

Théorie des champs

Groupe de Symétrie, théorie de jauge

Conférence sciences dures: 29/07/2023 par Jacques Fric, VP commission cosmologie

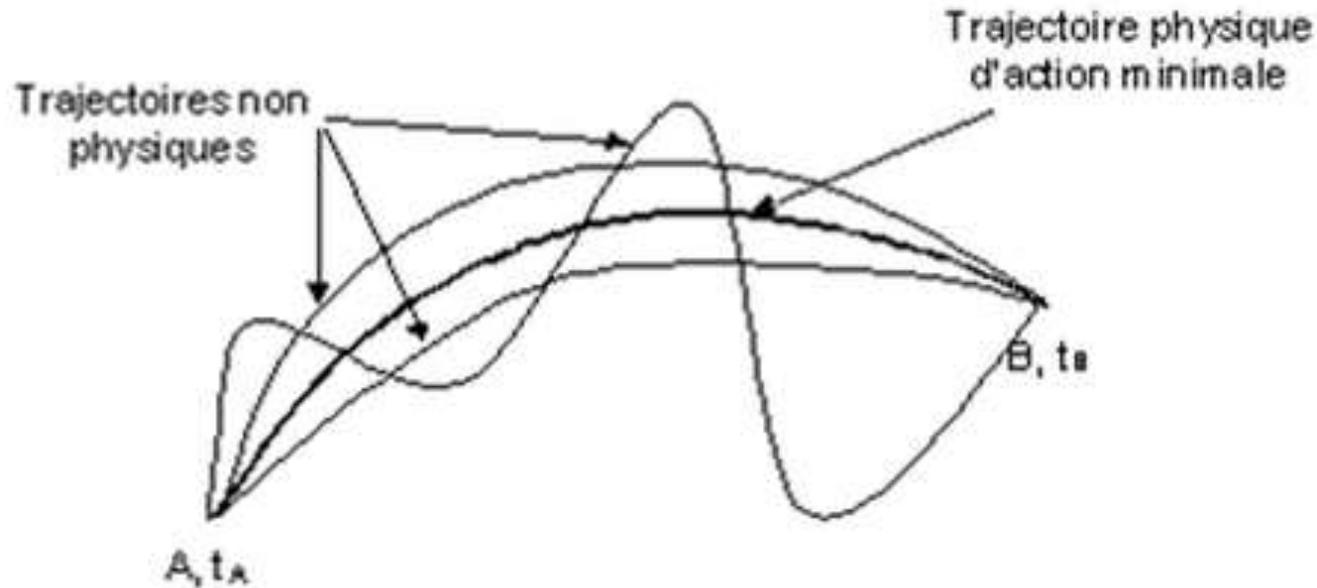
Rappels: Principe de moindre action

- De façon générale, on définit une action S , sur une courbe AB, en mécanique classique par :

$$S = \int_A^B L(q_i, q'_i) dt$$

- Où L appelé lagrangien est une fonction des coordonnées q_i, q'_i qui sont les coordonnées généralisées.
- Comme la formule ci-dessus le montre, la variable dynamique est le temps.

Rappels: Principe de moindre action



- Les équations du mouvement vont s'obtenir par le principe de moindre action: l'expression de S est un extremum sur la trajectoire.
- Le calcul général de cette condition s'exprime par l'équation de Lagrange.

La théorie des champs: Lagrangien classique

- Le **lagrangien** $L(x^i, \dot{x}^i)$, d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui contient toute l'information pour permettre d'écrire de manière concise les équations du mouvement du système. On dit souvent que le lagrangien est l'**ADN** d'une théorie
- Le lagrangien classique d'une particule est égal à l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle.

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U(r)$$

- En développant cela donne:

$$L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{dt}) = \frac{1}{2} \delta_{\mu\mu} \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)^2 - [U(x, y, z) + h]$$

La théorie des champs: Lagrangien classique

- On obtient l'équation du mouvement par l'équation de Lagrange:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)}\right)=\frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

Qui s'obtient par la condition d'extremum de l'action S :

$$\delta S = \delta \int_A^B L(q_i, q'_i) dt = 0$$

Lagrangien relativiste et équation du mouvement

Dans ce cas, comme le temps est une coordonnée au même titre que les coordonnées d'espace, c'est λ , le paramètre affine qui est le paramètre dynamique

$$L(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x, y, z) \left[\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] = \frac{1}{2} ds^2$$

L'équation de Lagrange associée est:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

Densité de Lagrangien \mathcal{L}

En relativité, dans le cas où on traite de grandeurs physiques représentées par des champs Φ^i , on définit une densité de lagrangien \mathcal{L} , qui doit être intégrée sur tout l'espace-temps (à 4 dimensions) dont l'élément infinitésimal est noté « d^4x ».

L'équation du mouvement s'en déduira par le principe de moindre action.

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i) d^4x$$

Le principe de moindre action s'applique alors à l'espace-temps et définit son état « géodésique » à savoir le plus stable

Théorie de Jauge

Un Univers qui ne serait constitué que de quarks et de leptons serait ennuyeux et improductif.

La dynamique est ce qui décrit leurs interactions, en particulier les états liés dans les hadrons et les atomes.

Une conséquence intéressante de la Relativité et de la mécanique quantique est que leur interaction peut être décrite en termes d'échange de particules de médiation.

Théorie de Jauge

Considérons deux particules chargées, disons un proton et un électron, séparées par une distance finie. Etant chargées elles exercent l'une sur l'autre une action Coulombienne "électrique" .

Supposons que nous déplaçons légèrement le proton.

Le champ environnant va changer, ainsi que son influence sur l'électron.

Mais la relativité restreinte nous dit que la perturbation ne peut pas se propager plus vite que la lumière (pas d'action instantanée à distance).

Théorie quantique des champs

La description moderne des forces s'appuie sur la notion de champ, donc la perturbation va moduler le champ entre le proton et l'électron.

La mécanique quantique considère ces modulations comme des degrés de liberté dynamiques qui doivent être quantifiés comme les autres.

Les excitations minimales (quanta) du champ sont interprétées comme des particules, et l'interaction entre un proton et un électron est décrit en termes d'échange de ces particules.

Théorie quantique des champs

Comme les équations de Maxwell nous enseignent que le champ électromagnétique a des solutions ondulatoires, dont la lumière est un exemple, nous identifierons ces particules, associées au quanta du champ électrique, aux photons qu'Einstein a introduits pour expliquer l'effet photo-électrique.

Electrodynamique quantique

- La théorie quantique décrivant l'interaction entre les photons et les électrons est appelée l'électrodynamique quantique (QED pour Quantum ElectroDynamics). Cette théorie s'est révélée très fructueuse en termes de prédiction et de précision (10^{-11}).
- Il se trouve qu'on peut déduire l'électromagnétisme classique et la QED de symétries dites de "jauge", introduites dans la théorie des électrons libres. La QED est l'exemple générique d'une théorie de jauge.

Exemple des pions

Regardons comment ça marche sur un exemple simple, qui nous permettra également d'introduire le concept de champ, fonction de l'espace-temps dont la quantification des excitations élémentaires seront interprétées comme des particules.

Nous nous en tiendrons à la relativité restreinte (la relativité générale conduisant à un formalisme complexe rarement nécessaire, sauf en cas de conditions extrêmes, à proximité d'un trou noir par exemple).

Exemple des pions (cas simple)

Un pion π^+ , par exemple, est chargé électriquement positivement (charge $+1$) donc est sensible à l'interaction électrique. Il a un spin de 0 , ce qui est caractéristique d'un champ scalaire qui a l'avantage d'être beaucoup plus simple que le champ associé à un fermion comme l'électron par exemple qui a un champ spinoriel.

Ce champ scalaire est noté $\Phi(x)$ où x représente la coordonnée d'espace-temps x^μ .

Par une transformation de Lorentz $x \rightarrow x'$ et le champ se transforme comme suit:

$$\Phi'(x') = \Phi(x)$$

Théorie des champs relativistes

- En théorie des champs Relativiste, il nous faut aussi décrire simultanément l'antiparticule π^- . Ceci est nécessaire du fait que, dans les réactions énergétiques, des paires de pions peuvent émerger ex nihilo. Par exemple dans les collisions proton/proton, la réaction:
- $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$ est possible si l'énergie cinétique de la paire de protons incidente au centre de masse est supérieure à l'énergie de masse au repos des deux pions.
- On pourrait introduire deux champs scalaires $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ pour décrire respectivement le pion et l'antipion

Théorie des champs relativistes

Il est plus élégant de considérer $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ comme la partie réelle et imaginaire d'un champ complexe :

$$\Phi(x) = \rho(x) e^{i\alpha(x)} = \{\Phi_1(x) + i \Phi_2(x)\} (2)^{-1/2}.$$

$(2)^{-1/2}$ est un facteur de normalisation du module de l'onde dans sa décomposition en partie réelle et complexe.

Équation du mouvement

Si le champ est sans interactions, il va satisfaire l'équation (Klein-Gordon) relativiste du mouvement :

$$\square \Phi(\mathbf{x}) \equiv (\partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2) \Phi(\mathbf{x}) = m^2 \Phi(\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

où m est la masse du pion (Cette équation s'appliquant aussi pour le champ conjugué Φ^* qui associé à Φ peut produire deux états indépendants au lieu des deux fonctions $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$). Cette équation est invariante par transformation de Lorentz, car le d'alembertien \square et m^2 sont invariants tous les deux. Elle est la transposition, en termes d'opérateurs appliqués à la fonction d'onde, de l'équation de la norme du 4-vecteur \mathbf{p} donnée par $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$, ($p \rightarrow \partial_\mu$).

Le symbole ∇ désigne le gradient d'une fonction, ici la fonction d'onde.

Ici, la position (exposant ou indice) de μ dénote qu'on doit faire une sommation sur les différentes valeurs de μ .

C'est la convention d'Einstein.

Choix du Lagrangien

Si nous choisissons la densité de Lagrangien invariante par transformation de Lorentz $L(x)$

$$L(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi(x))^* (\partial^\mu \Phi(x)) + \frac{1}{2} m^2 (\Phi^*(x) \Phi(x)) \quad (6.5)$$

On note la convention d'Einstein de sommation, $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 + \partial_1 \partial^1 + \partial_2 \partial^2 + \partial_3 \partial^3$.

Invariance globale

On voit que (6.5) est invariant par changement de la phase d'une même valeur partout, $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$ avec α constant, du fait de la présence des fonctions conjuguées.

Ceci est appelé une invariance globale du Lagrangien.

$$L(x, \alpha) = \frac{1}{2} [\partial_\mu e^{i\alpha} \Phi(x)]^* [\partial^\mu e^{i\alpha} \Phi(x)] + \frac{1}{2} m^2 [e^{-i\alpha} \Phi^*(x) e^{i\alpha} \Phi(x)]$$

$$L(x, \alpha) = \frac{1}{2} e^{-i\alpha} [\partial_\mu \Phi(x)]^* e^{i\alpha} [\partial^\mu \Phi(x)] + \frac{1}{2} m^2 [e^{-i\alpha} \Phi^*(x) e^{i\alpha} \Phi(x)]$$

Le 2^{ème} terme est invariant même si α dépend de x , le problème c'est la dérivée dans le 1^{er} terme.

Invariance locale, dite invariance de jauge*

Exigeons que le lagrangien soit aussi invariant par un changement de phase, dépendant du point de l'espace-temps: $\alpha = \alpha(x)$. Ici x désigne, de manière générique, les coordonnées .

Ceci est appelé une invariance locale ou encore invariance de jauge.

Telle qu'elle, la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \mu}$ notée ∂_μ ne permet pas cette invariance du lagrangien que nous avons défini. *Exercice à faire:* utiliser la formule de Leibnitz pour les dérivées d'un produit.

Pourquoi vouloir cette invariance locale ce qui semble bien étrange?

*Une jauge sert à mesurer une grandeur.

Invariance locale, dite invariance de jauge

Ajoutons un champ $A(x)$ et définissons un nouvel **opérateur** de dérivée D_μ , *s'appliquant sur la fonction* $\Phi(x)$ avec les règles de couplage suivantes:

$$\partial_\mu (\Phi(x)) \rightarrow D_\mu (\Phi(x)) \equiv [\partial_\mu - i.A_\mu(x)](\Phi(x)) = \partial_\mu \Phi(x) - i.A_\mu(x). \Phi(x)$$

Et poser:

$$A_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

Quand:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) e^{i\alpha(x)}$$

Le champ $A(x)$ que nous avons introduit s'appelle le potentiel électromagnétique.

Quelques rappels

Pour des fonctions u, v de plusieurs variables ($x, y, z, \text{ etc.}$)

Dérivée (partielle) d'un produit de fonctions (règle de Leibnitz):

$$\partial_x (u.v) = \partial_x (u).v + \partial_x (v).u,$$

$$\text{Exemple: } \partial_\mu [e^{i\alpha(x)} \Phi(x)] = \partial_\mu \Phi(x).e^{i\alpha(x)} + \Phi(x).i.\partial_\mu \alpha(x)e^{i\alpha(x)}$$

Dérivée (partielle) d'une fonction u d'une fonction v de plusieurs variables ($x, y, z, \text{ etc.}$), (fonction de fonction):

$$\partial_x [u(v)] = \partial_v [(u)] \partial_x (v).$$

$$\text{Exemple: } \partial_\mu e^{i\alpha(x)} = i.\partial_\mu \alpha(x)e^{i\alpha(x)}$$

Nombres complexes conjugués

$$(a+ib)^* = a - ib$$

Avec D_μ et $A_\mu(x)$ dont la définition est rappelée ci-dessous, le lagrangien devient:

$$L(x, \alpha) = \frac{1}{2} [D_\mu e^{i\alpha(x)} \Phi(x)]^* [D^\mu e^{i\alpha(x)} \Phi(x)] + \frac{1}{2} m^2 [e^{-i\alpha(x)} \Phi^*(x) e^{i\alpha(x)} \Phi(x)]$$

$$D_\mu \Phi(x) \rightarrow \underline{\partial_\mu \Phi(x)} - iA_\mu(x) \Phi(x) \text{ et } A(x) \rightarrow A(x) + \partial_\mu \alpha(x) \text{ si } \Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi(x) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} D_\mu [e^{i\alpha(x)} \Phi(x)] &\rightarrow \underline{\partial_\mu \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)}} + \underline{i \cdot \Phi(x) \cdot \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)}} - i \cdot A_\mu(x) \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} - \underline{i \cdot \Phi(x) \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)}} \\ &= \partial_\mu \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} - iA_\mu(x) \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)} D_\mu \Phi(x) \end{aligned}$$

Car le 2^{ième} et le 4^{ième} terme s'annulent. On peut alors mettre en facteur $e^{i\alpha(x)}$.

Le terme conjugué où $\Phi^*(x) \rightarrow \Phi(x)^* e^{-i\alpha(x)}$, donne $e^{-i\alpha(x)} [D^\mu \Phi(x)]^*$.

Le produit $D_\mu D^\mu = e^{i\alpha(x)} D_\mu \Phi(x) e^{-i\alpha(x)} [D^\mu \Phi(x)]^* = D_\mu \Phi(x) [D^\mu \Phi(x)]^*$ est invariant.

Nota : La position de l'indice μ dénote la convention de sommation d'Einstein. En espace de Minkowski on peut abaisser ou élever sans que cela change le résultat (ce qui ne serait pas le cas en relativité générale)

Comparaison avec la relativité générale

- Le formalisme utilisé est du même type que celui de la relativité générale où, pour exprimer le couplage d'une particule avec le champ gravitationnel, on remplace l'opérateur dérivée partielle $\partial/\partial x^\mu$, qu'on note en général ∂_μ , par une dérivée covariante notée $\nabla_\nu = \partial_\nu + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$
- Le terme $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (symbole de Christoffel qui dépend de la métrique et de ses dérivées) introduit le couplage avec le champ gravitationnel.
- Par exemple pour la dérivée covariante d'un vecteur V^μ , cela s'écrit:

$$\bullet \nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda = T^\mu_\nu$$

- Il faut sommer sur l'indice λ . Le résultat est un tenseur (mixte dans ce cas).

Tout cela a des allures de passe-passe, mais qu'avons-nous fait?

Nous avons voulu rendre la loi du champ électronique de la particule chargée invariante par un changement local de phase en demandant à son lagrangien d'être invariant par cette transformation. Pour aboutir à cela nous avons été conduits à introduire:

D'une part, un nouveau type de dérivée qui prend en compte le couplage avec un nouveau champ que nous identifié comme étant le champ électromagnétique, comme en relativité générale où la dérivée covariante prend en compte le couplage avec le champ gravitationnel, ce qui montre la parenté des deux formalismes.

D'autre part, une loi de transformation de ce nouveau champ lorsqu'on opère un changement de phase. Cela définit le nouveau, le champ électromagnétique, avec sa loi de couplage au champ électrique.

Nous constatons que c'est la symétrie de jauge, imposant une invariance de jauge au lagrangien décrivant la matière chargée, qui a conduit à introduire le champ électromagnétique avec ses lois de couplage à la matière chargée.

On montre qu'une conséquence de cette symétrie de jauge est la conservation de la charge électrique en vertu du théorème de E. Noether qui stipule que, à toute symétrie formelle, correspond une conservation de l'élément physique concerné.

Le groupe de jauge de l'électromagnétisme est $U(1)$

L'invariance de jauge par rotation locale de la phase, associée à l'interaction électromagnétique, que nous avons démontrée, correspond à une symétrie associée au groupe $U(1)$ des rotations à 1 degré de liberté.

Autrement dit, le champ électrique ne dépend pas de la phase. On dit aussi qu'il est invariant par multiplication par un nombre complexe.

Le groupe de symétrie de l'électrodynamique est donc le groupe $U(1)$.

L'unification de l'interaction électromagnétique avec l'interaction faible dans l'interaction électrofaible va faire intervenir un autre groupe de rotations, celui dans l'espace tridimensionnel appelé $SU(2)$, que nous allons introduire. Le groupe de l'interaction électrofaible sera $U(1)SU(2)$.

Diagrammes de Feynman

La manière habituelle de description des couplages par échange de particules utilise les diagrammes de Feynman, un des contributeurs majeurs à la QED. La figure ci-jointe montre un tel diagramme correspondant à l'interaction de 2 électrons par échange d'un photon.

Nous savons de l'étude de la désintégration du neutron qu'il existe une autre interaction plus faible que l'électromagnétisme. C'est à cette "interaction faible" que les neutrinos sont sensibles, ce qui permet leur détection expérimentale. Cependant un neutrino de 1 Mev (énergie principalement cinétique) interagit si faiblement avec la matière que son trajet moyen d'interaction est d'environ 1 année lumière dans la matière, ce qui rend leur détection difficile.

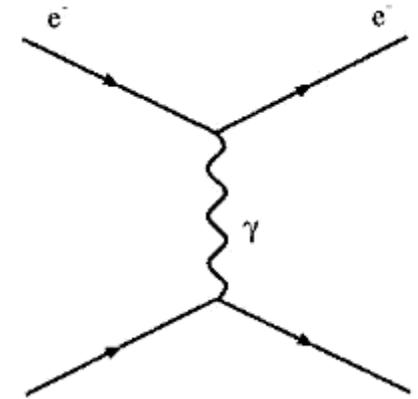
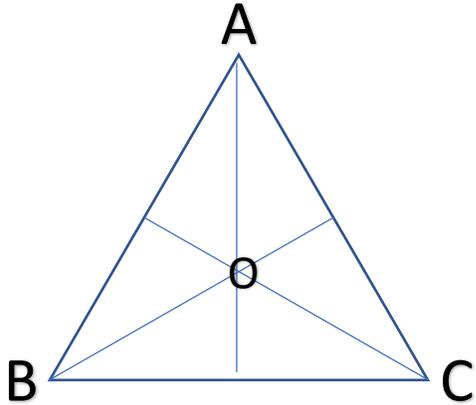


Diagramme de Feynman représentant la diffusion de deux électrons via un échange de photon

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral



→	I	R1	R2	SA	SB	SC
I	I	R1	R2	SA	SB	SC
R1	R1	R2	I	SB	SC	SA
R2	R2	I	R1	SC	SA	SB
SA	SA	SC	SB	I	R2	R1
SB	SB	SA	SC	R1	I	R2
SC	SC	SB	SA	R2	R1	I

Ce groupe possède 6 éléments: L'identité I, les 2 rotations R1 et R2 de centre O d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$, les 3 symétries SA, SB, SC autour des hauteurs issues des points A, B, C. La loi multiplicative du groupe est donnée dans le tableau ci-dessus. En fait, ce groupe est celui des permutations des 3 éléments a, b, c; à savoir: abc, bca, cab, acb, bac, cba.

Il n'y a que trois représentations.

1- Tous les éléments du groupe sont représentés par 1 (représentation triviale)

2- I et les rotations sont représentées par 1 et les symétries par -1.

3- Une représentation par 6 matrices (2 x 2).

Les représentations 1 et 2 sont de dimension 1, la représentation 3 est de dimension 2. La représentation 2 montre la différence de nature entre les rotations et les symétries. **Les 3 éléments I, R1 et R2 forment un sous-groupe "distingué" caractéristique des automorphismes du groupe.**

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral (compléments)

Comme le groupe des racines (a, b, c) de l'équation du 3^{ième} degré, qui peut se mettre sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$, est insensible aux permutations de a, b, c , il est le groupe des permutations des racines (a, b, c) de l'équation.

Il est le même que le groupe de symétrie du triangle équilatéral. On voit que 2 objets très différents, un triangle et une équation, sont régis par même groupe!

Son sous-groupe distingué $(I, R1, R2)$, où chaque élément est égal à son conjugué par les 6 éléments du groupe du triangle équilatéral, joue un rôle fondamental dans la possibilité de résolution de l'équation du 3^{ième} degré.

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral (compléments)

L'existence d'un tel sous-groupe est caractéristique d'une symétrie interne du groupe lui-même, ce qui n'a rien de général.

Si la solution aux équations du 2^{ième} degré étaient connues dès l'antiquité (Babylone, vers -1800), il faudra attendre le 16^{ième} siècle pour trouver la solution à celle du 3^{ième} degré $x^3+ax^2+bx+c = 0$.

La solution s'appuyait sur la possibilité de trouver une équation du 2^{ième} degré, dite résolvante, qu'on savait résoudre.

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral (compléments)

En posant $y = x+a/3$, on obtenait $y^3+py+q = 0$ et avec $y = u+v$, on se ramenait à une équation du deuxième degré pour déterminer u et v et, en conséquence, y .

Celle du quatrième degré qu'on pouvait mettre sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ fut résolue un peu plus tard par une méthode similaire car son groupe des permutations des racines (a,b,c,d) comportait un sous-groupe distingué, le sous groupe de Klein, permettant de trouver une équation résolvante de degré inférieur.

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral (compléments)

Ainsi par récurrence on pensait, par cette méthode, résoudre toutes les équations algébriques de degré quelconque. Mais l'équation du 5^{ième} degré résista à toutes les tentatives de résolution par cette méthode et c'est E. Galois qui a montré pourquoi.

Le groupe de symétrie des racines de l'équation du 5^{ième} degré, a contrario de ceux associés aux équations de degré inférieurs, ne comportait pas de sous-groupe distingué, ce qui était nécessaire pour que la méthode fonctionne!

Groupe $SO(3)$ et $SU(2)$

- Pour passer des groupes finis aux groupes continus, comme celui des rotations, on ne peut pas transposer directement, en général, ce qui a été établi.
- Nous nous intéresserons aux groupes continus compacts, comme les rotations, où les paramètres du groupe varient dans un domaine limité par deux bornes finies, à la différence du groupe des translations, par exemple, où le paramètre peut prendre une valeur infinie.
- Ces groupes sont les plus proches des groupes finis, où presque tout se transpose.
- Définissons sur quoi ces groupes s'appliquent.

Rotations passives : rotation de la base de référence

- En géométrie analytique, définissons une base de 3 vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, linéairement indépendants orthonormés. Un vecteur \mathbf{V} de composantes V_1, V_2, V_3 , est défini par: $\mathbf{V} = V_1\mathbf{e}_1 + V_2\mathbf{e}_2 + V_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i \mathbf{e}_i$
- Par une rotation d'angle θ de la base, d'axe \mathbf{e}_3 , la base devient $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, ($\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$), et les coordonnées de \mathbf{V} , deviennent V'_1, V'_2, V'_3 , ($V'_3 = V_3$).
- \mathbf{V} étant inchangé: $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i \mathbf{e}_i = \sum_{i'=1}^3 V'_{i'} \mathbf{e}'_{i'}$, alors

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

Pour θ très petit noté $\delta\theta$

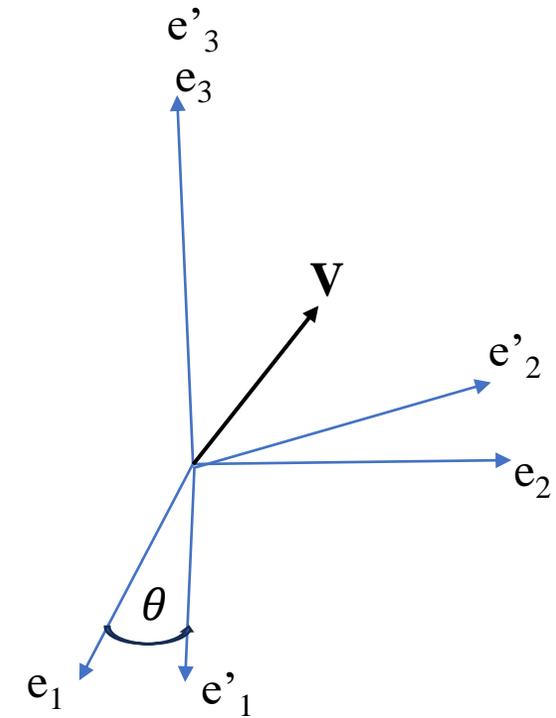
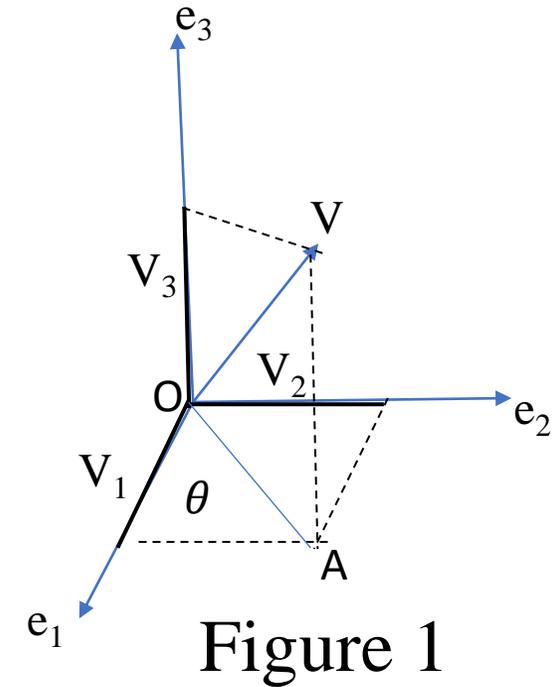


Figure 1, rotation passive du système d'axes

Rotation active du vecteur \mathbf{V} : la base inchangée

- Soit la base de 3 vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ fixes et le vecteur $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i \mathbf{e}_i$, (composantes V_i). Par une rotation infinitésimale $\delta\theta$ d'axe \mathbf{e}_3 , du vecteur \mathbf{V} , θ devient $\theta' = \theta + \delta\theta$. Si $OA = 1 \rightarrow V_1 = \cos \theta, V_2 = \sin \theta$, cf fig.1
- $V'_1 = \cos(\theta + \delta\theta) = \cos(\theta)\cos(\delta\theta) - \sin(\theta)\sin(\delta\theta)^{[*]} = \cos(\theta) - \sin(\theta)\delta\theta$, car $\cos(\delta\theta) \approx 1$ et $\sin(\delta\theta) \approx \delta\theta$
- $V'_2 = \sin(\theta + \delta\theta) = \sin(\theta)\cos(\delta\theta) + \cos(\theta)\sin(\delta\theta) = \sin(\theta) + \cos(\theta)\delta\theta$. Alors:
- $\delta V_1 = V'_1 - V_1 = -\sin(\theta)\delta\theta, \delta V_2 = V'_2 - V_2 = \cos(\theta)\delta\theta$
- Ici, on traite les composantes, pas les vecteurs de base (signe de θ , car les matrices de rotation sont inverses)



^[*] $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \sin(a+b) = \cos(a).\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$

Matrices définissant la rotation

- On considère les rotations infinitésimales. Comme on peut définir n'importe quelle rotation en les enchainant, elles doivent contenir toute l'information que nous recherchons. Comme au niveau infinitésimal, $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$ et $\cos \delta\theta \approx 1$, La matrice de rotation R de $\delta\theta$ autour de l'axe défini par \mathbf{e}_3 va s'écrire:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\delta V_i = V'_i - V_i$, où V_i ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes du vecteur \mathbf{V} dans la base définie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ avant rotation et V'_i les composantes après, on trouve:

$$\begin{vmatrix} \delta V_1 \\ \delta V_2 \\ \delta V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}$$

Si on définit $J_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Alors on a : $\delta V_i = i \cdot \delta\theta \sum_{j=1}^{j=3} (J_3)_{ij} V_j$

Matrices définissant la rotation

- Pour les autres axes de rotations, avec les valeurs de J_1 et J_2 on a la même relation:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On peut vérifier qu'en enchaînant des rotations infinitésimales $\delta\theta = \theta/N$ avec N tendant vers l'infini on retrouve bien, par exemple par le développement en série des fonctions trigonométriques, la matrice R décrivant la relation classique pour une rotation de θ .

$$R = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

L'algèbre de Lie du groupe des rotations appelé $SO(3)$ est définie par:

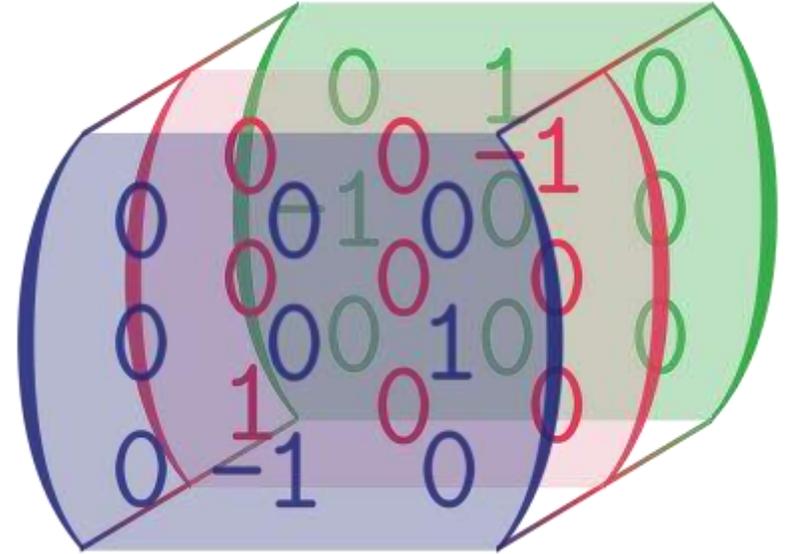
$$[J_i, J_j] = [J_i, J_j] - [J_j, J_i] = i \cdot \sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{ijk} J_k$$

- Les $i\epsilon_{ijk}$ sont les constantes de structure du groupe $SO(3)$. Vous pouvez vérifier avec $i=1$, $j=2$ et $k=3$ que les matrices J_1 , J_2 , J_3 satisfont l'équation ci-dessus.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita.

$$\epsilon_{ijk} =$$



L'algèbre de Lie est la relation la plus importante contenant l'information maximale concernant le groupe des rotations dans l'espace à 3 dimensions.

Elle va permettre d'aller au-delà du groupe qui nous a permis de la définir qui en est une représentation pour les vecteurs à trois dimensions, appelée $SO(3)$

Groupe $SO(3)$

S = Spécial: Déterminant $(R) = 1$

O = Orthogonal ${}^tR = R^{-1}$

3 = Matrice de dimension 3

Vous pouvez vérifier ces relations avec la matrice R associée à une rotation d'angle θ , autour de l'axe Oz , voir page 37.

Les matrices J_i sont appelés les générateurs infinitésimaux du groupe des rotations spatiales. Les relations de commutation entre ces générateurs forment l'algèbre de Lie du groupe.

Les représentations de l'algèbre de Lie

Dans un espace tridimensionnel les objets qui se transforment lors d'une rotation par les matrices de $SO(3)$ sont appelés des vecteurs; $SO(3)$ est la représentation vectorielle du groupe des rotations d'un espace à 3 dimensions.

Un vecteur pour un physicien est plus qu'un élément d'un espace vectoriel, caractérisée par une structure linéaire, c'est un objet qui engendre la représentation $SO(3)$ du groupe des rotations.

Sa nature est révélée par la manière dont il se transforme, ce qui n'est ni évident ni trivial, a priori.

On va rechercher d'autres représentations de cette algèbre de Lie. Comme la représentation de dimension 1 est triviale nous l'ignorerons.

Représentation de dimension 2, le groupe SU(2)

- Il existe un ensemble de matrices 2 x2 qui satisfont à la l'algèbre de Lie que nous avons définie à partir des rotations dans l'espace tridimensionnel.

$$\sigma_1/2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_2/2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_3/2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- Elles constituent une représentation de dimension 2 de cette algèbre de Lie.
- Elles sont notées $\sigma_1/2, \sigma_2/2, \sigma_3/2$.
- En effet on a : $\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \cdot \sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$
- Les matrices U de la représentation sont:

$$U(\boldsymbol{\theta}) = e^{i \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} = \begin{vmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i \cdot n_z \sin \frac{\theta}{2} & (i \cdot n_x + n_y) \sin \frac{\theta}{2} \\ (i \cdot n_x - n_y) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - i \cdot n_z \sin \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

- Le vecteur \mathbf{n} dont les composantes sont n_x, n_y, n_z est l'axe de la rotation qui peut être quelconque. Quand ils sont des vecteurs ($\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}$) sont notés en caractères gras

Représentation de dimension 2 du groupe des rotations, SU(2), spineurs

- L'ensemble de ces matrices U constituent le groupe SU(2).
- S \rightarrow Spécial: déterminant des matrices = +1
- U \rightarrow Unitaire $U^\dagger = U^{-1}$, la matrice adjointe est égale à la matrice inverse
- 2 \rightarrow Matrices 2 x 2, (vous pouvez vérifier ces relations).
- Une **matrice adjointe** (aussi appelée **matrice transconjuguée**) d'une matrice M à coefficients complexes est la matrice **transposée** (échange des ligne et des colonnes) de la matrice **conjuguée** ($a \rightarrow a^*$) de M . Dans le cas particulier où M est à coefficients réels, sa matrice adjointe est donc simplement sa matrice transposée.
- On appelle spineurs les objets à 2 composantes qui engendrent la représentation SU(2) du groupe des rotations.
- Ainsi:

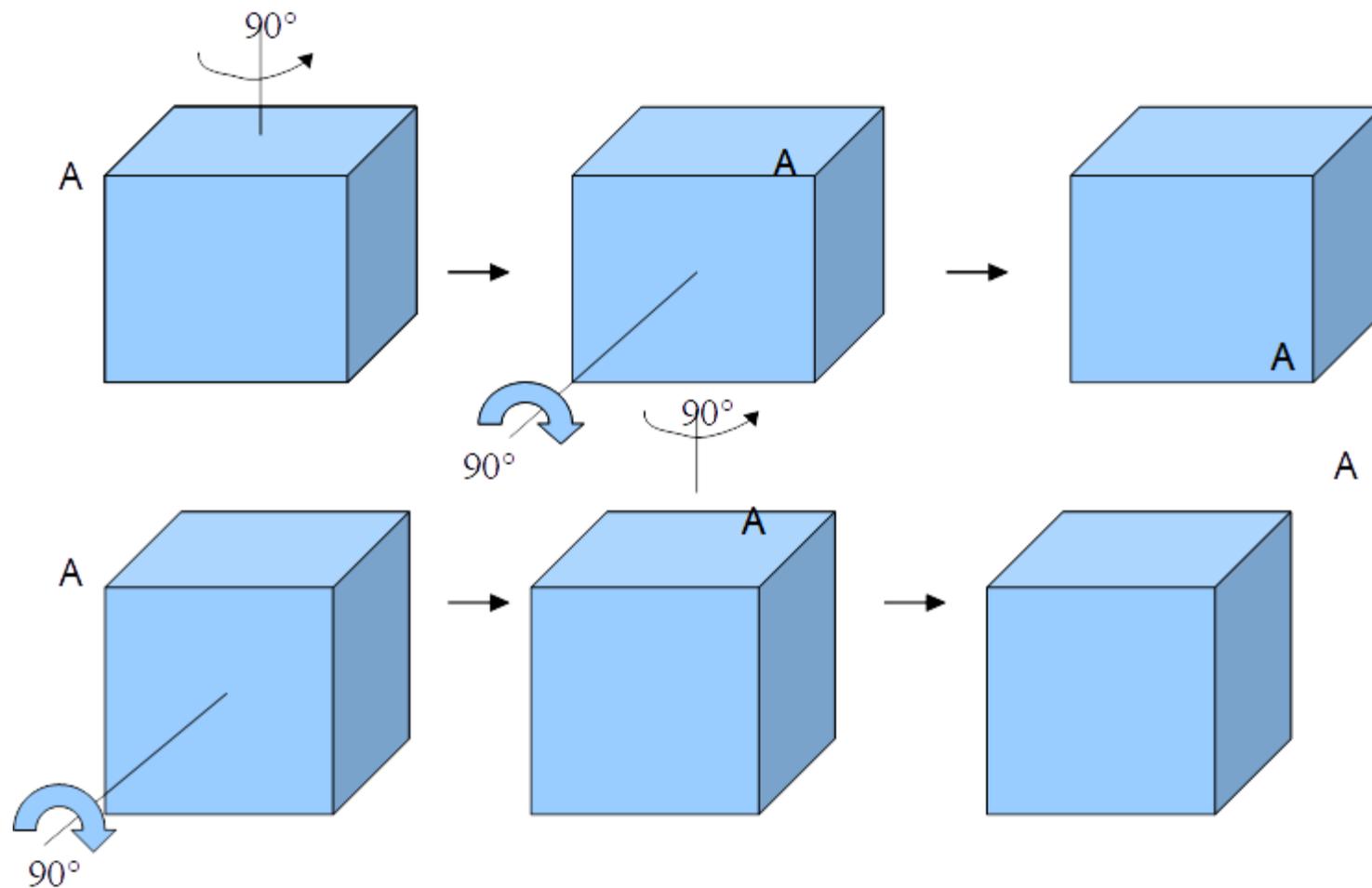
- $$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Représentation de dimension 2 du groupe des rotations, SU(2), spineurs

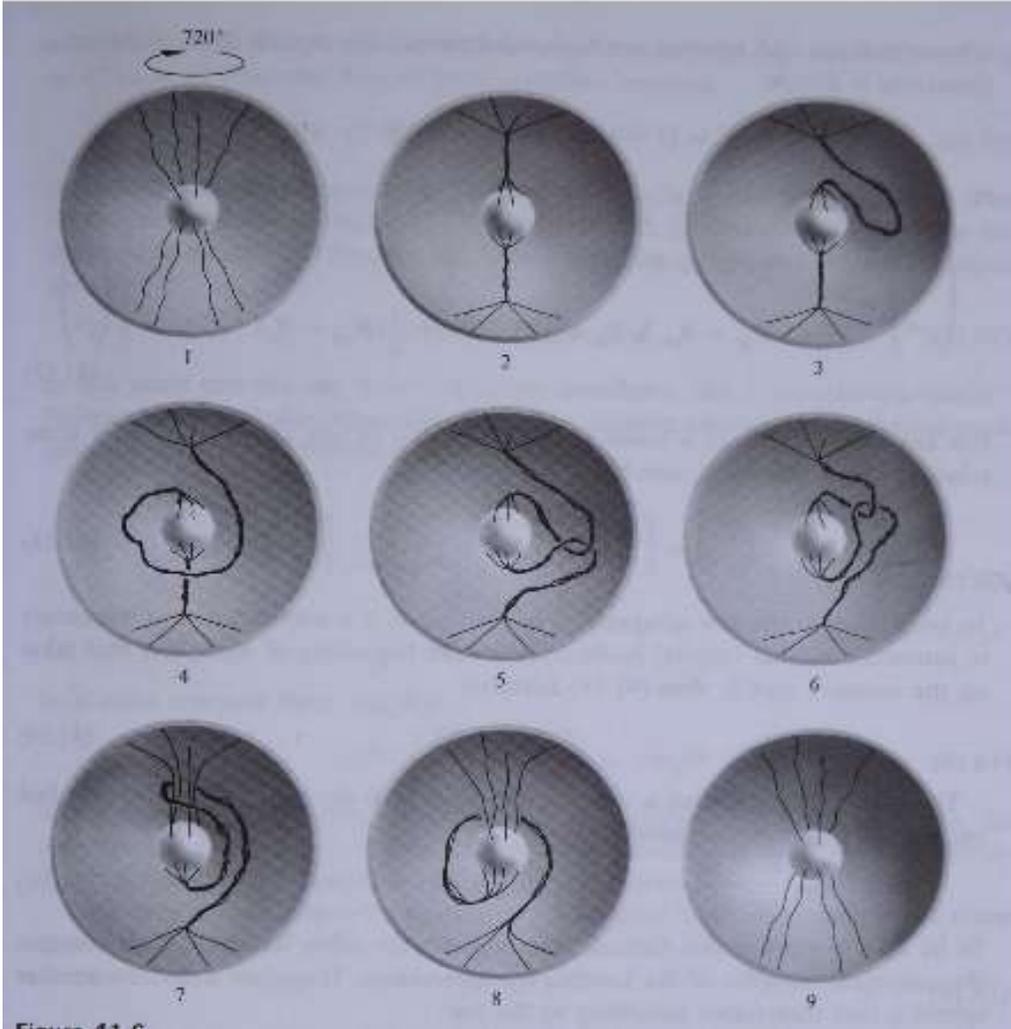
- Notons que θ en gras est un vecteur orienté et colinéaire de l'axe de rotation.
- Dans le groupe SU(2), l'argument angulaire des matrices U n'est pas θ mais $\theta/2$. Une rotation de 4π et non pas de 2π , comme dans SO(3), est donc nécessaire pour revenir à l'état initial.
- Comme pour les vecteurs, le caractère spinoriel d'un doublet est révélé par les rotations.
- Ce groupe SU(2) sera celui qui supportera l'interaction faible, ce qui implique que cette interaction faible est invariante de jauge par toutes les rotations spatiales.

Annexe 1: Illustration du groupe $SU(2)$

La non commutativité des rotations spatiales



Rotations spatiales et spineurs



La sphère centrale est attachée à une cavité par huit élastiques, (le nombre huit est un exemple, il n'a pas d'importance). Ces liens sont bien séparés au départ comme la première image de la figure le montre. On applique à la sphère centrale une rotation de 720° (4π radians). Ce faisant, on est passé par 360° (un tour où les brins étaient déjà emmêlés) mais on a continué dans le même sens de rotation pour réaliser un deuxième tour ce qui procure un emmêlement 2 fois plus grand en apparence. En maintenant la boule centrale fixe, on réalise les opérations décrites sur la figure qui permettent de démêler les liens élastiques. On démontre que si on s'était limité à un tour (rotation de 360°), il n'aurait pas été possible de démêler les liens en maintenant la sphère centrale fixe. Ceci atteste que c'est bien le groupe $SU(2)$, de période 4π radians qui est le groupe physique des rotations dans l'espace.

Cité dans « Gravitation , éditeur Freeman» de Charles W. Misner, Kip S. Thorne et John Archibald Wheeler, p. 1149.

Nota: Je n'ai pas fait l'opération, si quelqu'un a une maquette qui permet de la faire, je suis intéressé.