 $W = a(y+iz)$, $W^* = a(y-iz)$,
- où $a = 2^{-1/2}$, est un facteur de normalisation.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Deuxième exemple (suite)

La métrique devient :

- $ds^2 = -2dUdV + 2dW.dW^*$

- Une augmentation du paramètre φ telle que $v/c = \tanh \varphi$, où v est la vitesse relative et une rotation du paramètre θ , sont définies par des opérateurs qui sont une matrice 4x4. Comparons ces opérateurs dans les formalismes de Minkowski et NP.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Dans le formalisme de Minkowski, pour un boost le long de l'axe x et une rotation autour du même axe x, la matrice 4x4 s'écrit habituellement:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le formalisme NP simplifie les équations

- Dans le formalisme NP, pour un boost le long de l'axe x et une rotation autour du même axe x, la matrice 4x4 peut être écrite (voir [8] pour la démonstration):
- Le formalisme NP fournit une matrice plus simple et plus symétrique, saisissant également en relativité restreinte, les symétries de la phénoménologie.

$$\begin{vmatrix} e^{-\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\vartheta} \end{vmatrix}$$

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP



- Comme l'équation d'Einstein est un ensemble d'équations différentielles partielles du second ordre non linéaires, les solutions analytiques ne peuvent être attendues que pour un espace-temps hautement symétrique. Au début de la relativité, les solutions ont été établies en utilisant les symétries de l'espace-temps décrites par le ds^2 . La solution de Schwarzschild dans le vide, en 1916, repose sur une forme générique du ds^2 avec une section sphérique d'espace, contrainte par l'équation d'Einstein (le tenseur de Ricci est nul) et la convergence avec l'équation de Newton à l'infini.

Les mathématiques révèlent l'efficacité NI



- Cette méthode a permis de trouver quelques solutions d'espace-temps hautement symétrique mais n'a pas réussi à trouver la solution des trous noirs en rotation, qui a été trouvée par Kerr 47 ans plus tard!
- Pendant ce temps, d'autres méthodes ont été développées en considérant le tenseur de Weyl (qui est invariant par une transformation conforme), qui spécifie pleinement la courbure de l'espace-temps dans le vide, comme un opérateur agissant sur des bi-vecteurs.
-
- L'étude des valeurs propres du tenseur de Weyl fournira une autre approche fructueuse.

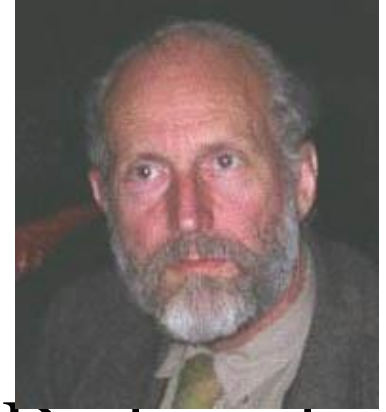
Les mathématiques révèlent l'efficacité NP

- Un résultat intéressant est qu'il existe un ensemble de 4 géodésiques nulles (liées aux racines d'une équation quadratique), appelées géodésiques nulles principales qui jouent un rôle structurel dans l'espace-temps, car elles définissent pleinement la métrique. Les catégories d'espace-temps vides dépendront du nombre de racines différentes.
- Dans les solutions de type D, où la métrique est définie dans le vide (espace-temps conforme vide), il existe 2 racines doubles, l'une correspondant à une classe (congruence) de géodésiques entrantes nulles (allant vers la singularité) et l'autre à une classe (congruence) de géodésiques sortantes nulles (provenant de la singularité).

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP

- Si le formalisme NP est si efficace pour simplifier les équations décrivant l'espace-temps, ce n'est pas fortuit, c'est parce qu'il s'appuie sur ces classes de géodésiques nulles principales.
- Penrose soupçonnait que les rayons lumineux (géodésiques nulles) jouaient un rôle essentiel, car ils régissaient la causalité. C'était sa principale motivation dans le formalisme NP mais en fait il y a encore plus d'informations disponibles dans ce formalisme, car c'est le plus efficace pour définir totalement l'espace-temps.
- La voie suivie par Kerr, telle que racontée par B. Carter dans [11], montre que c'est le formalisme qui l'a conduit à réussir dans sa recherche d'une solution :

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP



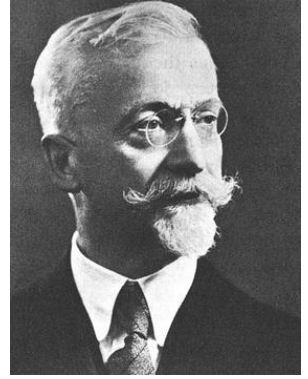
- Dans tous ces espaces, le tenseur de Weyl est de type D dans la classification de Petrov-Pirani, les deux vecteurs nuls doubles principaux étant donnés par .. (équations)....
- Par la généralisation de Kundt et Trumper du théorème de Goldberg-Sachs, ceux-ci sont intégrables pour donner deux congruences géodésiques nulles sans cisaillement.
- Le premier d'entre eux est entrant le second sortant C'est en utilisant ces propriétés structurelles du tenseur de Weyl et en recherchant spécifiquement des solutions non hypersurface-orthogonales, que les métriques de l'espace vide de la famille ont été dérivées par Kerr.

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP



- Par la suite, ces métriques ont été dérivées par Kerr et Schild à partir d'une étude systématique de solutions vides dont le tenseur métrique est (localement) la somme d'un tenseur métrique à espace plat et le produit tensoriel d'un vecteur nul avec lui-même.

Contribution majeure de E. Cartan en 1922



- Dans un article publié à l'Académie des Sciences [12], Elie Cartan, dès 1922, remarque l'intérêt de ce qu'il appelle « l'univers optique » qui appartient à une classe d'espaces-temps conformes vides en relativité. Il a remarqué l'existence de classes de géodésiques nulles, appelées géodésiques nulles principales, qui jouent un rôle structurel dans la description de l'espace-temps de Schwarzschild (qui est défini dans le vide).
- Il a identifié que, dans l'espace-temps de Schwarzschild, ces quatre géodésiques nulles principales ne sont que deux (chacune est double).
- C'est parce que cet espace-temps est de type D, mais Cartan ne le savait pas car cela sera établi plus de 30 ans plus tard par Petrov et Pirani dans leur classification. Malheureusement, sa brillante contribution est tombée dans l'oubli !

Cela suggère une double approche en relativité restreinte

- En relativité restreinte (SR), comme tous les référentiels inertiels (galiléens) sont équivalents (pas de repère préféré) habituellement, l'un est choisi comme référence (celui de l'observateur) et pour les autres, leur boost, leur rotation sont décrits de son point de vue.
- La vitesse de la lumière est un invariant (le même pour tous les cadres galiléens), mais la fréquence d'un rayon lumineux émis dans un cadre est différente dans les autres.
- Comme nous connaissons le rôle structurel de la lumière en relativité et que la vitesse de la lumière est un invariant, cela suggère de sélectionner des géodésiques nulles comme référence.

Cela suggère une double approche en relativité restreinte

- Comme $ds^2 = 0$, généralement le p_μ à quatre moments est utilisé comme paramètre affine sur les géodésiques nulles. Elle dépend de la fréquence du photon dont l'énergie est:

- $E = h\nu$

- Parce que: $p^\mu = E/c = h\nu/c$

- Dans ce cas, si nous calculons le décalage Doppler f/f_0 entre deux images de vitesse relative v en utilisant l'équation Doppler relativiste avec $v/c = \tanh(\varphi)$, c'est-à-dire $\varphi = \operatorname{arctanh}(v/c)$, voir [8] pour une démonstration, on obtiendra :

- $\frac{f}{f_0} = e^\varphi$

- Ce résultat a la même forme que celui donné par le formalisme NP.

Conclusion

- Le formalisme de Newman-Penrose, en plus de simplifier les équations et de révéler les symétries cachées des espaces-temps, ouvre la porte à une nouvelle approche conceptuelle reposant sur des géodésiques à base nulle et des coordonnées nulles.
- Il s'agit d'une double approche de celle de l'analyse habituelle.
- Une analyse basée sur la fréquence impliquera le formalisme de Fourier où, comme de nombreux outils ont été développés, cela ouvrirait un nouveau champ d'analyse.

Références

- 1- G.Bachelard (1966). “Le nouvel esprit scientifique” 9^{ième} édition, PUF. Translated by Arthur Goldhammer (1986). “The new scientific spirit”, Bacon press.
- 2- B. Delamotte (2006) : Un soupçon de théorie des groupes: groupe des rotations et groupe de Poincaré. <https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/92924/filename/DEA-TH-GROUPES-2efinal.pdf>
- 3-. C.W Misner, K.S. Thorne, J.A Wheeler. “Gravitation” Freeman
- 4- S. Chandrasekhar. (1983). “The mathematical theory of black holes” Oxford University Press.
- 5- E. T. Newman, R. Penrose (1962): “An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients ”. Journal of Mathematical Physics. **3** (3): 566–768.
- 6-A-Z Petrov (1954). "Klassifikatsiya prostranstv opredelyayushchikh polya tyagoteniya". Uch. Zapiski Kazan. Gos. Univ. **114** (8): 55–69. English translation Petrov, A.Z. (2000). "Classification of spaces defined by gravitational fields". General Relativity and Gravitation. **32** (8): 1665–1685.
- 7-Pirani, F. A (1957). "Invariant formulation of gravitational radiation theory", Phys. Rev., **105** (3): 1089–1099.
- 8- Undisclosed name. Special relativity in null coordinates. Not published
- 9- R.P. Kerr (1963). "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics". Physical Review Letters. **11** (5): 237–238.
- 10- E. Newman, A. Janis (1965). "Note on the Kerr Spinning-Particle Metric". Journal of mathematical Physics. **6** (6): 915–917.
- 11- B. Carter (1968). "Global structure of the Kerr family of gravitational fields". Phys. Rev. **174** (5): 1559–1571.
- 12- E. Cartan (1922) “Sur les espaces conformes généralisés et l’Univers optique”. CRAS 27 mars 1922 p.857-860.