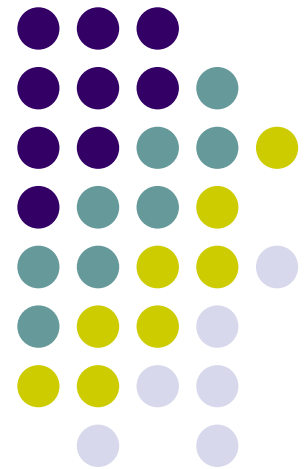


Les Trous noirs de la famille de Kerr

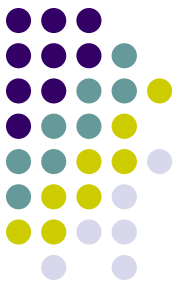
Vous avez dit « Rotation »?

Pas si simple!

La phénoménologie incroyable des trous noirs de la famille de Kerr.



Masse en rotation ?

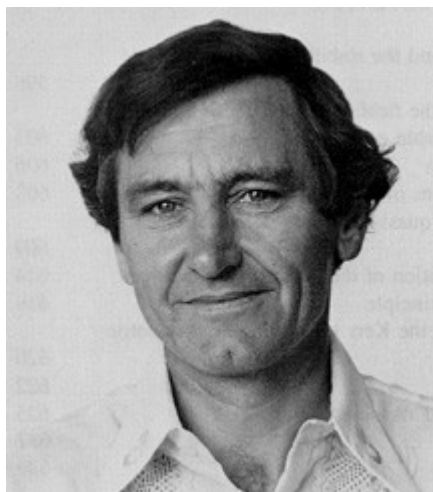


- Une solution de la RG est un univers.
- Comment définir la rotation d'un univers?
- Pas par rapport à un autre, car une solution de la RG définit un univers et un seul!
- Rotation « intrinsèque » qui se traduit par certaines caractéristiques structurelles propres
- Convergence en champ faible avec le concept classique de rotation dans un espace de fond. Solution « post Newtonienne » trouvée dès 1918 (Thirring), mais la solution globale a résisté 45 ans du fait de cette approche!!!

1963: Kerr trouve une solution



De son propre aveu, Kerr n'avait pas réalisé l'importance de ses travaux à ce moment-là, comme en témoigne l'article qu'il publie, très court (une page et demi), et se concentrant uniquement sur des aspects purement mathématiques



GRAVITATIONAL FIELD OF A SPINNING MASS AS AN EXAMPLE OF ALGEBRAICALLY SPECIAL METRICS

Roy P. Kerr*

University of Texas, Austin, Texas and Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio
(Received 26 July 1963)

Goldberg and Sachs¹ have proved that the algebraically special solutions of Einstein's empty-space field equations are characterized by the existence of a geodesic and shear-free ray congruence, k_μ . Among these spaces are the plane-fronted waves and the Robinson-Trautman metrics² for which the congruence has nonvanishing divergence, but is hypersurface orthogonal.

In this note we shall present the class of solutions for which the congruence is diverging, and is not necessarily hypersurface orthogonal. The only previously known example of the general case is the Newman, Unti, and Tamburino metrics,³ which is of Petrov Type D, and possesses a four-dimensional group of isometries.

If we introduce a complex null tetrad (t^* is the complex conjugate of t), with

$$ds^2 = 2tt^* + 2mk,$$

then the coordinate system may be chosen so that

$$t = P(r + i\Delta)d\zeta,$$

$$k = du + 2 \operatorname{Re}(\Omega d\zeta),$$

$$m = dr - 2 \operatorname{Re}\left\{[(r - i\Delta)\dot{\Omega} + iD\Delta]d\zeta\right\} + \left\{r\dot{P}/P + \operatorname{Re}\left[P^{-2}D(D^* \ln P + \dot{\Omega}^*)\right] + \frac{m_1 r - m_2 \Delta}{r^2 + \Delta^2}\right\}k; \quad (1)$$

where ζ is a complex coordinate, a dot denotes differentiation with respect to u , and the operator D is defined by

$$D = \partial/\partial\zeta - \Omega\partial/\partial u.$$

P is real, whereas Ω and m (which is defined to be $m_1 + im_2$) are complex. They are all independent of the coordinate r . Δ is defined by

$$\Delta = \operatorname{Im}(P^{-2}D^*\Omega).$$

There are two natural choices that can be made for the coordinate system. Either (A) P can be chosen to be unity, in which case Ω is complex, or (B) Ω can be taken pure imaginary, with P different from unity. In case (A), the field equations are

$$(m - D^*D^*D\Omega) = \left|\frac{\partial}{\partial u} D\Omega\right|^2, \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}(m - D^*D^*D\Omega) = 0, \quad (3)$$

$$D^*m = 3m\dot{\Omega}. \quad (4)$$

The second coordinate system is probably better, but it gives more complicated field equations.

It will be observed that if m is zero then the field equations are integrable. These spaces correspond to the Type-III and null spaces with

1963: Kerr trouve une solution



nonzero divergence. If $m \neq 0$, then there are certain integrability conditions which must be satisfied by Eqs. (2)-(4). These may be solved for m as a function of Ω and its derivatives provided that either $\dot{\Delta}$ or $\dot{\Omega}$ is nonzero. This expression for m may then be substituted back into the field equations giving conditions on Ω and its derivatives, from which further integrability conditions are extracted.

If both $\dot{\Delta}$ and $\dot{\Omega}$ are zero, then we may transform the metric to a coordinate system in which Ω is pure imaginary and $P \neq 1$, with $\dot{\Omega} = \dot{P} = 0$. The field equations then become

$$m = c\mu + A + iB,$$

where c is a real constant, and

$$P^{-2}\nabla[P^{-2}\nabla(\ln P)] = 2c, \quad \nabla = \partial^2/\partial\xi\partial\bar{\xi}^*.$$

A , B , and Ω , which are all independent of μ and \bar{r} , are determined by

$$iB = \frac{1}{2}P^{-2}\nabla(P^{-2}\partial\Omega/\partial\xi) - P^{-4}(\partial\Omega/\partial\xi)\nabla(\ln P),$$

$$\nabla B = ic\partial\Omega/\partial\xi,$$

$$(\partial/\partial\xi)(A - iB) = c\Omega,$$

where $\xi = \xi + i\eta$. If c is zero, then $\partial/\partial\mu$ is a Killing vector.

Among the solutions of these equations, there is one which is stationary ($c = 0$) and also is axially symmetric. Like the Schwarzschild metric, which it contains, it is Type D. Also, B is zero, and m is a real constant, the Schwarzschild mass. The metric is

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cos^2\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + 2(du + a \sin^2\theta d\phi) \\ \times (dr + a \sin^2\theta d\phi) - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right) \\ \times (du + a \sin^2\theta d\phi)^2,$$

where a is a real constant. This may be trans-

formed to an asymptotically flat coordinate system by the transformation

$$(r - ia)e^{i\phi} \sin\theta = x + iy, \quad r \cos\theta = z, \quad u = t + r,$$

the metric becoming

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2}(k)^2,$$

$$(r^2 + a^2)r k = r^2(xdy + ydy) + ar(xdy - ydx) \\ + (r^2 + a^2)(zdz + rdt). \quad (5)$$

This function r is defined by

$$r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so that asymptotically $r = R + O(R^{-1})$. In this coordinate system the solution is analytic everywhere, except at $R = a$, $z = 0$.

If we expand the metric in Eq. (5) as a power series in m and a , assuming m to be of order two and a of order one, and compare it with the third-order Einstein-Infeld-Hoffmann approximation for a spinning particle, we find that m is the Schwarzschild mass and ma the angular momentum about the z axis. It has no higher order multipole moments in this approximation. Since there is no invariant definition of the moments in the exact theory, one cannot say what they are, except that they are small. It would be desirable to calculate an interior solution to get more insight into this.

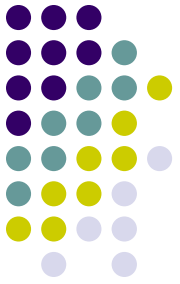
*Supported in part by U. S. Air Force through the Aerospace Research Laboratory of the Office of Aerospace Research.

¹J. N. Goldberg and R. K. Sachs, *Acta Phys. Polon.* **22**, 13 (1962).

²I. Robinson and A. Trautman, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A265**, 463 (1961).

³E. Newman, L. Tamburino, and T. Unti (to be published).

La présentation de Kerr (relatée par K. Thorne, Trous noirs et distorsions du temps, Champs/Fammarion)



362

Trous noirs et distorsions du temps

de l'implosion de l'étoile extrêmement massive pouvait être lui-même la source fournissant l'énergie du quasar, ne vint à personne en 1963. Les trous noirs étaient encore mal connus à l'époque, Wheeler n'avait pas encore forgé l'expression « trou noir » (chapitre V), Salpeter et Zeldovitch ne s'étaient pas encore rendu compte que du gaz tombant vers un trou noir pouvait chauffer et rayonner avec une grande efficacité (chapitre VIII), Penrose n'avait pas encore découvert qu'un trou noir peut stocker jusqu'à 29 % de sa masse sous forme d'énergie de rotation, et la libérer (chapitre VII), l'âge d'or de la recherche sur les trous noirs n'avait pas encore commencé.

L'idée que l'implosion d'une étoile pour former un trou noir puisse fournir l'énergie des quasars était une rupture radicale avec la tradition. C'était la première fois que les astronomes et les astrophysiciens avaient éprouvé le besoin de faire appel aux effets de la relativité générale pour expliquer un objet observé. Jusqu'ici, les relativistes avaient vécu dans un monde et les astronomes et les astrophysiciens dans un autre. Leur isolement mutuel était sur le point de se terminer.

Pour encourager le dialogue entre relativistes, astronomes et astrophysiciens, et pour catalyser le progrès dans l'étude des quasars, une conférence de trois cents scientifiques se tint du 16 au 18 décembre 1963 à Dallas, au Texas. Dans un discours d'après banquet à ce Premier Symposium du Texas sur l'astrophysique relativiste, Thomas Gold, de l'université de Cornell, décrivit la situation en ne plaisantant qu'à moitié : « [Le mystère des quasars] nous permet de suggérer que les relativistes et tout leur travail sophistiqué ne sont pas seulement de magnifiques ornements culturels mais pourraient être réellement utiles à la science ! Tout le monde est content : les relativistes, qui ont le sentiment d'être appréciés comme experts sur un sujet dont ils connaissaient à peine l'existence, les astrophysiciens, parce qu'ils ont agrandi leur domaine, leur empire, en annexant un nouveau sujet, la relativité générale. Tout cela est très agréable, aussi souhaitons-nous que ce soit aussi la bonne voie. Comme ce serait dommage si nous devions de nouveau renvoyer les relativistes à leurs chères études ! »

Les exposés se succédaient presque sans interruption de 8 heures et demie du matin à 6 heures du soir, avec une heure pour déjeuner. Puis, de 6 heures du soir jusqu'à souvent 2 heures du matin, avaient lieu des discussions et des débats informels. Au milieu de ces exposés s'était glissée une courte présentation de

Découvertes inattendues

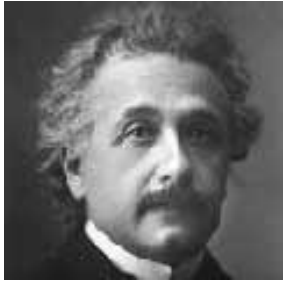
363

dix minutes par un jeune mathématicien néo-zélandais, Roy Kerr, inconnu des autres participants. Kerr venait de trouver sa solution des équations de champ d'Einstein, celle qui devait, une décennie plus tard, décrire toutes les propriétés d'un trou noir en rotation, y compris leur capacité de stocker et de libérer de l'énergie de rotation, la solution qui se révélerait finalement, comme nous le verrons plus loin, fondamentale pour expliquer l'énergie des quasars. En 1963, cependant, la solution de Kerr ne semblait à la plupart des scientifiques être rien d'autre qu'une curiosité mathématique. Personne ne comprenait même qu'elle décrivait un trou noir, bien que Kerr spéculât qu'elle pouvait d'une certaine manière aider à comprendre l'effondrement des étoiles en rotation.

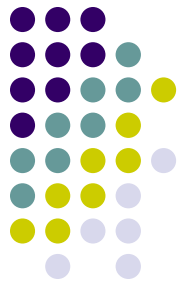
Les astronomes et les astrophysiciens étaient venus à Dallas pour parler de quasars, ils n'étaient pas du tout intéressés par le sujet mathématique ésotérique exposé par Kerr. Aussi, quand Kerr se leva pour parler, beaucoup d'entre eux sortirent de la salle de conférences pour aller au foyer discuter entre eux de leurs théories favorites des quasars. D'autres, moins polis, restèrent assis mais discutèrent à voix basse. Beaucoup d'autres s'assoupirent dans un vain effort pour rattraper le déficit de sommeil dû aux soirées tardives passées à discuter science. Seuls une poignée de relativistes écoutaient, captivés.

C'en était trop pour Achille Papapetrou, l'un des meilleurs relativistes mondiaux. Quand Kerr eut terminé, Papapetrou demanda la parole et se leva pour expliquer avec passion l'importance de l'avancée de Kerr. Lui-même, comme beaucoup d'autres relativistes, avait cherché pendant trente ans une solution de ce type, en vain. Les astronomes et astrophysiciens acquiescèrent poliment et, comme l'orateur suivant commençait à exposer une théorie sur les quasars, ils concentrèrent de nouveau leur attention et la réunion reprit son cours normal.

Les années 60 marquèrent un tournant dans l'étude des radio-sources. Jusque-là, elle était totalement dominée par les observateurs, c'est-à-dire les astronomes optiques et les physiciens expérimentateurs observant en ondes radio, maintenant intégrés à la communauté astronomique sous le nom de *radioastronomes*. La contribution des astrophysiciens théoriciens avait au contraire été moindre, parce que les observations n'étaient pas assez détaillées pour les guider efficacement dans la construction de théories. Leur seul apport avait été de comprendre que les ondes radio étaient produites par des électrons rapides tournant en spirale dans des

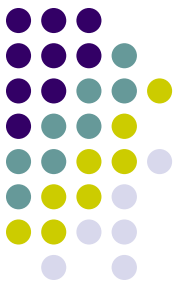


Résumé des épisodes précédents.



- Fin 1915: Einstein publie ses équations en deux temps: Une version préliminaire limitée à $g = -1$ puis deux semaines après une version covariante générale.
- 1916: Schwarzschild partant de la version préliminaire des équations publie sa solution qui est limitée à l'extérieur de l'horizon.
- 1916: Son extension que nous appelons la solution de Schwarzschild est en fait due à Droste, un élève de Lorentz!

Haro sur les trous noirs !



- La singularité sur l'horizon pose bien des problèmes aux tenants de cette nouvelle théorie. Le monde scientifique est sceptique!
- En 1921, Paul Painlevé au nom de l'Académie des sciences sonne la charge le premier. Il dénonce:
 - « Les doctrines d'Einstein se réduiront à un corps de formules, qui sans la contredire se fondera dans la science classique. Mais les principes ou conséquences philosophico-scientifiques qui ont été selon les jugements, le miracle ou le scandale de la théorie de la relativité » ne subsisteront pas.
- Mais, sans s'en apercevoir, Painlevé établit la première forme de cette métrique sans singularité sur l'horizon, ce qui au lieu d'enfoncer la théorie la dédouane de cette « horreur »!



L'article de Painlevé



ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 OCTOBRE 1921.

PRÉSIDENTE DE M. Georges LEMOINE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *La Mécanique classique et la théorie de la relativité.*
Note de M. PAUL PAINLEVÉ.

Je voudrais exposer brièvement à l'Académie certaines conclusions d'une étude critique de la théorie de la relativité que je publierai prochainement et où je compare les postulats de la théorie de la relativité (restreinte et généralisée) aux postulats de la mécanique newtonienne. J'y discute notamment la question de savoir s'il existe ou non *des axes privilégiés* parmi tous les modes de référence possibles. La mécanique newtonienne repose tout entière sur cet axiome, qu'on peut appeler *l'axiome de causalité* en mécanique :

« Il est possible, une fois pour toutes, et pour tout l'univers, de définir une mesure des longueurs, du temps, et un trièdre de référence tels que le principe de causalité soit vrai toujours et partout. »

Autrement dit, considérons un système matériel dont chaque élément reste identique à soi-même, et qui est très éloigné de tous les autres corps matériels; si les conditions initiales (positions et vitesses des éléments à l'instant considéré t_0) se reproduisent transportées seulement dans l'espace et le temps, le même mouvement se reproduit, au même transport près, dans l'espace et le temps.

Une première conséquence, c'est que les lois du mouvement du système ne dépendront pas explicitement du temps.

Une seconde conséquence, c'est *l'axiome de la symétrie* (corollaire de l'axiome de causalité). Si les conditions initiales présentent une symétrie

C. B., 1921, 2^e Semestre. (T. 173, N° 17.)

53

678

ACADÉMIE DES SCIENCES.

quelconque (par rapport à un plan, un axe ou un point), la même symétrie persistera dans le mouvement.

Cet axiome de la symétrie entraîne le principe de Képler ou de l'inertie et une foule d'autres conséquences capitales.

Si ces propriétés sont vraies quand on a adopté un repérage *espace-temps convenable*, elles ne le sont plus quand on lui substitue un repérage arbitraire. Sous sa forme positive, le postulat fondamental de la doctrine newtonienne, c'est qu'un tel repérage existe effectivement. Pour les newtoniens, il correspond à une mesure du temps, des longueurs et des mouvements absolus. Bornons-nous à l'appeler *repérage privilégié*.

L'expérience a montré, par un prodigieux ensemble de vérifications, aussi précises que le comportent nos mesures actuelles, qu'il existe effectivement un repérage *espace-temps* possédant à la fois toutes les propriétés attribuées *a priori* par les newtoniens au repérage absolu. Aucun autre repérage ne répond à ces axiomes, sauf ceux qui se déduisent du premier par la substitution aux axes de nouveaux axes animés relativement aux premiers d'une translation rectiligne et uniforme; les axes privilégiés sont ainsi définis à une translation rectiligne et uniforme près.

Les doctrines d'Einstein, dont j'admire profondément l'audace de pensée et la puissance constructive, conduiront-elles à abandonner définitivement le postulat fondamental de la mécanique newtonienne? Je crois au contraire qu'il subsistera de ces doctrines un corps de formules qui sans la contredire se fondera dans la science classique, mais que ne subsisteront pas les principes ou conséquences philosophico-scientifiques qui ont été, suivant les jugements, le scandale ou le miracle de la théorie de la relativité.

Lorsqu'on analyse les postulats et raisonnements qui ont conduit Einstein à ses résultats positifs (1), on voit combien ils sont imprégnés de « newtonisme ».

Insistons notamment sur la formule explicite de la gravitation dans le cas d'un centre unique (2). C'est la célèbre formule qui a donné lieu aux deux vérifications éclatantes : mouvement du périhélie de Mercure, déviation d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil.

Rapportons le mouvement de l'élément gravitant à des axes $Oxyz$ ayant

(1) Cette analyse sera développée dans une Note prochaine.

(2) Cette remarque a déjà été faite par plusieurs auteurs, notamment par M. Le Roux, dans d'intéressantes Communications (*Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1227, 1467).

SÉANCE DU 24 OCTOBRE 1921.

679

le centre matériel comme origine O. Pour un newtonien, si ces axes sont des axes absolus, les équations différentielles du mouvement doivent être indépendantes du temps et symétriques autour du centre O; mais si le centre O est animé d'un mouvement absolu varié, ou si les axes tournent par rapport aux étoiles, il n'en est plus ainsi. Or, pour arriver à leur loi explicite de gravitation, les einsteiniens doivent admettre *a priori* que, le temps t et les coordonnées polaires r, θ, φ étant mesurées à la manière ordinaire, leur formule fondamentale doit ne pas dépendre explicitement du temps et doit être dissymétrique par rapport à r, θ, φ autour de l'origine. Or cette hypothèse n'est vraie que si les axes $Oxyz$ sont des axes privilégiés au sens newtonien et présuppose par conséquent l'existence de tels axes. Cette hypothèse admise, les einsteiniens parviennent au ds^2 (à quatre variables) aujourd'hui célèbre, dont les géodésiques définissent dans leur théorie le mouvement du point gravitant, à savoir

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{E dt^2}{1 - \frac{a}{r}},$$

a désignant une constante arbitraire que déterminera la masse du centre matériel O.

Mais ce ds^2 n'est pas le seul qui réponde à toutes les conditions einsteiniennes. Il en est une infinité d'autres dépendant de deux fonctions de r et le choix de la formule (1) entre toutes ces formules est purement arbitraire. Parmi ces formules il en est d'aussi simples que la formule (1) et qui entraînent exactement les mêmes vérifications. Telle celle-ci :

$$(2) \quad ds^2 = dt^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) + 2 dr dt \sqrt{\frac{a}{r}} - dr^2,$$

avec

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

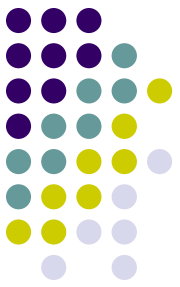
(ds^2 euclidien à trois dimensions).

Or on sait que pour les einsteiniens, le ds^2 a une signification mystique et universelle, contraignant tous les phénomènes à se couler dans une sorte de forme *espace-temps* comme l'eau dans un vase. D'une formule déduite de l'étude du mouvement des corps gravitants et de la propagation de la lumière, ils pensent déduire des conséquences relatives aux phénomènes immobiles ou quasi immobiles. C'est ainsi que de la formule (1) ils concluent :

1° Que les vibrations lumineuses d'un même atome doivent être plus

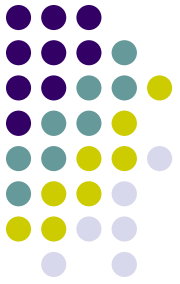


Et puis Lemaître est arrivé!



- En 1932 dans son article « l'Univers en expansion », Lemaître établit de façon magistrale une solution sans singularité sur l'horizon en considérant le trou noir comme un cas particulier d'univers en expansion!
- Il établit au passage la solution de Painlevé (qu'il ne connaissait pas) avec constante cosmologique en prime!
- Il va même plus loin puisque ces équations décrivent en fait la solution complète à 4 régions, ce que malheureusement il ne reconnaît pas!! Il faudra attendre encore 30 ans (Kruskal) pour cela!*
*(Synge l'a également établi en 1950, mais toujours sans en réaliser la portée)

L'article de Lemaître (1932)



— 172 —

PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE

D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

SECRÉTAIRE : M. G. LEMAÎTRE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Vol. IX (N^o 85 et 86)

1932



LOUVAIN
1933

L'Univers en expansion

par M. l'Abbé Lemaître (*)

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ

Nous ne nous proposons pas dans ce travail de discuter les hypothèses sur lesquelles se fonde la théorie de l'expansion de l'Univers, ni la valeur des confirmations astronomiques qui l'étayent. Une telle discussion nous paraît actuellement prématurée et ne pourrait certes pas arriver à des conclusions définitives dans l'état actuel de la théorie et des observations.

La théorie peut être développée de deux façons : par l'étude de solutions exactes des équations de la gravitation, fournissant des modèles simplifiés ou par le développement approché de la solution de problèmes plus complexes. Il nous paraît utile de ne pas mélanger ces deux méthodes, et de ce travail nous ne nous occuperons que de solutions mathématiquement exactes. Lorsque nous voudrions les appliquer aux problèmes réels, nous aurons à faire appel à l'intuition physique pour réduire un problème complexe à un modèle simplifié, dont nous avons la solution. Plusieurs de nos résultats semblent pouvoir servir de points de départ à des méthodes de développement en série que nous espérons traiter dans un travail ultérieur.

Dans les deux premiers paragraphes, nous donnons en détail les calculs de tenseurs, dont nous aurons besoin, et que nous résumons au § 3, introduisant des notations qui mettent en évidence l'analogie des résultats relativistes avec les formules classiques.

Nous introduisons ensuite la notion de champ quasi-statique qui permet de généraliser immédiatement des solutions statiques connues et permettant des variations adiabatiques. Nous donnons une solution probablement nouvelle pour le cas d'une sphère à pression radiale constante et nous en servons pour mettre en évidence le paradoxe de Schwarzschild et montrer que la limitation plus sévère du rayon d'une masse donnée introduite par la solution du problème intérieur s'évanouit lorsque

(*) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, T. LIII (1933), Série Sciences mathématiques, p. 51.

n'impose pas à la matière la condition d'être à l'état fluide. Nous décrivons une mise en charge de l'univers d'Einstein, supposé fluide où la masse propre de l'univers diminue sans que le volume varie, ni l'équilibre soit troublé.

Au § 6, nous résumons en les complétant des résultats obtenus dans notre thèse de doctorat (non publiée) présentée en 1927 au Massachusetts Institute of Technology et relatifs à une modification proposée par Eddington au problème intérieur de Schwarzschild.

Le § 7 est relatif à l'influence de la formation de condensations locales sur la rupture de l'équilibre d'un univers d'Einstein : nous retrouvons notre résultat (M. N. 91-1931-490) que la pression à la zone neutre est le facteur déterminant de la rupture d'équilibre en éliminant les complications techniques qui encombraient notre démonstration primitive.

Au § 8, nous étudions le développement de condensations sphériques dans l'univers en expansion, dans l'hypothèse où la pression est négligeable et retrouvons comme cas particulier l'univers de Friedmann.

Nous intégrons ensuite, § 9, l'équation de Friedmann par les fonctions elliptiques de Weierstrass et mettons les équations sous une forme adaptée aux calculs numériques.

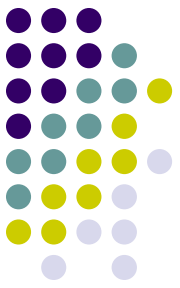
Au § 10, nous introduisons l'hypothèse que les amas de nébuleuses sont en équilibre. Cette hypothèse peut être vérifiée par l'observation, et le résultat est favorable. On obtient comme masse moyenne des nébuleuses 7×10^6 fois la masse du soleil et comme coefficient d'expansion de l'univers 13.

Nous indiquons comment cette nouvelle hypothèse pourrait donner une signification cosmique à la fréquence relative des amas et des nébuleuses isolées et lever ainsi l'indétermination qui subsiste dans la loi de l'expansion. Nous calculons ensuite dans diverses hypothèses, la durée de l'expansion et le rayon de l'univers.

L'hypothèse de l'équilibre des nébuleuses semble exclure le cas critique pour lequel le rayon d'équilibre dépasserait de beaucoup le milliard d'années de lumière. Nous établissons le résultat que dans ce cas critique la distance à l'instant d'équilibre des points les plus éloignés qui peuvent échanger de la lumière au cours de l'expansion est encore de quelques milliards d'années de lumière.

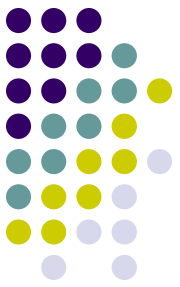
Au § 11, nous écartons une contradiction apparente entre la théorie de Friedmann et la solution du problème extérieur de Schwarzschild. D'après cette dernière, une masse telle que celle de l'univers ne pourrait avoir un rayon inférieur à un milliard d'années de lumière. Nous montrons que la singularité du problème extérieur de Schwarzschild est une singularité apparente due au fait que l'on a imposé une solution statique et qu'elle peut être éliminée par un changement de coordonnées.

Pourquoi la solution a été difficile à trouver?



- La structure des TN n'a été vraiment comprise que dans les années 60.
- Les méthodes utilisées avec succès précédemment ont échoué à décrire un TN «en rotation» pour la raison indiquée au début.
- Il a fallu attendre l'apparition de nouvelles méthodes plus formelles (Classification de Petrov, topologie).
- Les physiciens ont cédé la place aux mathématiciens en RG.

La classification de Petrov -1



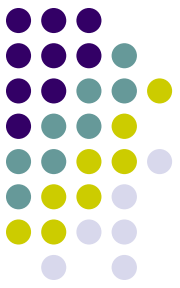
- Classer les types d'espace temps vides en RG
- Un espace temps vide est caractérisé par le tenseur de Weyl (tenseur conforme).
- Il faut donc déterminer les niveaux de symétrie de ce tenseur.
- Considéré comme un opérateur agissant sur des tenseurs d'ordre deux, cela revient à en déterminer le nombre de valeurs propres.
- On peut avoir de 1 à 4 valeurs propres différentes dont les combinaisons donnent:

La classification de Petrov -2

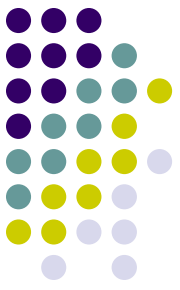


- **Type I** : Quatre directions principales nulles,
- ***Type II** : Une direction double et deux directions simples principales nulles,
- ***Type D** : Deux directions doubles nulles,
- ***Type III** : Une direction triple une direction simple principale nulles,
- ***Type N** : Une direction quadruple principale nulle,
- ***Type O** : Le tenseur de Weyl s'annule.
- Les types marqués d'une astérisque (*) sont dit « algébriquement spéciaux ».

Classification de Petrov -3



- Interprétation physique
- En Relativité Générale les différents types de Pétrov algébriquement spéciaux peuvent s'interpréter physiquement, la classification résultante étant quelquefois appelée la **classification des champs gravitationnels**.
- Les régions de **type D** sont associées aux champs gravitationnels d'objets massifs isolés, comme les étoiles. Plus précisément le type **D** est associé au champ gravitationnel d'un objet qui est complètement caractérisé par sa masse et son moment angulaire (Un objet plus général a des moments multipolaires d'ordre plus élevés non nuls). Les deux directions nulles principales définissent les congruences nulles radiales entrantes et sortantes près de l'objet qui est la source du champ.
- Le tenseur gravitoélectrique (tenseur de marée) dans une région de type **D** ressemble beaucoup à son cousin Newtonien décrit par un potentiel gravitationnel de type Coulombien. Un tel champ de marée se traduit par une élongation dans une direction et une compression dans les directions orthogonales, les valeurs propres ont le profil $(-2,1,1)$. Par exemple une capsule spatiale en orbite autour de la Terre subit une élongation radiale minuscule et une compression minuscule dans les directions orthogonales. Le champ de marée décroît en $\mathcal{O}(r^{-3})$, comme en mécanique Newtonienne où r est la distance à l'objet.



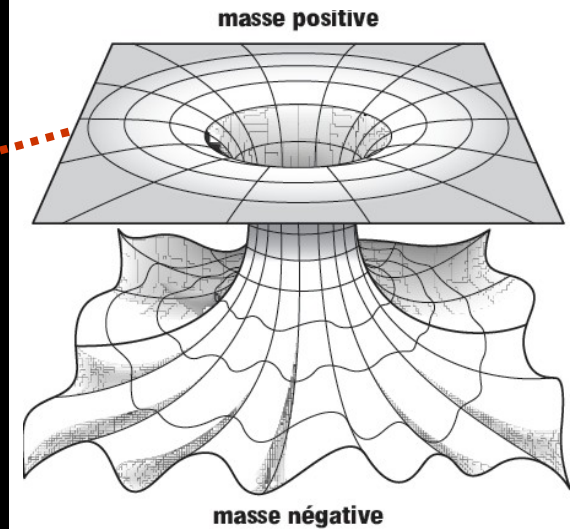
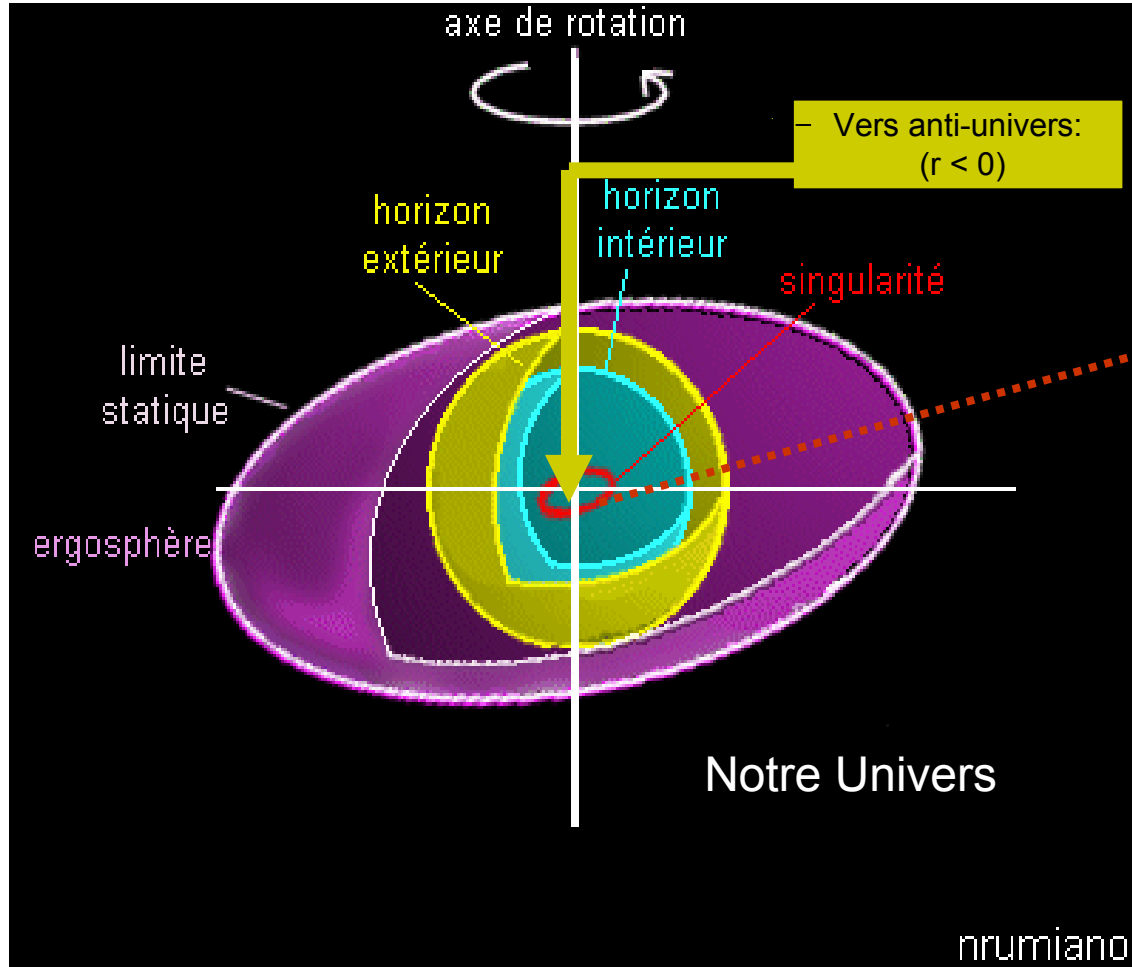
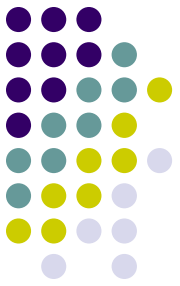
La solution de Kerr

- Kerr a effectué une recherche systématique de solutions dans le vide de type D de Petrov dont le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est la somme du tenseur d'espace plat $\eta_{\mu\nu}$ et du produit tensoriel d'un vecteur nul l_{μ} par lui même, donc une solution de la forme:

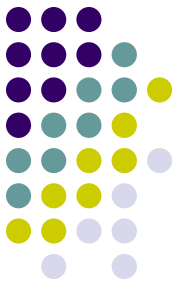
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + l_{\mu} l_{\nu}.$$

- C'est donc en utilisant les propriétés structurelles du tenseur de Weyl et en élargissant la recherche aux solutions où les hypersurfaces sont non orthogonales aux congruences (ce qui était original) que Kerr a trouvé sa solution stationnaire.

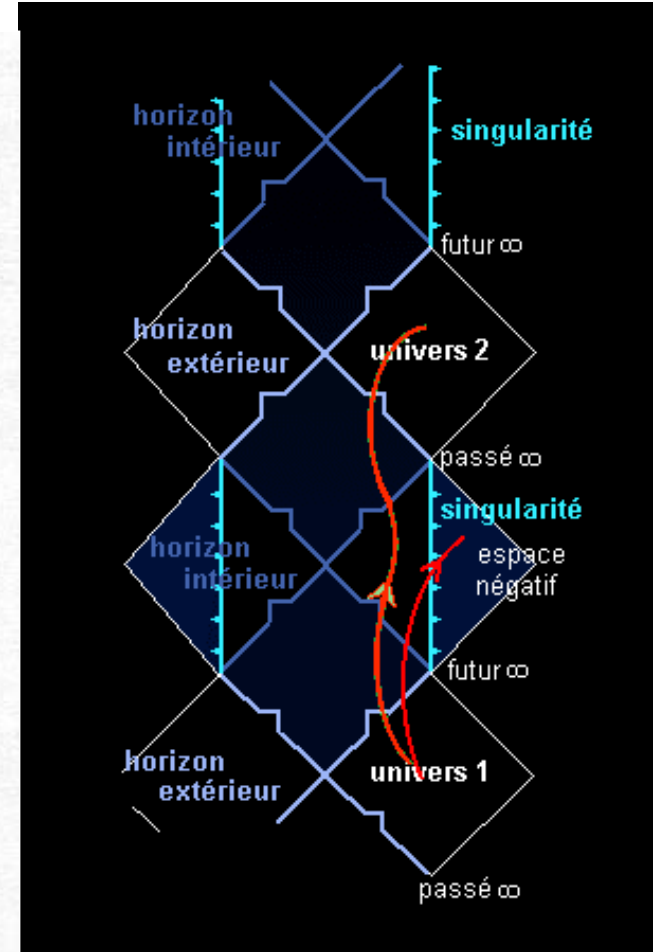
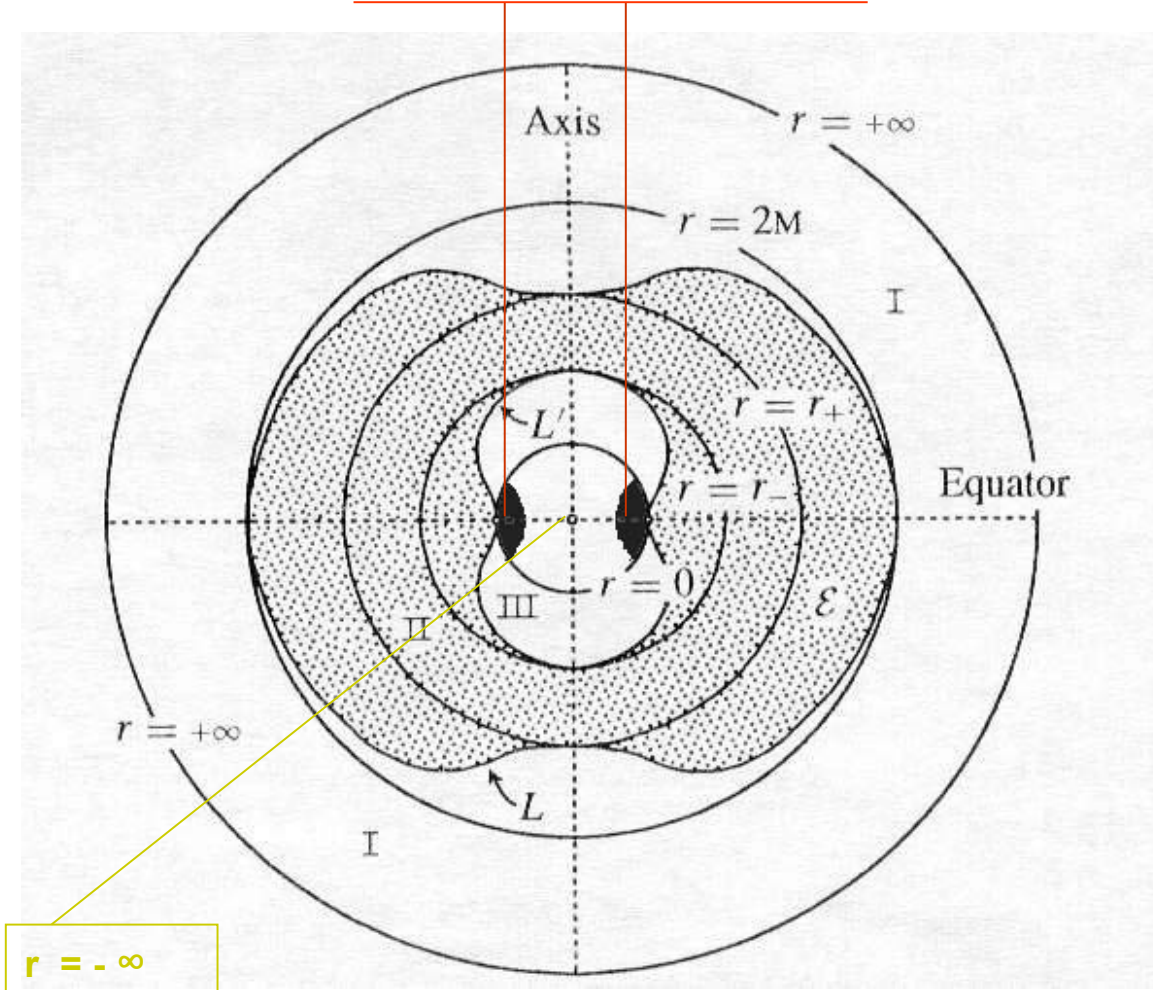
Représentation de la solution



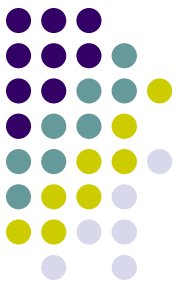
Régions et diagrammes du TN



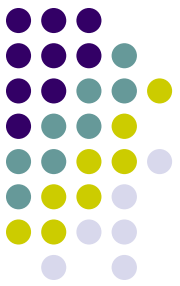
Tore de la machine temporelle



Les invariants de la solution



- Solution stationnaire: invariant dans le temps, l'énergie sur une géodésique est conservée. Vecteur de Killing K_{μ} .
- Solution à symétrie axiale: invariant par les rotations autour de l'axe de rotation, le moment angulaire est conservé sur une géodésique: Vecteur de Killing L_{μ} .
- Invariant métrique.
- Invariant « surprise » de B.Carter: Tenseur de Killing.



Symétrie des équations

- Symétrie évidente des équations (sauf pour e dans la métrique):
- Invariance par inversion $r/-r$ et $m/-m$ et $e/-e$ (produits $m.r$, et $e.r$, $e.dr$).

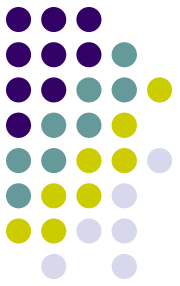
$$ds^2 = \rho^2 \Delta^{-1} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^{-2} \sin^2 \theta [a d\hat{t} - (r^2 + a^2) d\hat{\phi}]^2 - \rho^{-2} \Delta [d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi}]^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

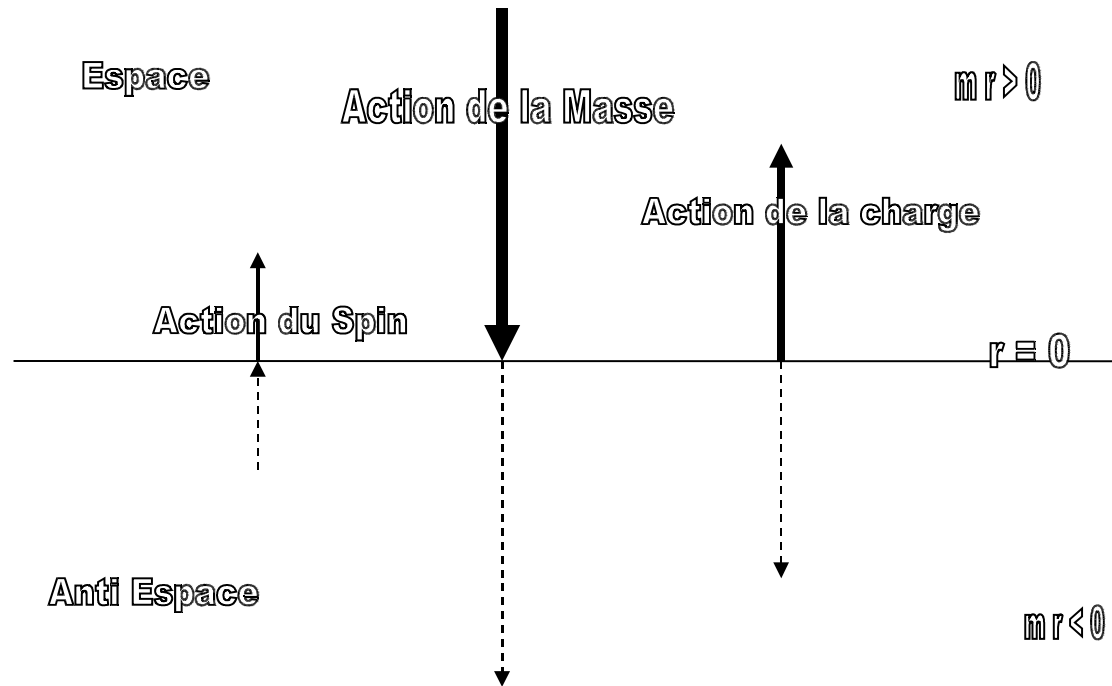
$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2$$

$$F = 2e\rho^{-4} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge [d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi}] - 4e\rho^{-4} ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [a d\hat{t} - (r^2 + a^2) d\hat{\phi}]$$

Equation géodésique axiale



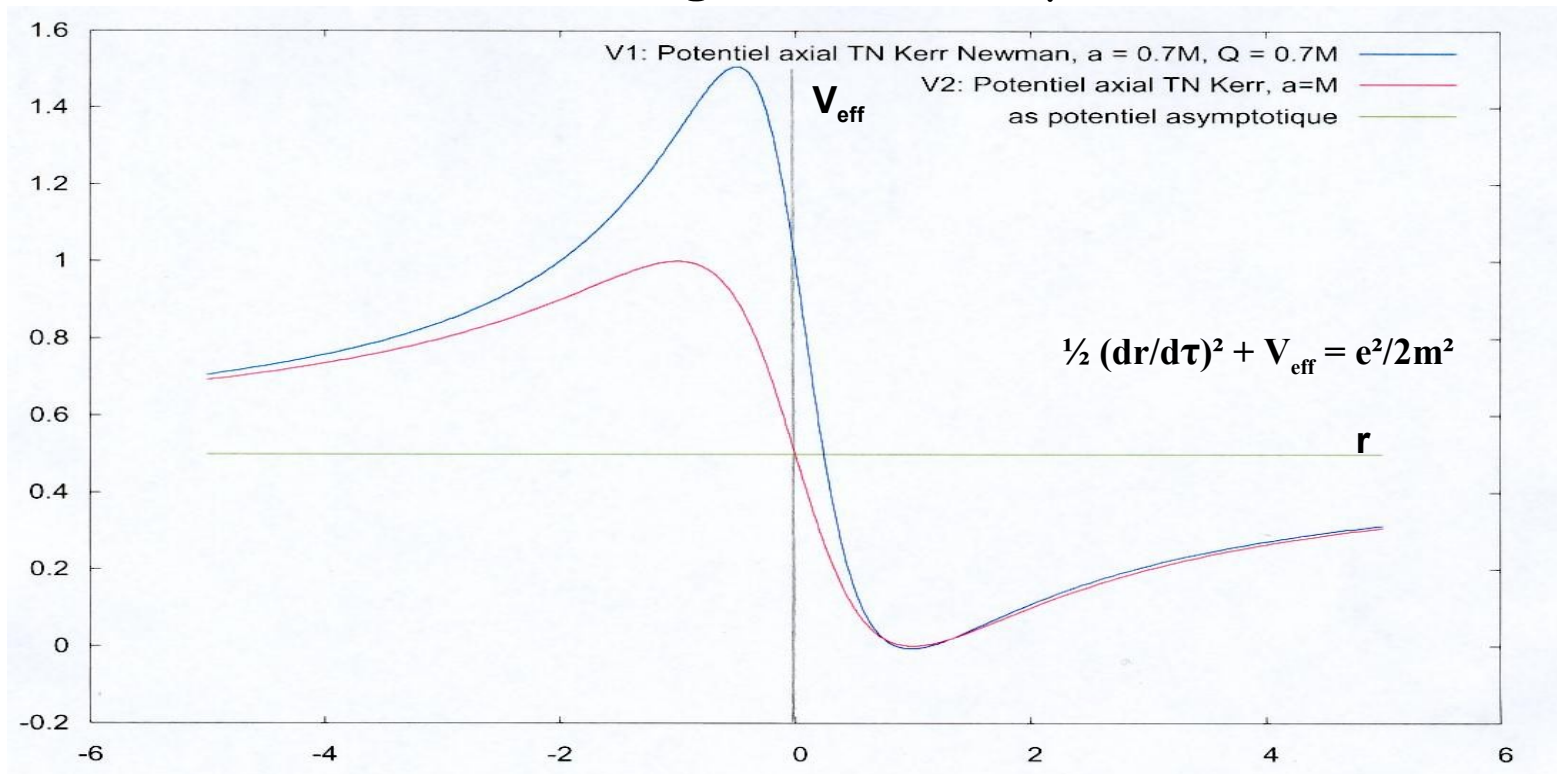
- L'équation géodésique sur l'axe (particule neutre):
- $$d^2 r/d\tau^2 = (-GMr^2 + c^2 e^2 r + GMa^2)/(r^2 + a^2)^2$$



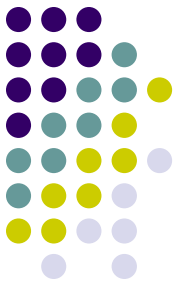
Equation géodésique axiale



- Potentiel sur l'axe de TN de Kerr(Newman). Barrière de potentiel énorme en général. Une particule lâchée à l'infini sans vitesse ni moment angulaire ne va pas traverser $r = 0$.

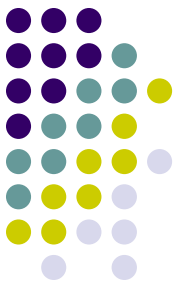


Symétrie univers/anti-univers



- Anti univers: la masse génère un champ gravitationnel asymptotiquement répulsif.
- Diversité d'interactions: paires, impaires, attractives, répulsives à courte et longue portée.
- Symétrie des interactions sur l'axe (sauf pour l'action de la charge sur une particule neutre).
- Dans l'univers sur l'axe, l'attraction (liée à la masse) est dominante à grande distance, la répulsion (liée à la rotation) à courte distance. Ceci est paradoxal car sur l'axe, on pourrait supposer que l'action de la rotation est nulle!
- Rappelons toutefois la dissymétrie phénoménologique univers/anti-univers (pas d'horizons dans l'anti-univers,..)

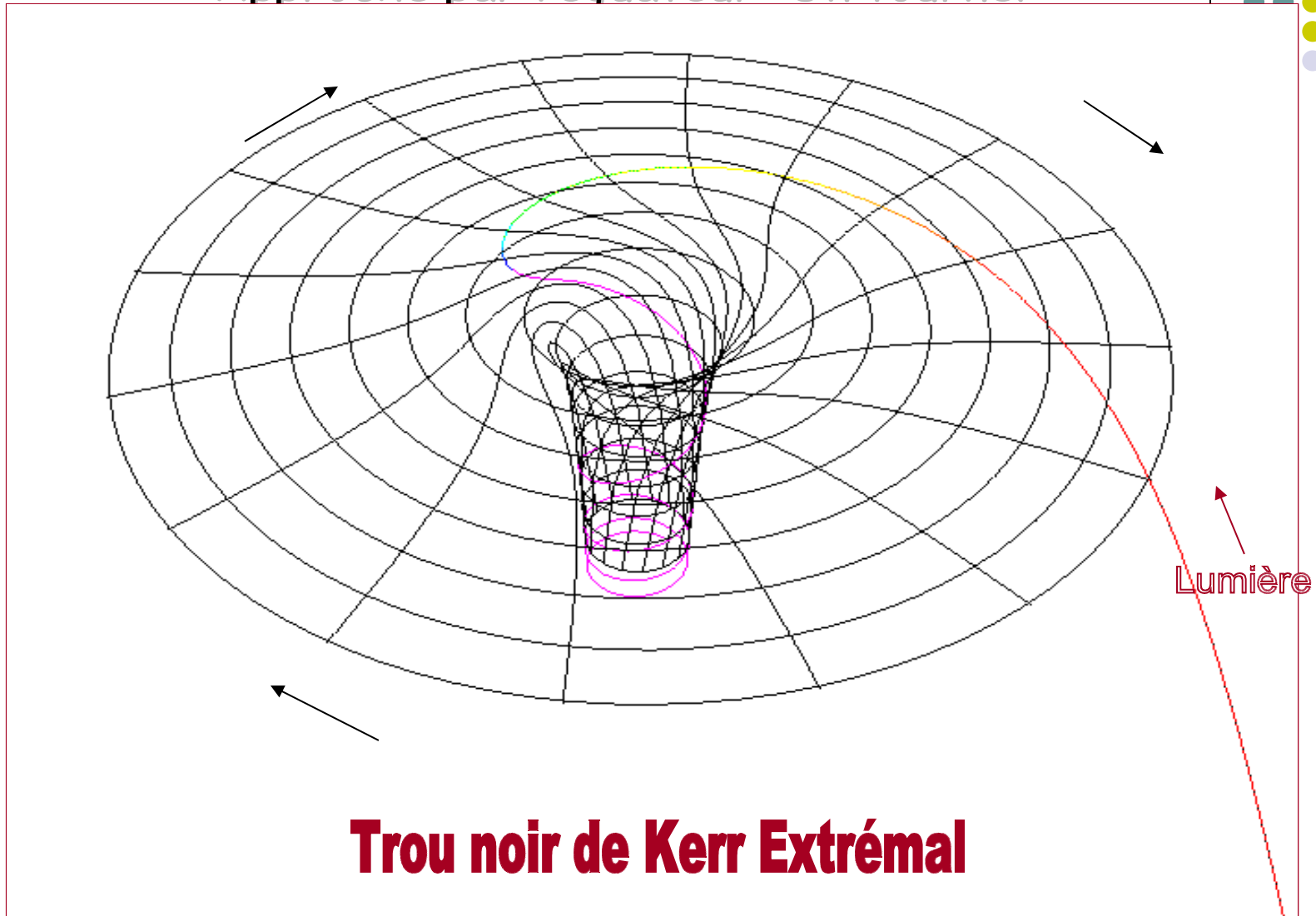
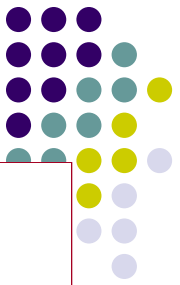
Géodésiques équatoriales



- Géodésique radiale: Une particule de test lâchée sans vitesse ni moment angulaire dans le plan équatorial va décrire une trajectoire qui va spiraler avant de percuter l'anneau singulier central. Paradoxalement la rotation du TN n'a pas d'effet répulsif (pas de « force centrifuge ») au contraire!
- Orbites circulaires. La rotation du TN différencie les orbites en co-rotation de celles en contre rotation. Pour un TN critique l'orbite stable de rayon minimum est au niveau de l'horizon en co-rotation et neuf fois plus loin en contre rotation!

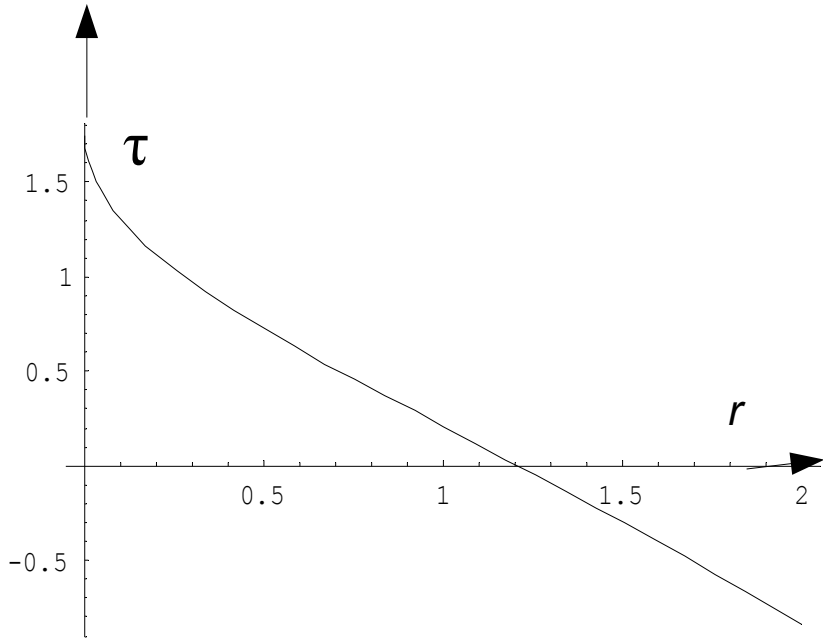
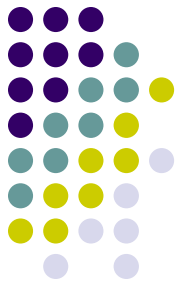
Chute libre vers un TN de Kerr

Approche par l'équateur: On tourne!



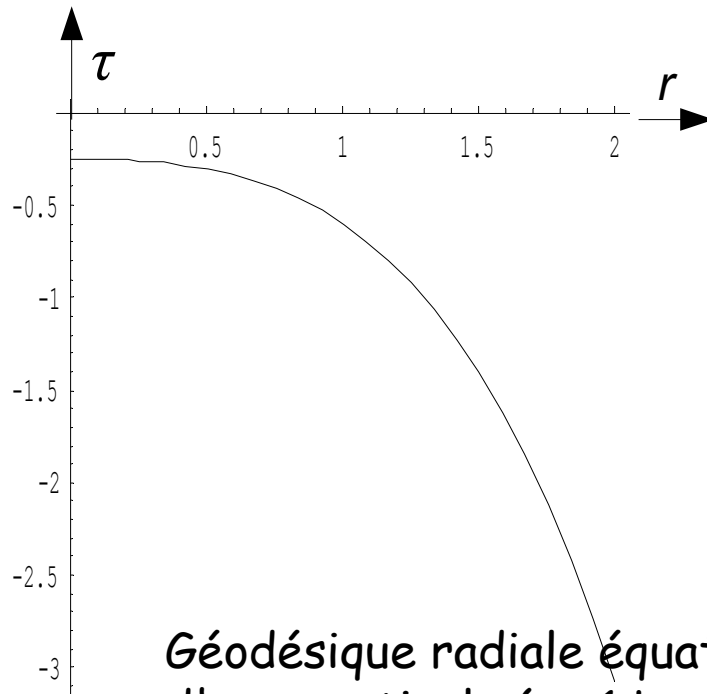
Trou noir de Kerr Extrémal

Equations géodésiques $\tau(r)$



Géodésique radiale axiale d'une particule ($e = 1, L = 0$) dans un TN de Kerr extremal, $a = Gm = 1$

$$\tau = \frac{\frac{2}{3} r \sqrt{\frac{1+r^2}{r}} + \frac{4 (-1)^{1/4} \sqrt{1-\frac{i}{r}} \sqrt{1+\frac{i}{r}} r^{3/2} \sqrt{\frac{1+r^2}{r}} \text{EllipticF}\left[i \text{ArcSinh}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{r}}\right], -1\right]}{3 (1+r^2)}}{\sqrt{2}}$$



Géodésique radiale équatoriale d'une particule ($e = 1, L = 0$) dans un TN Kerr extremal, $a = Gm = 1$

$$\tau = -\frac{\frac{\sqrt{r^3 (1+r^2)} \left(\frac{4\sqrt{r}}{21} + \frac{2r^{5/2}}{7}\right) - \frac{4 (-1)^{1/4} \sqrt{1-\frac{i}{r}} \sqrt{1+\frac{i}{r}} \sqrt{r^3 (1+r^2)} \text{EllipticF}\left[i \text{ArcSinh}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{r}}\right], -1\right]}{r^{3/2}}}{21 \sqrt{r} (1+r^2)}{\sqrt{2}}$$

Autres géodésiques équatoriales

(B.O'Neil, Kerr space Time, AK Peters)

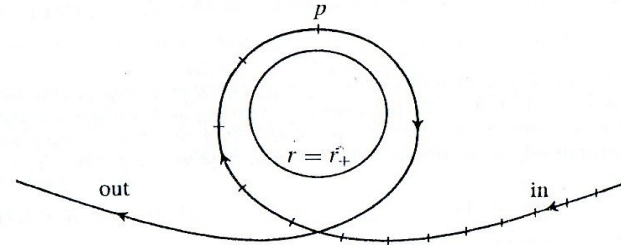
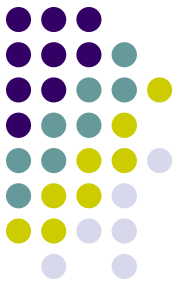


FIGURE 4.29. A timelike flyby orbit in the equatorial plane, with parameters $M = 1$, $a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = 1$, $L = 4.2$. The circle represents the outer horizon $r = r_+ = 1.4$, so the orbit is in the Kerr exterior. The orbit is direct with $r_{\min} \approx 2.16$. Analogous retrograde orbits would require $L < -8.5$.

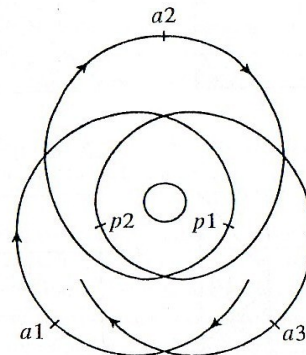
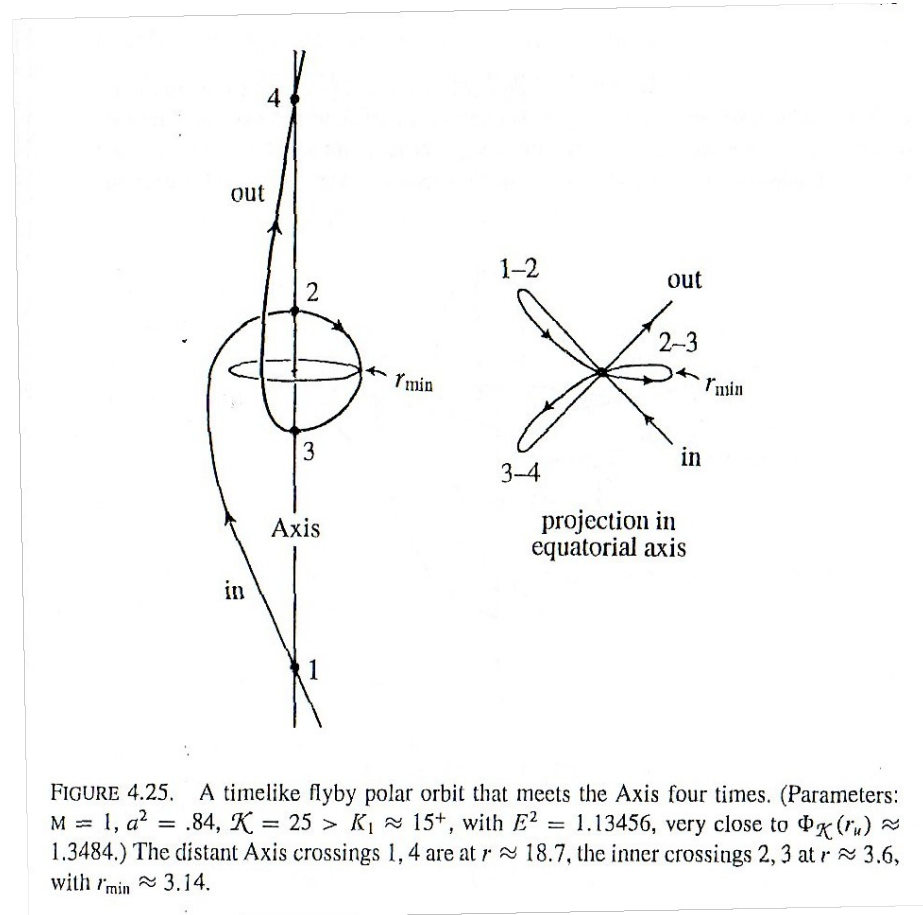
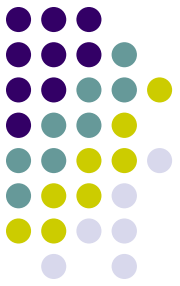


FIGURE 4.30. A timelike bound exterior orbit in the equatorial plane. (Parameters: $M = 1$, $a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = -.1$, $L = 3.1$.) The circle represents the outer horizon $r = r_+ = 1.4$. Three apocenters and two pericenters are shown: $a1$, $p1$, $a2$, $p2$, $a3$, with $r_{\min} \approx 5.35$ and $r_{\max} \approx 13.25$. The pericenter advance from $p1$ to $p2$ is about 142° .

Orbites polaires (B.O'Neil, Kerr space time, AK Peters)



Apparence d'un TN de Kerr

(J. Bardeen Time like and null geodesics in Kerr Metric)

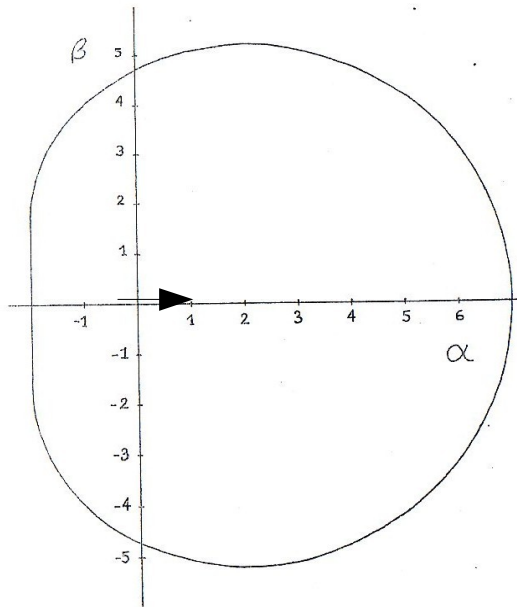
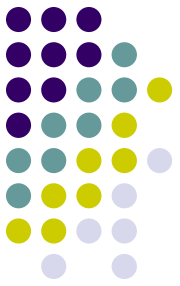
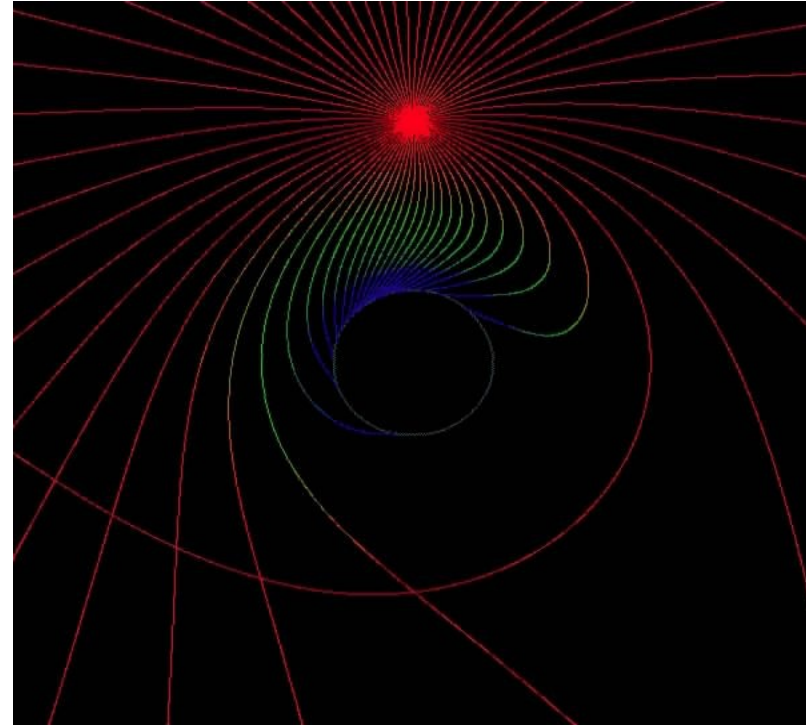


Figure 6. The apparent shape of an extreme ($a = m$) Kerr black hole as seen by a distant observer in the equatorial plane, if the black hole is in front of a source of illumination with an angular size larger than that of the black hole.

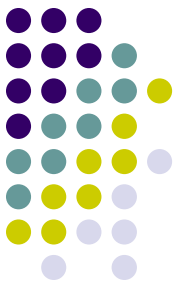


Vue de dessus, le TN « tourne » dans le sens trigonométrique, l'observateur est en bas de la figure.

Vue de face: la source est derrière le TN

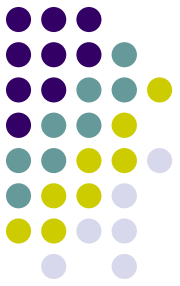
L'observateur voit tourner le TN de gauche à droite. La dissymétrie est liée à cette rotation. Sur la droite les photons venant de derrière sont en contre rotation (l'orbite limite de non capture est plus au large que sur la gauche où les photons sont en co-rotation!

Energie négative dans Ergosphère



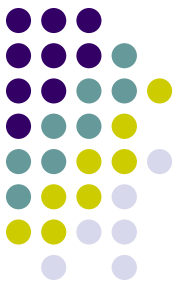
- Energie conservée sur une géodésique: $E = -K_{\mu} p^{\mu} = m(1-2GM/r) dt/d\tau + 2\sin^2\theta.m(GMa/r)d\Phi/d\tau$
- Dans l'ergosphère le vecteur K_{μ} est de type espace, on alors peut imaginer que $-K_{\mu} p^{\mu} < 0$.
L'énergie (totale) d'une particule peut être négative!
- Possibilité d'extraire de l'énergie, jusqu'à 29% pour un TN de Kerr critique par le procédé de Penrose.

L'électron de Kerr-Newman



- Le facteur gyromagnétique: g défini par : $\mu = g.J(q/2m)$ d'un TN de Kerr Newman vaut 2 (comme l'électron), alors qu'il vaut 1 en mécanique classique. μ est le moment magnétique, J le moment cinétique, q la charge et m la masse.
- On peut alors définir un TN de Kerr Newman de paramètres de charge, spin et masse de l'électron
- Solution sans horizons (fast Kerr): Violation de conjecture de censure cosmique: Réalité physique ?
- **Taille du TN**: rayon de Compton de l'électron (rotation).
(Sans rotation: $10^{-22} l_p$)

Le 4ème invariant de Carter K_c



- L'équation de Hamilton Jacobi $g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} + m^2 c^2 = 0$ où s est une action dérivée du Lagrangien miraculeusement se sépare
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}.$$
- Ceci est révélateur d'une symétrie des espaces temps de type D liée à l'existence d'un tenseur de Killing $K_{\mu\nu}$.
- L'invariant est quadratique vis-à-vis de l'impulsion. Le scalaire défini par $K_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ est égal à une constante K .
- La valeur complexe de cet invariant $K = K_c - m^2 c^2 a^2 + (\epsilon a - l)^2$ met en évidence le caractère non inertiel des coordonnées de Boyer Lindquist.
- L'interprétation physique à la limite Newtonienne montre un centre de symétrie particulier à chaque point et un couplage moment angulaire énergie par l'espace temps en « rotation ».

Le 4ème invariant de Carter K_c

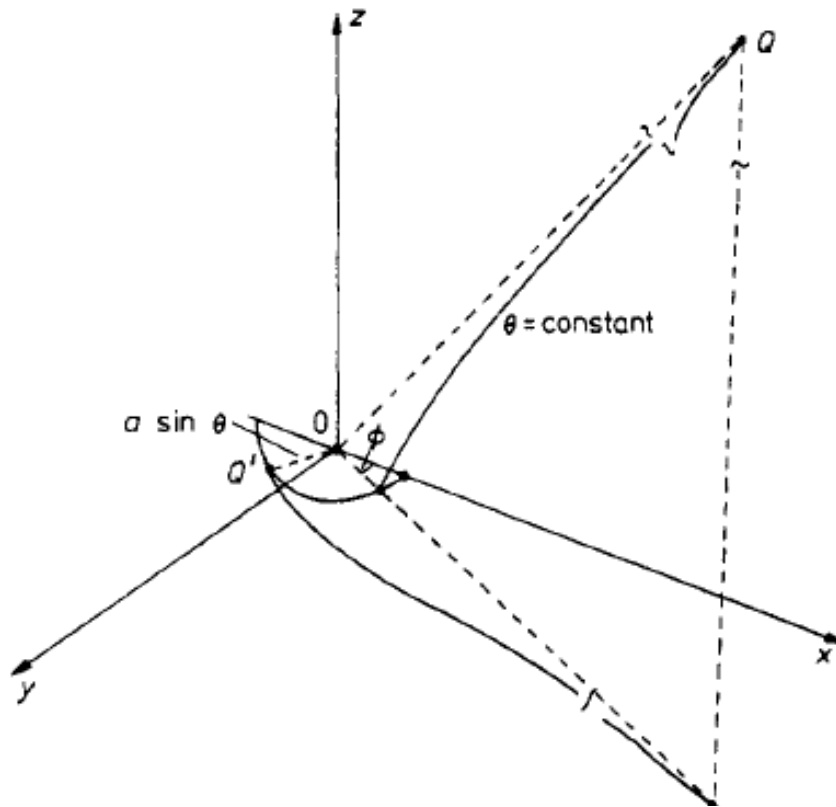
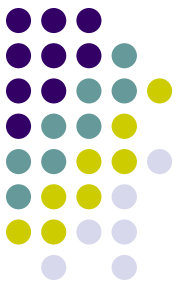


Figure 1.

In order to tackle the general case, a fourth first integral of the motion is needed which cannot come from the obvious symmetries of the metric. However, it turns out that it is possible to obtain such an integral by taking advantage of the unexpected fact that the Hamilton-Jacobi equation can be solved by separation of variables in the coordinate system (1), and with the choice of gauge (37). (The method would also work in the Boyer-Lindquist coordinates with the analogous choice of vector potential, but a transformation involving the nonignorable coordinates r, θ would destroy the separability.)

B. Carter : Global structure of the Kerr family gravitational fields. Phys. Rev 1968

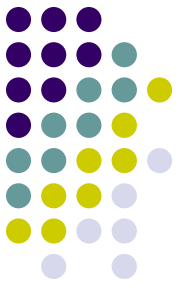
$$K = K_c - m^2 c^2 a^2 + (\epsilon \cdot a - l)^2$$

$$K = M_{\infty}^2 - 2alc \left\{ \left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right) - \left[\left(\frac{\epsilon}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\} \quad \text{32}$$

La machine temporelle



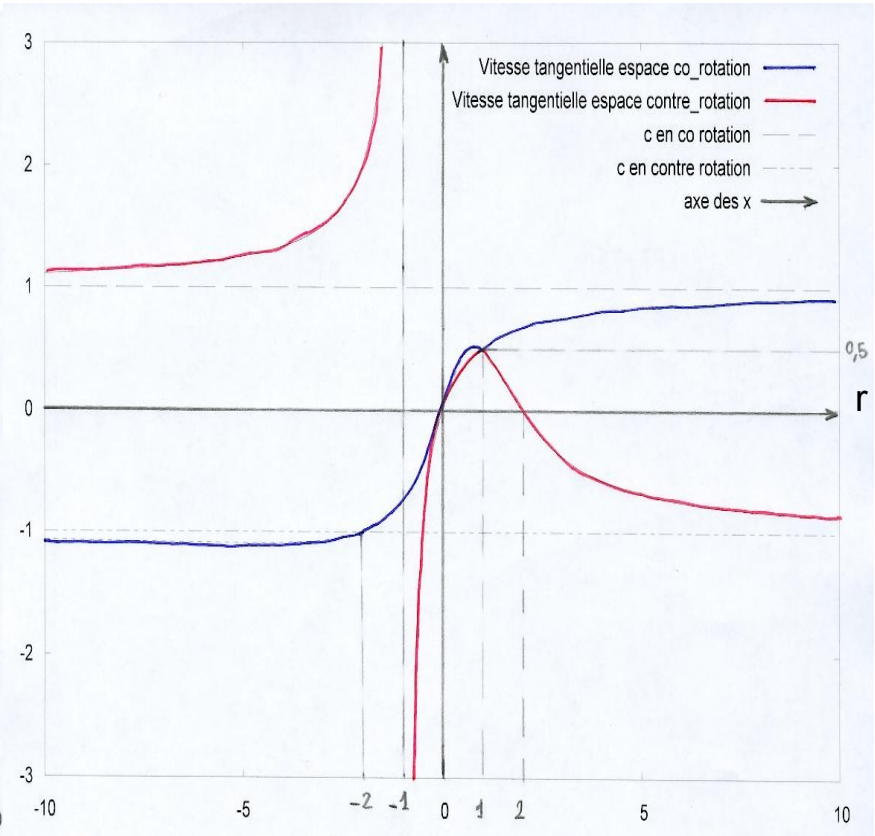
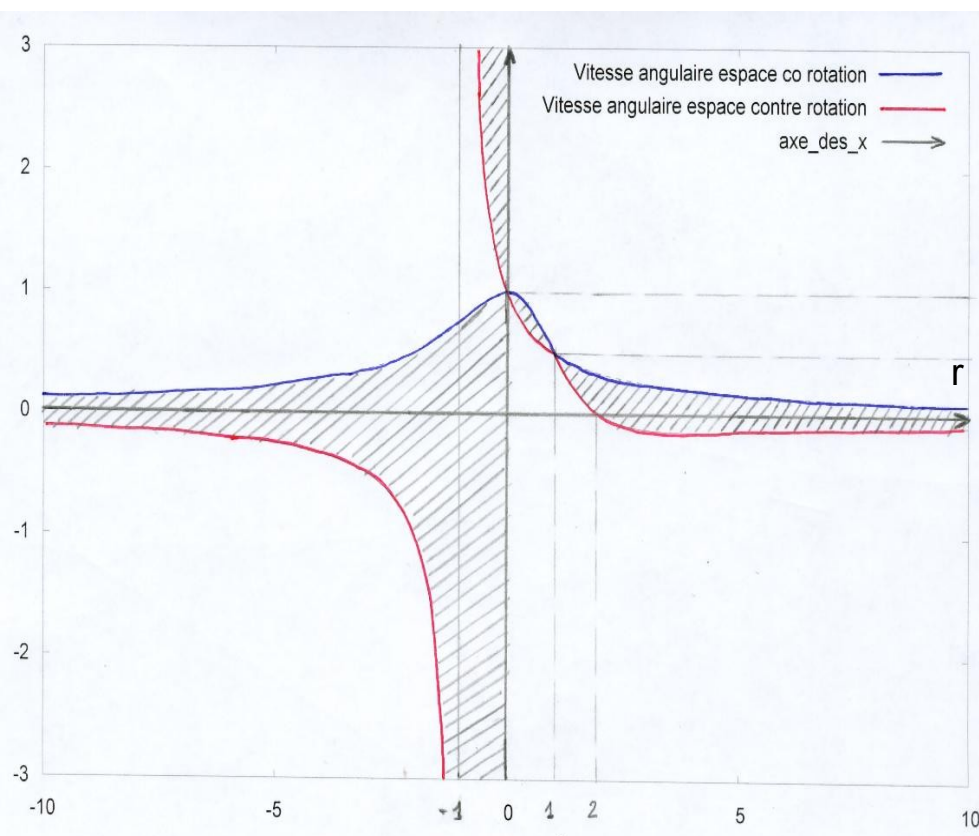
- Il existe une Zone où 2 dimensions sont de type temps.
- Cette zone de topologie torique bordée en son intérieur par la singularité, entièrement dans l'anti univers pour Kerr, débordant dans l'univers pour Kerr Newman, est entièrement en région III (sous l'horizon interne de Cauchy)
- Délimitée par hypersurface singulière où la vitesse de rotation de l'espace devient infinie et où le sens de rotation en contre rotation s'inverse de façon discontinue.

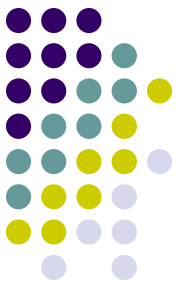


Vitesse angulaire du trou noir

$d\phi/dt(r)$: TN Kerr $a=M$

$r \cdot d\phi/dt$: TN Kerr $a=M$

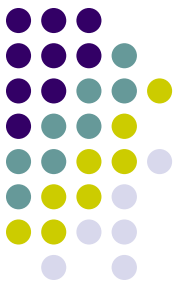




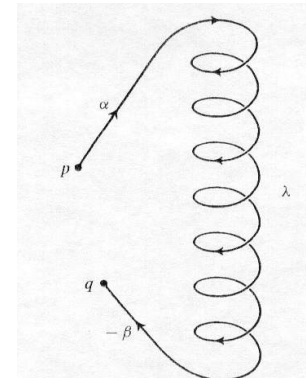
Décrivons une boucle temporelle

- Partant de la région de Type I, il faut se rendre sur l'axe, à bonne distance du TN.
- Il faut acquérir une énergie cinétique proche de l'énergie de masse pour franchir la barrière de potentiel.
- Ayant atteint la région III (en supposant qu'on a survécu au blueshift sur r^-), on décrit des orbites circulaires dans la machine temporelle.
- Même dans un **cas très favorable** (TN très massif, critique), on subit des accélérations énormes $> 10^7 \text{ m/s}^2$ pour $M=a = 10^7 \text{ M.solaires}$, ce qui conduit à des **solutions irréalistes**.

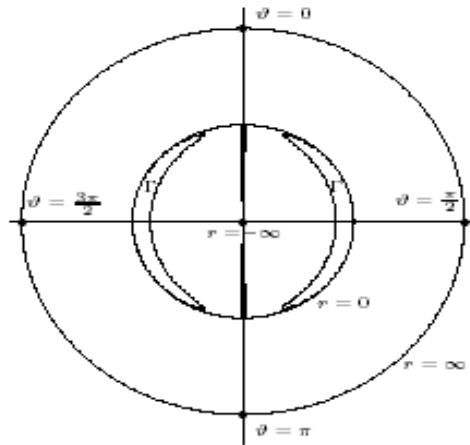
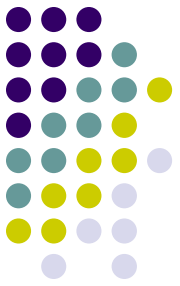
Violation causalité



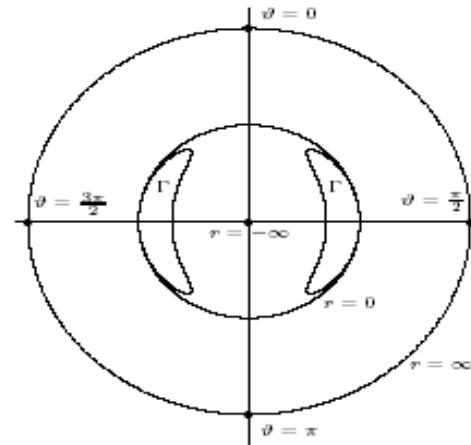
- Il est également possible de « remonter » le temps en tournant en sens contraire de a .
- Alors dans toute la région III, en orbitant dans la zone critique pour se constituer un capital temps négatif et en voyageant à une vitesse proche de la lumière, il est possible qu'un point événement A soit à la fois dans le passé et le futur d'un autre point événement B.
- La Causalité est violée de façon la plus flagrante.



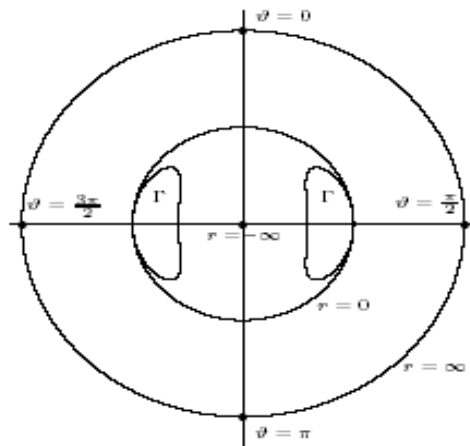
Forme de la machine temporelle



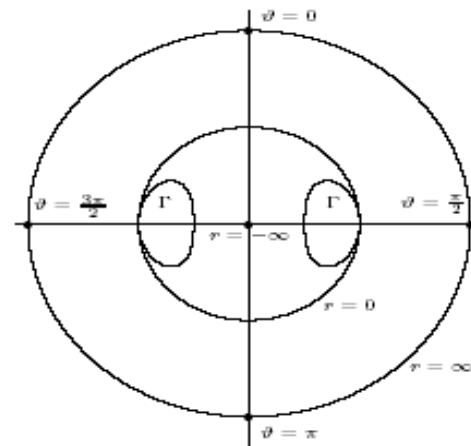
(a) $\bar{a} = 0.1$



(b) $\bar{a} = 0.3$

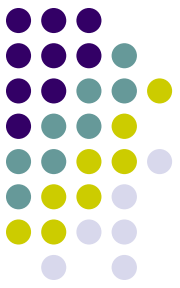


(c) $\bar{a} = 0.6$



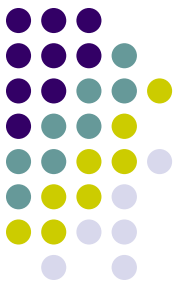
(d) $\bar{a} = 1.0$

Réalité physique de ces boucles



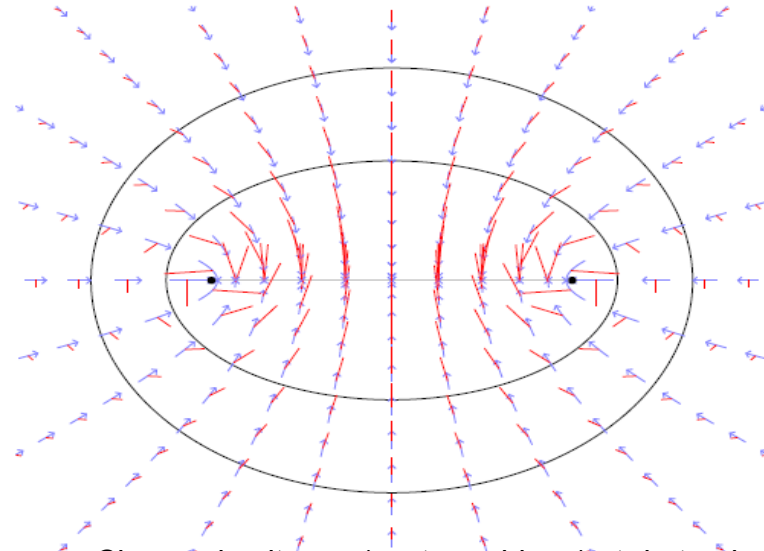
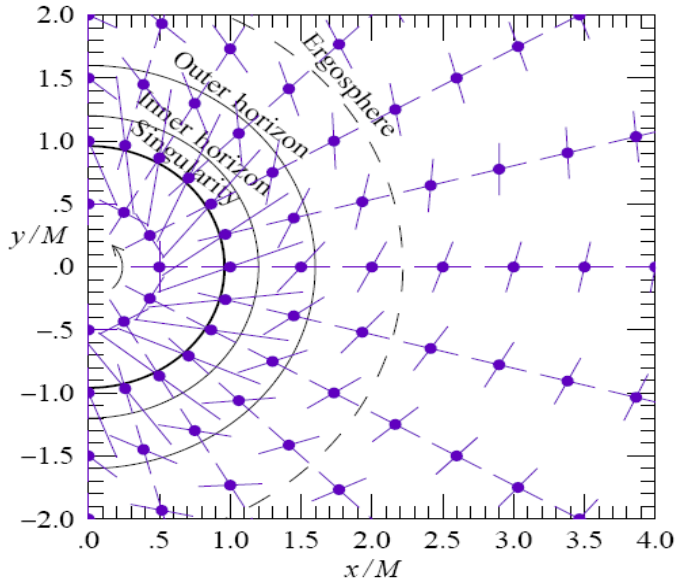
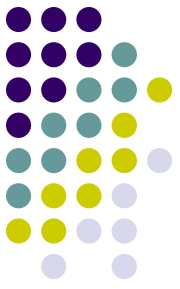
- On peut douter de la réalité physique de ces boucles temporelles en objectant:
- La région de type III n'est pas physique.
- On ne respecte pas l'hypothèse de corps de test ne perturbant pas le champ.
- Les coordonnées n'ont pas de sens physique (Il y a bien des boucles, mais elles n'ont pas de caractère physique). En particulier les coordonnées de Boyer Lindquist non inertielles n'ont pas de caractère physique: observables?

La solution de C. Doran (2000)



- Doran propose une forme qui est l'équivalent pour le problème de Kerr de la forme de Painlevé pour le problème de Schwarzschild. La coordonnée temps t_{ff} est le temps propre d'un observateur en chute libre radiale et la coordonnée radiale Φ_{ff} correspond à la rotation associée de cet observateur (cordonnées inertielles).
- La métrique prend alors une forme plus simple (pseudo minkowsienne) en particulier en coordonnées « cartésiennes ».
- Cette forme est utilisée dans le « modèle de la rivière » par A. Hamilton et J. Lisle (2006). Ce modèle décrit l'espace temps comme une rivière s'écoulant dans un espace de fond newtonien, les particules de test se mouvant dans et par rapport à cette rivière conformément aux lois de la RR (dans la tétrade co-mobile)
- Cette rivière est caractérisée par un champ décrit par le gradient ordinaire dans la base tétradratique d'un tenseur bi-covariant.

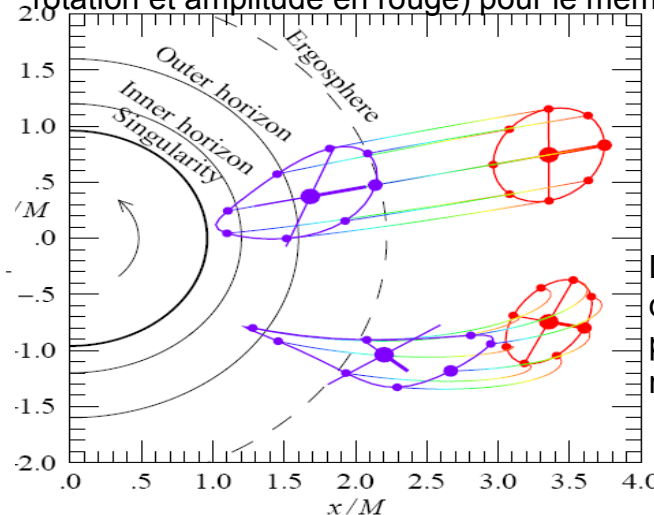
Description du champ de la rivière



Champ de vitesse (vecteurs bleus) et de torsion (axe de rotation et amplitude en rouge) pour le même TN de Kerr

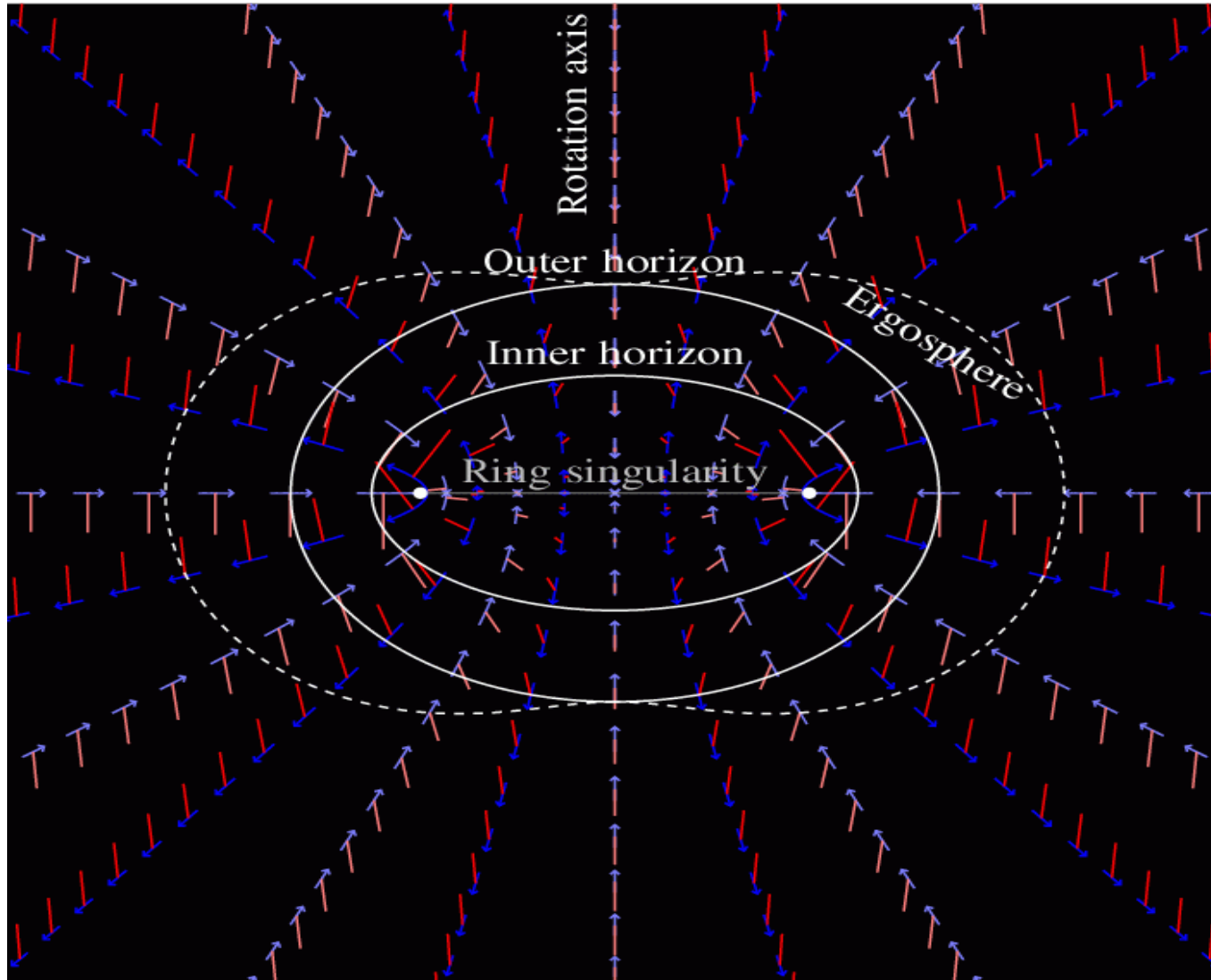
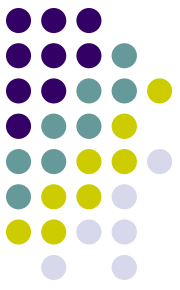
Axes tétradiques axiaux et azimutaux, plan équatorial (x,y) , $a=0.96$, d'un TN de Kerr.. L'inclinaison de l'axe azimutal reflète l'anisotropie de l'espace. Avec $t_{ff} - t_{kerr} =$

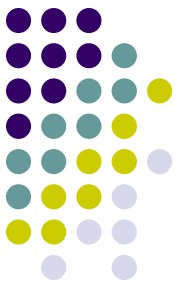
$$\frac{2}{-1+r} - r - \left(\sqrt{2 + \frac{2\sqrt{2}}{-1+r}} + \sqrt{2} r \right) \sqrt{\frac{r}{1+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{r}{1+r^2}} (1+r^2) (1+3r^2)} \left((-1-3r^2) \sqrt{r+r^3} \left(\frac{6i\sqrt{ir}(-i+r)\sqrt{-i(i+r)} \text{EllipticE}\left[\text{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i(i+r)}}{\sqrt{2}}\right], 2\right]}{\sqrt{-i(i+r)}\sqrt{r+r^3}} \right) + \frac{6\sqrt{ir}\sqrt{-i(i+r)}(i+r) \text{EllipticE}\left[\text{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i(i+r)}}{\sqrt{2}}\right], 2\right]}{\sqrt{-i(i+r)}\sqrt{r+r^3}} + \frac{(4+4i)\sqrt{ir}\sqrt{-i(i+r)}(i+r) \text{EllipticPi}\left[1+i, \text{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i(i+r)}}{\sqrt{2}}\right], 2\right]}{\sqrt{r+r^3}} \right) \right) - 2 \text{Log}[-1+r]$$



Distorsion géodésique d'un ensemble de particules pour le même TN de Kerr

Distorsion dans un TN de Kerr

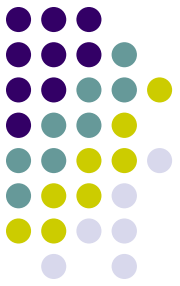




Conclusion

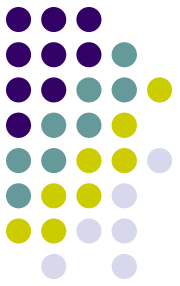
- Un objet très simple (3 paramètres) → une géométrie qui donne naissance à une phénoménologie très diversifiée, d'où émergent bon nombre de modèles rencontrés en physique: paramètres fondamentaux?
- Modèle électron/positron, masse gravitationnelle positron négative = renversement du temps: Modèle de Wheeler (un positron est un électron qui remonte le cours du temps)?
- Problème de la machine temporelle encore mal expliqué physiquement: Pb coordonnée temps!
- Caractère stationnaire de la solution, pas simple à représenter. Solution plus explicite par utilisation de coordonnées inertielles.
- La causalité est de nature conforme.

Références -1



- **Bardeen J.M.**(1972) Timelike and null geodesics in the Kerr metric *Astrophysical Journal*
- **Carroll S. M.** (2004). « Space time and Geometry ». Addison Wesley
- **Carter B.** (1973) . Properties of the Kerr metric in Dewitt and Dewitt .
- **Carter.B.** (1970). An axisymmetric Black Hole has only two degrees of freedom. *Phys. Rv. Letters* 26,331-333
- **Carter.B** (1968) Global Structure of the Kerr family of gravitational Field (*Phys. Rev.*Vol 174, number 5, oct 1968).
- **Carter.B.** (1997). Has the black hole equilibrium problem been solved? arXiv:gr-qc/9712038 v1 8dec 1997.
- **De Felice F.**(1980) Angular momentum and separation constant in Kerr metric (*J.Phys.A:Math.Gen* 13 , 1701-1708)
- **Damour,T. & Deser.S** (1990) *Relativité*, Vol 19, 739- 748.*Encyclopédie Universalis*.
- **Doran C.**(2000) A new form of the Kerr solution, *Phys.rev* D61,067503-067506
- **Droste .J.** (1916) « Het van eenenkel centrum in Einstein's theorie des zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld. *Versl. Gewone Vergad Akad.Amst.*25,163-180. English translation : the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. *Proc.Acad. Sci. Amst.*,19(i):197-215.
- **Earman J. & Eisenstaedt J.**(1999). *Einstein and Singularities*. *Stud.Hist.Mod.Phys.* Vol 30.N°2 pp185-235. Elsevier Science Ltd GB
- **Einstein A.** (1916). "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." *Annalen der Physik* 49: 769-822.
- **Eisenstaedt J.** (1982). « Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild ». *Archive for history of exact sciences*, Vol 27, Number 2, 157-198
- **Eisenstaedt J.** (1987). Trajectoires et impasses de la solution de Schwarzschild. *Archives for History of Exact Sciences*. Vol 37, Number 4, p 275-357 (Lettre de Synge à Robertson datée du 31/10/1938 citée p 329).
- **Eisenstaedt J.**(1993) "Lemaître and the Schwarzschild Solution." In *New Studies in the History of General Relativity. Proceedings of the Third International Conference on the History and Philosophy of General Relativity*. Einstein Studies, Vol. 5, John Earman, Michel Janssen, and John D. Norton, eds. Boston: Birkhäuser.

Références -2



- **Hamilton A & Lisle P (2006)** The river model of black holes. arXiv:gr-qc/0411060 v2 31 Aug 2006
- **Kerr R. (1963)** Gravitational Field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. Physical review letters 1 September 1963
- **Landau L. & Lifchitz E. (1994). Théorie des champs, Ed. Mir –Ellipse**
- **Lemaître G. (1932)** « L'univers en expansion » Publications du laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'université de Louvain. Vol IX (N°85 et 86) p. 171-205.
- **Misner C.W. & Thorne K. & Wheeler J.A.(1973)** Gravitation. Freeman New York
- **Painlevé P. (1921)** La mécanique classique de la théorie de la relativité. C.R Acad. Sci. Paris 173, 677-680, A.
- **Penrose R. (1972a).** Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. and Applied Math. Regional
- **Petrov A. Z.(1954).** Classification of space defining gravitationanl fields. Sci. Not. Kazan State Univ.114. 55
- **Pirani F.A.E (1957).** Invariant formulation of gravitational radiation theory. Phys. Rev. 105: 1085
- **B.O'Neil,** Kerr space time,(AK Peters)
- **Rumano. N** http://nrumiano.free.fr/Fetoiles/int_noir2.html
- **Schwarzschild. K. (1916a)** « Über das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinschen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 189-196.
- **Schwarzschild. K. (1916b)** « Über das Gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 424-434.
- **Synge J.L. (1950).** « The gravitationnal field of a particle ». Proc. R. Irish Acad. A 53, 83-114
- **Thorne K. (1994).** Trous noirs et distorsions du temps. Champs Flammarion (1997-trad.F.)