Annexe 2 : calcul de la métrique spatiale de Robertson-Walker

Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique

Si on s'intéresse aux métriques 3D à symétrie maximum γ_{ij} , elles obéissent à la loi:

$$^{(3)}R_{ijkl} = k\,(\gamma_{ik}\,\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \qquad (2)$$

où k est une constante et l'indice $^{(3)}$ sur le tenseur de Riemann nous rappelle que c'est une métrique *3D* (spatiale), γ_{ij} n'est donc pas la métrique de l'espace temps.

Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D

Les composantes (d'espace) du tenseur de Ricci prennent la forme très simple suivante:

$$^{(3)}R_{jl} = 2k.\,\gamma_{jl} \qquad (3)$$

Un espace à symétrie maximale possède nécessairement une symétrie sphérique, soit

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\,du^i\,du^j = e^{2\beta(r)}\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + sin^2\theta.\,d\Phi^2) \qquad (4)$$

Les composantes du tenseur de Ricci, $R_{ik} = \partial_l\Gamma^l_{ik} - \partial_k\Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$, se réduisent à :

$$^{(3)}R_{11} = (2/r)\partial_l\beta,\quad ^{(3)}R_{22} = e^{-2\beta}(r.\partial_l\beta - 1) + 1,\quad ^{(3)}R_{33} = [e^{-2\beta}(r.\partial_l\beta - 1) + 1]\,sin^2\theta \qquad (5)$$

On les pose proportionnels à la métrique en utilisant (3), et on résout pour $\beta\,(r)$:

$$\beta = -\tfrac{1}{2}\,ln\,(1-k.r^2) \qquad (6)$$

Détaillons le résultat de (6) à partir de (3) (4) et (5)

Les coordonnées 1, 2, 3 sont respectivement r, θ, φ.

Les composantes de la métrique spatiale sont données par (4)

$$\gamma_{11} = e^{2\beta(r)} \qquad \gamma_{22} = r^2 \qquad \gamma_{33} = r^2.sin^2(\theta) \qquad (7)$$

Pour la composante γ_{11} de la métrique qui est r cela donne :

$$R_{11} = 2k.\,e^{2\beta(r)} = (2/r)\partial_r\beta(r) \qquad (8)$$

$$R_{22} = 2k.r^2 = [e^{-2\beta(r)}(r.\partial_r\beta(r) - 1)] + 1 \qquad (9)$$

$$R_{33} = 2k.r^2.sin^2(\theta) = \{[e^{-2\beta(r)}(r.\partial_r\beta(r) - 1)] + 1\}\,sin^2(\theta) \qquad (10)$$

On voit que les 2 dernières équations sont identiques.

Vérifions que la solution donnée par (6) satisfait bien ces équations.

$$R_{11} = 2k.\,e^{2(-1/2\,ln(1-kr^2))} = 2k.\,e^{-\,ln(1-kr^2)} = 2k/(1-kr^2) = (2/r)\partial_r(-\tfrac{1}{2}\,ln(1-kr^2)) \qquad (11)$$

$$R_{22} = 2k.r^2 = [\,e^{-2(-1/2\,ln(1-kr^2))}\,r.\partial_r(-\tfrac{1}{2}\,ln(1-kr^2)) - 1)] + 1 = [r\,(1-kr^2)].[\partial_r(-\tfrac{1}{2}\,ln(1-kr^2)) - 1)] + 1 \qquad (12)$$

En utilisant la formule ln(u)’ = (u’/u), nous obtenons

$$\partial_r\beta(r) = \partial_r(-\tfrac{1}{2}\,ln(1-kr^2)) = -\tfrac{1}{2}\,(-2kr)/(1-kr^2) = kr/(1-kr^2) \qquad (13)$$

Vérifions que la solution proposée est correcte en substituant ce résultat dans (11) :

$2k/(1-kr^2) = (2/r)kr/(1-kr^2) = 2k/(1-kr^2)$ (14)

C'est correct. Vérifions pour l'équation (12).

$2k.r^2=[(1-kr^2)].[kr^2/(1-kr^2) -1)]+1=[(1-kr^2)].[(kr^2-1 +kr^2)/(1-kr^2)]+1=(kr^2 -1 +kr^2)]+1=2kr^2$

(15)

Ce qui est bien vérifié.