

Cosmologie: Le Modèle Standard Cours donné à la SAF (Avril 2010, m.a.j 2021) par Jacques Fric

Plan du document

Introduction

Hypothèses sur la structure de l'Univers,

Détermination de la métrique applicable, "Robertson Walker":

Types d'univers à priori

Utilisation de l'équation d'Einstein,

Calcul du tenseur d'Einstein

Modélisation des fluides galactiques, équation d'état ,

Le tenseur énergie Impulsion

Résolution de l'équation d'Einstein : l'équation de Friedman ,

L'équation de Friedmann-Lemaitre

Les Univers possibles :Discussion qualitative de l'équation de Friedman,

Solutions exactes de l'équation de Friedman

Dans quel univers vivons-nous? Expansion critique avec $\Lambda = 0$,

Expansion critique avec $\Lambda \neq 0$,

Paramètres cosmologiques qui déterminent le destin de l'univers et méthodes de mesure.

Situation avant 1995

Situation actuelle

Nouvelles stratégies,

Paramètre q ,

Mesures de distances dans un univers FLRW

Distance de luminosité,

Formule distance luminosité,

Age de l'univers

Supernova cosmology project ,

Projet Boomerang RFC,

Synthèse des deux projets

Conclusion ,

Glossaire avec accès aux rubriques en hypertexte,

Références

Introduction : Naissance de la Cosmologie contemporaine

Après avoir établi l'équation de la Relativité générale, Einstein tente de l'appliquer à la Cosmologie, dans le contexte de l'époque (en 1916 l'univers connu est constitué des étoiles fixes, des nébuleuses), avec comme hypothèses :

- **Univers homogène et isotrope** (hypothèse à priori quasi obligée), rempli de **fluides parfaits de densité ρ , de pression p** .
- **Il est clos** (satisfaction du **principe de Mach**)
- **Il est statique** (arbitraire, pour se conformer à ce qui est observé),

Pas de solution statique, en 1917, il va ajouter une constante à son équation : la fameuse **constante Cosmologique Λ** .

Sa publication "**Kosmologische Betrachtungen**" en février 1917 marque le début de Cosmologie contemporaine, il y tente de justifier (à posteriori) cette constante épistémologiquement par le principe de Mach qu'il sépare en deux parties : Le principe de relativité générale et la définition totale de la géométrie l'Univers par son contenu.

En 1917 de Sitter montre qu'un univers vide avec constante cosmologique est en expansion, battant en brèche ce dernier principe (on a fait pire depuis). Le côté "ad hoc" de cette constante donne lieu à de nombreuses polémiques.

En 1922 **Friedmann** (alors que la vision de l'Univers n'avait pas changé) propose à Einstein sa solution sans cette constante Λ qu'il juge arbitraire, c'est un Univers dynamique. Einstein mettra plus de 10 ans à l'admettre, puis **Lemaître** (1927) pour allonger l'âge de l'Univers **réintroduit** Λ , permettant d'enrichir les solutions.

Indépendamment de la validité des hypothèses, tous les ingrédients de la Cosmologie contemporaine étaient déjà là....

Einstein est très influencé par le principe de Mach (1883) qui stipule que l'inertie de la matière naît de l'interaction entre les corps "massifs" cf ref [10]. Notons qu'Einstein a renié par la suite ce principe de Mach (comme il a renié Λ)

On se rappelle que le fondement du principe de Relativité Générale repose sur la réfutation du caractère absolu d'un mouvement de rotation, autour d'un axe les reliant, entre deux corps isolés. (par réfutation de l'espace absolu fictif de Newton). S'il y a une dissymétrie, il doit y avoir une cause physique: (les masses distantes)

Mais si l'Univers et sa géométrie est déterminé par l'ensemble des masses qui le composent alors un mouvement inertiel "absolu" reprend son sens dans ce contexte (puisque l'espace temps dépend de ces masses). Le pendule de Foucault, système inertiel, nonobstant la gravitation terrestre largement dominante localement, bat dans un plan fixe par rapport à ce référentiel déterminé par toutes les masses de l'Univers!) .

Nous verrons qu'avec la métrique de Robertson Walker, un référentiel cosmique spatio- temporel privilégié existe. Est-ce un retour de l'espace absolu de Newton. Non selon Einstein puisque cet espace- là est physique (déterminé par la matière)

La fermeture de l'Univers (dans le contexte statique) est lié au problème à l'infini, où à la limite de Minkowski, l'inertie s'annulerait . La métrique de Schwarzschild lui posait déjà ce problème.

La Cosmologie moderne procède d'une matérialisation (« physicalisation ») de la chronogéométrie et non pas de l'inverse

Pas de cadre imposé comme en mécanique Newtonienne, on définit ce cadre dans le contexte formel imposé par la RG, choix à faire parmi une infinité d'univers possibles.

La démarche d'Einstein est très philosophique (ses détracteurs diront dogmatique).

Aujourd'hui, on considère l'introduction d'une constante Cosmologique parfaitement fondée, comme une généralisation constructive de l'équation d'Einstein (le cas $\Lambda = 0$ n'étant qu'un cas particulier qui conduit à une limite de Minkowski en cas de d'Univers vide). A l'époque les scientifiques étaient des découvreurs, amenés à faire certaines opérations dont ils ne saisissaient pas toujours la portée à plus long terme.

Quelle métrique pour décrire l'univers ? : Hypothèse sur le contenu de l'univers

Principe Cosmologique

L'univers est homogène (identique à lui-même partout) et isotrope (identique à lui-même dans toutes les directions, présentation des univers à symétrie maximale en annexe 1)

Ce qui fait que chacun croit être le centre de l'univers.

Malgré les inhomogénéités locales, à grande échelle, l'Univers paraît satisfaire à ce principe qui est corroboré par le comptage des galaxies, les rayonnement X diffus, le rayonnement de fond et le RFC à 3°K, etc)

Par ailleurs le fait qu'il n'y ait pas de point privilégié dans l'Univers, ni centre, ni bords est une hypothèse plutôt élégante sur le plan intellectuel.

Mais l'observation des galaxies lointaines nous indique que l'univers n'est pas statique, non homogène en temps (passé \neq du présent \neq futur).

Conséquences de l'homogénéité et de l'isotropie

Type de métrique générale associée

En Relativité Générale, cela conduit un feuilletage (découpe en tranches d'espace homogène et isotrope) de l'univers par le temps, ce qui permet de séparer les variables.

L'Espace temps est alors de type $R * \Sigma$ où R représente la direction du temps et Σ est une

variété topologique homogène et isotrope de dimension 3, représentant l'espace.

Ces deux contraintes confèrent à l'espace une symétrie maximum, en conséquence la métrique est de la forme (on note par des lettres latines les indices spatiaux)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(u)du^i du^j \quad (1)$$

t coordonnée de temps, u coordonnée d'espace de Σ , γ_{ij} est la métrique associée de symétrie maximum sur Σ .

La fonction a(t) est le facteur d'échelle qui indique la taille à l'instant t. Les coordonnées u sont appelées coordonnées "comobiles"

Un observateur dont les coordonnées u ne changent pas est appelé comobile (sur une géodésique).

Seuls les observateurs comobiles vont constater l'isotropie et homogénéité de l'espace.

Ils vont de surcroît observer l'univers au même âge (temps universel mesuré par la température du RFC par exemple) comme conséquence de la structure de l'Univers

Sur Terre, ce n'est pas le cas, on observe une anisotropie dipolaire du RFC ($\approx 10^{-3}$) dans le sens du mouvement global de la Terre (qu'on sait corriger).

L'expansion tend à annuler les mouvements propres.

Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique

Si on s'intéresse aux métriques 3D à symétrie maximum γ_{ij} , elles obéissent à la loi:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (2)$$

où k est une constante et l'indice ${}^{(3)}$ sur le tenseur de Riemann nous rappelle que c'est une métrique 3D (spatiale), γ_{ij} n'est donc pas la métrique de l'espace-temps.

Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D

Les composantes (d'espace) du tenseur de Ricci prennent la forme très simple suivante :

$${}^{(3)}R_{jl} = 2k\gamma_{jl} \quad (3)$$

Un espace à symétrie maximale possède nécessairement une symétrie sphérique, soit

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}du^i du^j = e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4)$$

Les composantes $\neq 0$ du tenseur de Ricci,

$${}^{(3)}R_{ik} = \partial_l \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km},$$

$$\text{sont : } {}^{(3)}R_{11} = (2/r)\partial_1\beta, \quad {}^{(3)}R_{22} = e^{-2\beta}(r\partial_1\beta - 1) + 1, \quad {}^{(3)}R_{33} = [e^{-2\beta}(r\partial_1\beta - 1) + 1] \sin^2\theta \quad (5)$$

On les pose proportionnels à la métrique en utilisant (3), et on résout pour $\beta(r)$:

$$\beta = -1/2 \ln (1-k.r^2) \quad (\text{vérification en annexe 2}) \quad (6)$$

Solution : La métrique de Robertson Walker (RW) (postérieure à Eq. Friedmann)

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t).[dr^2/(1-k.r^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\Phi^2)] = -dt^2 + a^2(t). d\sigma^2 \quad (7)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{avec} \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad \text{et}$$

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = a^2(t)/1-kr^2, \quad g_{22} = a^2(t)r^2, \quad g_{33} = a^2(t)r^2.\sin^2\theta, \quad g^{\mu\mu} = (g_{\mu\mu})^{-1}$$

$$dx^0 = dt, \quad dx^1 = dr, \quad dx^2 = d\theta, \quad dx^3 = d\Phi.$$

t, r, θ, Φ , sont les coordonnées "comobiles" par rapport à l'observateur local, $a(t)$, facteur d'échelle est un paramètre sans dimension posé en général égal à 1 pour $t = t_0$ (maintenant) et k paramètre de "courbure" a les dimensions de l'inverse d'une longueur au carré $[L]^{-2}$.

Notons que la substitution : $k \rightarrow k / |k|$ et $r \rightarrow r. (|k|^{1/2})$ et $a \rightarrow a / (|k|^{1/2})$ (8)

laissent (7) invariant, donc le seul paramètre pertinent est $k/|k|$, et il y a 3 cas intéressants:

$k = -1$, $k = 0$, et $k = +1$.

$k = -1$ correspond à une courbure négative sur Σ , est appelé ouvert.

$k = 0$ correspond à une courbure nulle sur Σ , est appelé plat.

$k = +1$ correspond à une courbure positive sur Σ , est appelé fermé.

Caractéristiques de la métrique de Robertson Walker (RW).

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot [dr^2 / (1 - kr^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\Phi^2)] = -dt^2 + a^2(t) \cdot d\sigma^2 \quad (7)$$

t, r, θ et ϕ , coordonnées par rapport à l'observateur local, où r est la coordonnée radiale comobile, à multiplier par $a(t)$ pour obtenir la distance radiale géométrique.

Les autres coordonnées sphériques angulaires θ et ϕ sont classiques.

Remarquons que cette métrique a été déterminée sans utiliser l'équation d'Einstein.

Cette métrique dynamique, **invariante** par translation et rotation, mais **pas** par une transformation de Lorentz, définit une variété de type $\mathbb{R}^* \Sigma$ avec \mathbb{R} ensemble des réels (temps), Σ variété de type espace 3D à symétrie maximum fonction de :

$a(t)$: facteur d'échelle qui décrit l'évolution temporelle de l'univers

k : paramètre de courbure qui décrit sa géométrie spatiale

La métrique de Robertson Walker (RW) définit un référentiel Cosmique "privilegié"

Seuls les observateurs de coordonnées r , θ et ϕ fixes, dits comobiles (sur une géodésique), constateront l'isotropie et homogénéité de l'espace (comme s'ils étaient au centre de l'Univers !), observeront l'univers au même âge (temps universel mesuré par la température du RFC par exemple). Le pendule de Foucault va s'aligner sur ce référentiel.

Sur Terre, on observe une anisotropie dipolaire du RFC ($\approx 10^{-3}$) dans le sens du mouvement global de la Terre (qu'on sait corriger).

Par ailleurs, l'expansion décale la lumière vers le rouge et ralentit les mouvements propres des galaxies.

Rappelons qu'il y a 3 cas intéressants : $k = -1$, $k = 0$, et $k = +1$.

Types d'univers associés à la métrique RW

Cas plat, $k = 0$: la métrique sur Σ est

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2.d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

Elle caractérise un Espace Euclidien. Globalement il peut décrire \mathbb{R}^3 ou une Variété topologique plus complexe comme un Hyper Tore $S^1 \times S^1 \times S^1$ sans limites mais de volume fini, par exemple (cf univers de J.P Luminet).

Cas fermé $k = + 1$: On définit $r = \sin\chi$ pour écrire la métrique sur Σ comme suit

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi \cdot d\Omega^2 \quad (10)$$

Qui est la métrique d'une Hyper Sphère, $a(t)$ est physiquement le rayon de l'hypersphère à l'instant t . C'est la seule possibilité pour la structure globale, (exception faite de Variétés topologiques non orientables).

Cas ouvert $k = - 1$: on pose $r = \sinh\psi$ et on obtient :

$$d\sigma^2 = d\Psi^2 + \sinh^2\Psi \cdot d\Omega^2 \quad (11)$$

C'est la métrique d'un espace 3D à courbure négative constante, difficile à visualiser (penser à la selle de cheval en 2D).

Globalement un tel espace peut s'étendre indéfiniment (d'où le qualificatif d'ouvert), mais il peut aussi décrire un espace topologique compact non simplement connecté fini, ce qui fait que le terme "ouvert" est impropre.

Expansion de L'univers : Comme nous l'avons déjà montré dans le cours de cosmologie de 2009, la vitesse de récession est proportionnelle à la distance.

A- Les propriétés remarquables de la Métrique de Robertson Walker (RW) :

Observateurs comobiles :

Leur coordonnée t de temps cosmologique est la même.

Ce temps cosmologique n'est pas le temps absolu newtonien mais est un temps conventionnel, associé à cette métrique qu'on appelle usuellement « temps cosmologique » qui n'est pas, par exemple, notre temps actuel.

Ce temps t , qui n'est pas une observable, qui devra donc être déduit d'autres mesures, est intéressant pour la datation d'événements.

Ainsi, par exemple, si l'explosion d'une supernova lointaine ne sera pas vue en même temps t par deux observateurs comobiles à des endroits différents.

Elle pourra cependant être datée (dans le passé) au même temps cosmologique t_{sn} , si chacun peut mesurer la température du RFC, contigu à l'événement, qui est caractéristique du temps écoulé depuis le Big Bang. Ceci est difficile mais a été fait dans certains cas.

Cette température joue le rôle d'une horloge de type sablier.

En métrique de RW, la propriété "Comobile correspond à la propriété "repos" en RR.

Ceci ne serait pas le cas si les observateurs comobiles (donc en mouvement relatif) utilisaient localement les coordonnées de Lorentz (relativité restreinte) On peut par transformation de coordonnées (la RG est faite pour cela) s'en persuader.

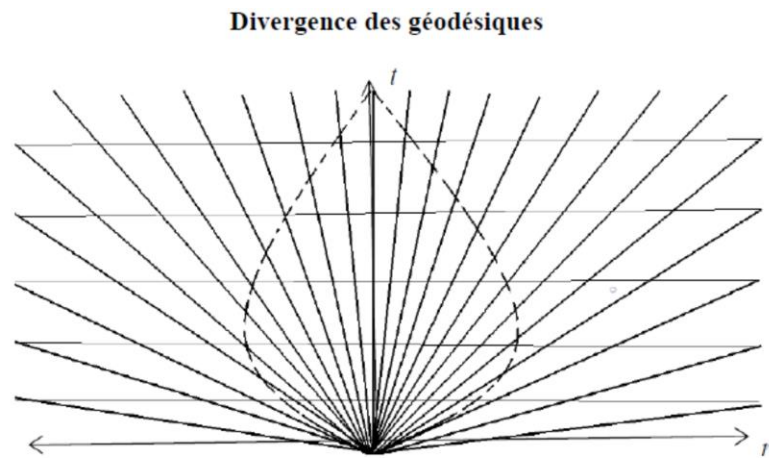


Figure 3a : Divergence des géodésiques en métrique de Robertson Walker

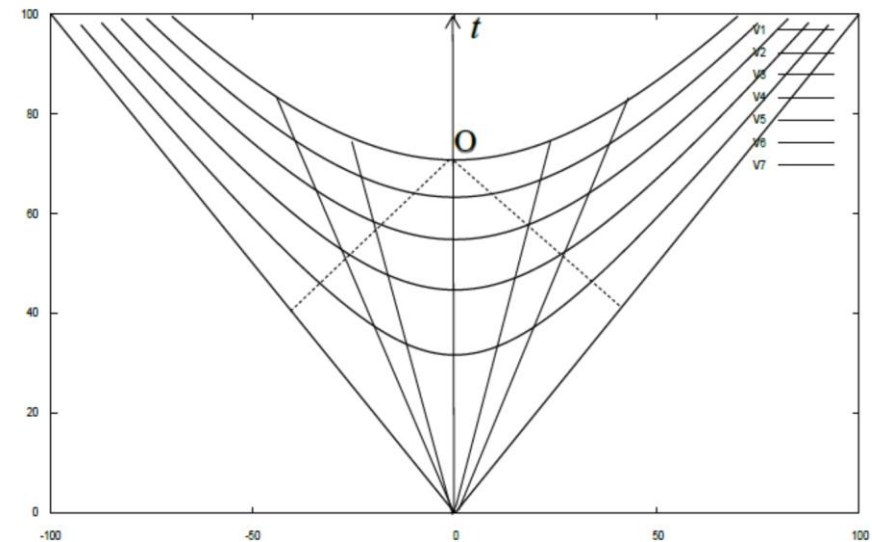


Figure 3b : L'univers du point de vue d'un observateur local contemporain

Dans les figures 3a et 3b, l'univers représenté est un espace-temps vide. Dans la figure 3a, le temps marqué par la flèche centrale et mesuré par les horizontales, est le temps cosmologique décrit par la coordonnée t de la métrique de Robertson Walker qui définit les feuilletés à temps constant.

Les différentes lignes, issues du point de convergence en bas de la figure qui est la singularité, sont des géodésiques suivies par les « atomes » du fluide. La courbe en forme de poire est le cône de lumière du passé, déformé, de l'observateur situé à son sommet en haut.

Dans la figure 3b, en coordonnées locales ¹⁰ associées à l'observateur situé au sommet du cône en pointillés, le temps marqué par la flèche centrale et mesuré par les hyperboles horizontales, est le temps propre des géodésiques qui sont les lignes issues du point de convergence en bas.

Elles correspondent à celles de la figure 3a. Le cône dont le sommet est sur l'hyperbole du haut est le cône du passé de l'observateur situé sur ce sommet.

Il correspond au cône du passé de l'observateur, qui sur la figure 3a, a une forme de poire. On note la déformation opérée lorsqu'on change de coordonnées.

b) Distances :

- Coordonnée r , **rappelons la loi de Hubble : $V = H_0 D$.**

$D = a_0.r$: En général on ne connaît pas r car c'est une coordonnée pas une observable !

D est la distance (par rapport à nous) au temps t_0 (maintenant) (D_{now}) de la galaxie fuyant à la vitesse V , comment mesure t'on D et V ? Pour D c'est la distance " actuelle " (à t_0) ceci peut se faire (théoriquement) avec l'aide d'une "infinité" d'observateurs comobiles qui mesurent de proche en proche au même temps t_0 et nous rapatrient les mesures (qu'on reçoit et exploite à $t_1 > t_0$)! Cette méthode est inexploitable, D n'est donc pas une observable.

On définit aussi :

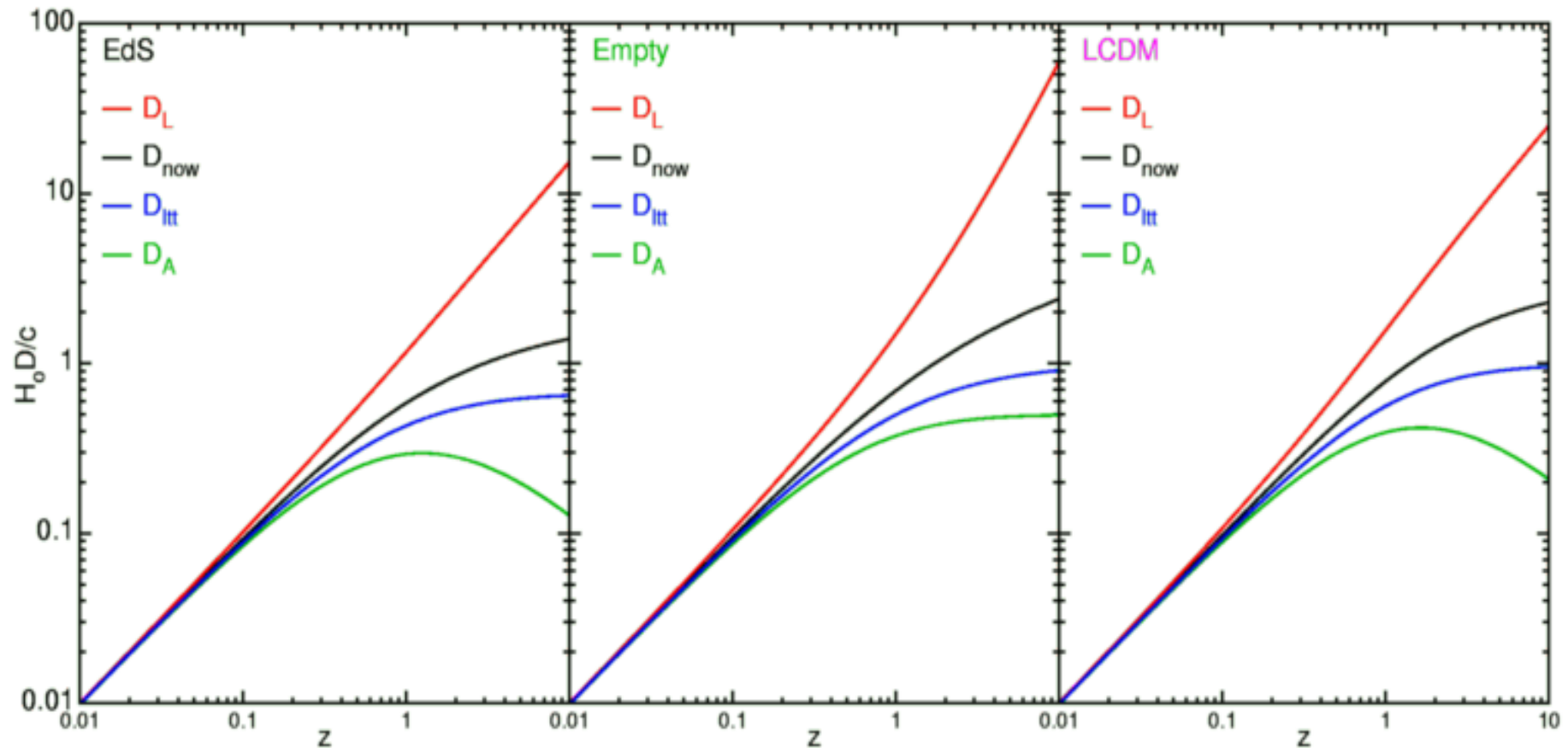
-La distance parcourue par la lumière (D_{ltt}) entre le temps d'émission (non connu en général et non observable directement) et de réception !

Mais nous avons les observables suivantes :

Distance angulaire D_A d'une galaxie de taille connue d vue sous un angle θ avec $D_A = d/\theta$.

Distance de luminosité D_L , d'un objet de luminosité absolue L connue à partir du flux lumineux reçu : $\text{Flux} = L/4\pi D_L^2$.

Enfin heureusement il y a z , le décalage spectral.



Prédictions des différents modèles. A gauche le modèle Einstein De Sitter critique dominé par la matière, au centre le modèle vide, à droite Lambda CDM en accélération qui est celui privilégié aujourd'hui. Notons que les distances sont similaires à faibles distances mais divergent et de façon dépendant du modèle à grandes distances ($H_0 D/c = 1 \rightarrow D = 4,1 \text{ Gpc} = 13 \text{ Gal}$). D_L = distance de luminosité, D_{now} = distance de Hubble, D_A = distance angulaire, D_{ltt} = temps parcouru par la lumière.

L'équation d'EINSTEIN (1915-1916) avec la métrique RW

Rappelons que l'équation d'Einstein s'écrit (entre autres) :

$$(R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R) = \kappa T_{\mu\nu}$$

La partie entre parenthèses à gauche est le tenseur d'Einstein, construit à partir du tenseur de Ricci ($R_{\mu\nu}$) de la métrique ($g_{\mu\nu}$) et du scalaire de Ricci (R) contraction du tenseur de Ricci. Le tenseur de Ricci dépend des symboles de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$,

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 1/2g^{\lambda\rho} \cdot (\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}),$$

et de leurs dérivées. Calculons d'abord les symboles de Christoffel pour la métrique RW :

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{11} &= a \cdot a' / (1 - kr^2), & \Gamma^0_{22} &= a \cdot a' \cdot r^2, & \Gamma^0_{33} &= a \cdot a' \cdot r^2 \cdot \sin^2\theta \\ \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = a'/a \\ \Gamma^1_{22} &= -r \cdot (1 - kr^2), & \Gamma^1_{33} &= -r \cdot (1 - kr^2) \cdot \sin^2\theta \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = 1/r, & \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta \cdot \cos\theta, & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot\theta\end{aligned}\quad (12)$$

Exemple de calcul de symboles de Christoffel en métrique de Robertson-Walker

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ étant diagonal, les seules composantes non nulles sont $g_{\mu\nu} = g_{\mu\mu}$. De même, le tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ est diagonal et dans ce cas : $g^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} = (g_{\mu\mu})^{-1}$. Les composantes $\neq 0$ sont : $g_{00} = -1$, $g_{11} = a(t)^2/(1-kr^2)$, $g_{22} = a(t)^2r^2$, $g_{33} = a(t)^2r^2\sin^2\theta$,

Vérifions que $\Gamma^0_{11} = a.a'/(1-kr^2)$,

En utilisant la forme générale : $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \cdot (\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})$

Avec $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, on obtient :

$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{0\rho} \cdot (\partial_1 g_{\rho 1} + \partial_1 g_{\rho 1} - \partial_{\rho}g_{11})$, Comme seul $g^{00} = -1$, est non nul cela impose $\rho = 0$:

$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2}g^{00} \cdot (-\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2}[-1][-\partial_t(a^2(t)/(1-kr))] = a.a'/(1-kr^2)$

En effet, les composantes g_{01} sont nulles et $\partial_t(a^2(t)) = 2.a'(t).a(t)$

On peut vérifier les autres symboles non nuls et aussi vérifier la nullité des autres.

Par exemple il est très simple de vérifier que Γ^0_{00} est nul.

Calcul du tenseur de Ricci, (contraction du tenseur de Riemann), qui s'écrit :

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}$$

Avec ces $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ les composantes non nulles du tenseur de Ricci valent :

$$R_{00} = -3a''/a,$$

$$R_{11} = (aa'' + 2a'^2 + 2k) / (1 - kr^2),$$

$$R_{22} = r^2 (aa'' + 2a'^2 + 2k),$$

$$R_{33} = r^2 (aa'' + 2a'^2 + 2k)\sin^2\theta, \tag{13}$$

Calcul scalaire de Ricci, pour la métrique RW.

Sa forme générale est :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

Pour la métrique de Robertson Walker il vaut :

$$R = 6(aa'' + a'^2 + k)/a^2 \tag{14}$$

Nous avons toutes les informations concernant le membre de gauche de l'équation d'Einstein. Reste à calculer celles du membre de droite pour obtenir l'équation qu'il va falloir résoudre pour déterminer l'espace-temps (l'univers) concerné.

Le Tenseur Energie Impulsion d'un fluide parfait (membre de droite)

Considérons ce tenseur Energie Impulsion (La composante $T^{\mu\nu}$ du tenseur Energie Impulsion est le flux de la composante p^μ de la quadri Impulsion à travers une hyper surface définie par x^ν constant), d'abord sous sa forme la plus simple, en Relativité Restreinte dans un référentiel inertiel en métrique de Minkowski (15 bis).

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_\mu U_\nu + p \cdot \eta_{\mu\nu} = \text{diag} (\rho, p, p, p) \quad (15 \text{ bis})$$

On rappelle que sa généralisation dans un référentiel quelconque, dans l'hypothèse d'un fluide parfait isotrope dans son référentiel repos, vaut :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_\mu U_\nu + p \cdot g_{\mu\nu} \quad (15)$$

où ρ et p sont respectivement la densité d'énergie et la pression mesurées dans le référentiel repos et U_μ est la quadri -vitesse du fluide.

Il est clair qu'à un fluide isotrope dans un référentiel on peut faire correspondre une métrique isotrope dans un référentiel. Faisons coïncider ces deux référentiels.

Le fluide sera alors au repos en coordonnées comobiles :

$$\text{La trace est donnée par : } T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p \text{ et } T^\mu{}_\nu = \text{diag} (-\rho, p, p, p) \quad (19)$$

Conservation (covariante) de l'énergie.

L'énergie (grandeur associée au temps) et sa conservation, n'est pas un concept simple en relativité générale. Considérons la composante zéro $\nabla_{\mu} T^{\mu}_0$ de l'équation de "conservation de l'énergie", nous allons en tirer des lois simples. En particulierisant l'équation de la dérivée covariante par les données de notre problème $\nabla_{\mu} T^{\mu}_0$, et en utilisant les symboles de Christoffel que nous avons calculés en (12), on obtient :

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_0 = \partial_{\mu} T^{\mu}_0 + \Gamma_{\mu}^{\mu}{}^0 \cdot T^0_0 - \Gamma_{\mu}^{\lambda}{}^0 \cdot T^{\mu}_{\lambda} = - \partial_0 \rho - 3 (a'/a) (\rho + p) = 0 \quad (20)$$

Equation d'état

Relation entre la densité de matière et la pression

Il faut une équation d'état, relation entre ρ et p . Tous les fluides parfaits, applicables en Cosmologie, conduisent à l'équation d'état très simple (21) où w est une constante dépendant seulement du fluide :

$$p = w \cdot \rho \quad (21)$$

On rappelle que : $T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} + p \cdot g_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie impulsion du fluide parfait, en multipliant (20) par a^3 on déduit:

$$d(\rho \cdot a^3) / dt = a^3 (\rho' + 3 p \cdot a'/a) = - p \cdot d(a^3) / dt . \quad (20 \text{ bis})$$

La variation d'énergie dans un volume donné, quand l'univers s'étend, est égale à la variation

volume multipliée par la pression (l'expansion est adiabatique). En remplaçant p par sa valeur dans (21), (20bis) devient :

$$\rho' / \rho = -3 (1 + w) a'/a \quad (22)$$

$$\rho = k.a^{-3.(1+w)} \quad (23)$$

C'est l'équation (23) qui résulte de (22) par intégration qui détermine l'évolution de la densité liée à la variation du facteur d'échelle, en fonction des proportions relatives de matière et de rayonnement (et de vide).

1- Univers composé de matière seulement ($w = 0$), la variation est évidemment en a^{-3} , soit

$$\rho.a^3 = \text{constante.}$$

2- Univers composé de rayonnement seulement ($w = 1/3$), alors la variation est en a^{-4} .

($\rho.a^4 = \text{constante}$) :

Les photons subissent une variation d'énergie supplémentaire linéaire en a^{-1} décalage de la longueur d'onde

3- Univers composé de vide seulement ($w = -1$) : $\rho = \text{constante}$

Fluides galactiques

La poussière et le rayonnement sont les deux exemples les plus connus de fluides galactiques.

Fluide de type "matière"

La poussière est de la matière non relativiste sans collision, ni viscosité, où $w = 0$.

Les galaxies et les étoiles classiques sont les exemples typiques de "poussière" ou la pression est négligeable devant la densité d'énergie à grande échelle.

On qualifie de matière cette poussière et les Univers dont l'énergie est constituée majoritairement de "poussière" sont dit "dominés par la matière".

La densité d'énergie décroît naturellement en :

$$\rho = k. a^{-3} \tag{24}$$

Correspondant à la dilution d'une quantité constante de poussières. L'énergie, essentiellement constituée de l'énergie au repos de cette matière, est proportionnelle à la densité.

Fluide de type "rayonnement"

Le rayonnement peut être utilisé pour décrire soit du rayonnement électromagnétique présent soit des particules massives relativistes se comportant alors comme des photons, du moins pour l'équation d'état.

Bien que le rayonnement soit un fluide parfait et ait à ce titre un tenseur énergie impulsion donné par (15), nous savons que $T_{\mu\nu}$ peut aussi être exprimé en termes d'intensité de champ par (25), dont la trace est donnée par (26)

$$T^{\mu\nu} = (1/4\pi) (F^{\mu\lambda} \cdot F^{\nu}_{\lambda} - (1/4) \cdot g^{\mu\nu} \cdot F^{\lambda\sigma} \cdot F_{\lambda\sigma}) \quad (25)$$

$$T^{\mu}_{\mu} = (1/4 \pi) (F^{\mu\lambda} \cdot F_{\mu\lambda} - (1/4) \cdot (4) \cdot F^{\lambda\sigma} \cdot F_{\lambda\sigma}) = 0 \quad (26)$$

Comme il est aussi égal à :

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho) U_{\mu} U_{\nu} + p \cdot g_{\mu\nu}, \quad (15)$$

Dont la trace :

$$T = T^{\mu}_{\mu} = -\rho + 3p \quad (19)$$

L'équation d'état est

$$p = \rho / 3 \quad (27)$$

Un Univers dont la densité d'énergie est majoritairement sous forme de rayonnement est dit

"dominé par le rayonnement".

Sa densité d'énergie décroît comme :

$$\rho = k.a^{-4} \quad (28)$$

On voit que la densité d'énergie de rayonnement décroît plus vite que celle de la matière du fait que les photons dilués en a^{-3} comme la matière non relativiste subissent une perte d'énergie supplémentaire en a^{-1} par décalage vers le rouge lorsque l'Univers s'étend.

De même les particules relativistes sont ralenties du même facteur en coordonnées comobiles.

Fluide de type " énergie du vide"

L'équation d'Einstein, avec métrique de signature (- , + , + , +) et avec une constante cosmologique est :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \cdot T_{\mu\nu} - \Lambda \cdot g_{\mu\nu} \quad (29)$$

Elle a la même forme que sans constante cosmologique mais avec un tenseur énergie Impulsion supplémentaire pour le vide qui vaut :

$$T_{\mu\nu}^{\text{vide}} = - g_{\mu\nu} \cdot \Lambda / 8\pi G \quad (30)$$

Ceci a la forme d'un fluide parfait conformément à (15) :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} + p \cdot g_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \rho = - p = \Lambda / 8\pi G \quad (31)$$

Nous avons donc $w = - 1$, (référentiel repos) avec une densité d'énergie indépendante de $a(t)$, conforme à ce qu'on doit escompter d'une énergie du vide (à noter que à $\Lambda > 0$ correspond une pression "négative").

Comme la densité d'énergie de la matière et du rayonnement décroissent lorsque l'Univers s'étend, à long terme l'énergie du vide même faible mais constante l'emporte sauf si une contraction intervient avant le point "critique".

Si on dépasse ce point critique, on dit que l'Univers est dominé par l'énergie du vide.

Résolution de Equation d'Einstein.

Commençons par rappeler que résoudre une équation tensorielle c'est résoudre autant d'équations qu'il y a de composantes non nulles indépendantes. L'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (31bis)$$

peut être représentée par:

$$\begin{array}{c|ccc|c} R_{00} & 0 & 0 & 0 & | & 1 & | & T_{00} & 0 & 0 & 0 & | \\ \hline & R_{11} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2}(R) & | & -a^2/(1-kr^2) & | & = 8\pi G & | & T_{11} & 0 & 0 & | \\ \hline & & R_{22} & 0 & | & & | & -a^2r^2 & | & & | & T_{22} & 0 & | \\ \hline & & & R_{33} & | & & | & -a^2r^2\sin^2\theta & | & & | & T_{33} & | \\ \hline \end{array}$$

$R_{\mu\nu}$ = Tenseur de Ricci

$g_{\mu\nu}$ = Tenseur Métrique

$T_{\mu\nu}$ = Tenseur Impulsion/Energie diagonal

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)U^\mu \cdot U^\nu - p \cdot g^{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} = T^{\lambda\sigma} g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} = (p+\rho)U_\mu \cdot U_\nu - p \cdot g_{\mu\nu}$$

Le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci sont complètement déterminés par le tenseur métrique et ses dérivées premières et secondes (via une combinaison des symboles de Christoffel décrivant les connexions métriques, qu'on calcule à partir de la métrique de RW). Cette équation peut s'écrire¹:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \cdot T) \quad (32)$$

¹La résolution est plus simple sous cette forme. Montrer que cette forme se déduit simplement de (31bis) On élève l'indice ν , on le pose égal à μ , on contracte, on obtient $-R = 8\pi G T$, (T est la trace de $T_{\mu\nu}$) et on substitue sa valeur dans 31bis pour l'éliminer.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} = R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho} R = 8\pi G T_{\mu\rho}, \quad g^{\nu\rho} (R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho} R = 8\pi G T_{\mu\rho}) = R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu}{}^{\nu} R = 8\pi G T_{\mu}{}^{\nu}$$

$$R_{\mu}{}^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\mu}{}^{\mu} R = 8\pi G T_{\mu}{}^{\mu} = R - \frac{1}{2}(4)R = 8\pi G T \rightarrow -R = 8\pi G T$$

En reportant les résultats trouvés² en (13) pour le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$, en (7) pour le tenseur métrique de Robertson Walker $g_{\mu\nu}$, en (15) pour le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ et (19) pour sa trace T .

On trouve pour la composante 00 de l'équation d'Einstein: $R_{00} = 8\pi G (T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T)$

$$R_{00} = -3a''/a, \quad g_{00} = -1, \quad T_{00} = \rho \quad \text{et} \quad T = -\rho + 3p$$

L'équation pour $\mu\nu = 00$ (temps) est alors :

$$-3a''/a = 4\pi G (\rho + 3p) \quad (33)$$

Et pour la composante spatiale 11 de l'équation d'Einstein : $R_{11} = 8\pi G (T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T)$

$$R_{11} = (aa'' + 2a'^2 + 2k)/(1 - kr^2) \quad \text{et} \quad g_{11} = a^2/1 - kr^2, \quad U_1 = 0, \quad \text{avec:} \quad T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_{\mu} U_{\nu} + p \cdot g_{\mu\nu}$$

$T_{11} = p \cdot (a^2/1 - kr^2)$, l'équation pour $\mu\nu = 11$ (espace) donne:

$$a''/a + 2(a'/a)^2 + 2k/a^2 = 4\pi G (\rho - p) \quad (34)$$

(Du fait de l'isotropie de l'espace, les autres $\mu\nu = 22 = 33$, produisent la même équation).

² $ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot [(dr^2/1 - kr^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)] = -dt^2 + a^2(t) \cdot d\sigma^2$ (7), $R_{00} = -3a''/a$, $R_{11} = (aa'' + 2a'^2 + 2k)/(1 - kr^2)$, (13)

Equations de Friedmann

Utilisons (33) pour éliminer les dérivées secondes de (34), et simplifions on obtient:

$$\mathbf{a''/a = - (4\pi G/3).(\rho + 3 p)} \quad (35)$$

$$\mathbf{(a'/a)^2 = 8\pi.G.\rho /3 - k/a^2} \quad (36)$$

Remarquons que ρ représente dans le cas général $\rho_{\text{tot}} = \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{rad}} + \rho_{\Lambda} + \dots$ que l'on peut calculer séparément :

ρ_{mat} est la densité de matière non relativiste,

ρ_{rad} se calcule à partir de l'expression du tenseur énergie impulsion exprimé par le tenseur intensité champ électromagnétique cf (25), (27) ,

ρ_{Λ} est donné par (30) et (31).

Cet ensemble de deux équations forme l'équation de Friedmann, associé à la métrique de la forme (7), il définit les Univers de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) . Lemaître a généralisé cette équation en réintroduisant Λ (1925-27, synthèse en 1932)

Il est remarquable de penser que cette équation a été établie alors que l'univers se réduisait aux étoiles fixes!

Les Univers possibles

Terminologie :

Constante de Hubble

Le taux d'expansion est caractérisé par le paramètre de Hubble qui a les dimensions de l'inverse d'un temps,

$$H = \dot{a}/a \quad (37)$$

Sa valeur aujourd'hui est la constante de Hubble, H_0 . Les estimations donnent 70 km/sec/Mpc. ("Mpc" "Mégaparsec", soit 3×10^{24} cm.). Notons que nous devons diviser \dot{a} par a pour obtenir une quantité mesurable car l'échelle globale a qui est le "rayon de l'Univers" n'est pas accessible directement.

Facteur d'échelle a , paramètre de décalage spectral z .

On voit dans l'expression de la métrique que le facteur $a(t)$ donne l'échelle de la métrique d'espace. Lorsqu'on détecte un signal électromagnétique (le RFC par exemple) aujourd'hui à t_0 alors que le rayon de l'univers est de a_0 , il a été émis à un temps t_1 alors que le rayon de l'univers était de a_1 .

On appelle : a_1/a_0 le facteur d'échelle

($\sim 10^{-3}$ pour le RFC par exemple) et

$$z = (\lambda_0 - \lambda_1) / \lambda_1 = (a_0 / a_1)^{-1}$$

qui ne dépend que des facteurs d'échelle à l'émission et à la réception

Paramètre de décélération³

$$q = a \cdot a'' / a'^2 = (a'' / a') / (a' / a) \quad (38)$$

On verra le rôle essentiel que joue ce paramètre dans l'approche contemporaine de détermination du type d'Univers dans lequel nous vivons (il indique la manière dont le facteur d'échelle évolue !!)

Paramètre de densité Ω

$$\Omega = 8\pi G\rho / 3H^2 = \rho / \rho_{\text{crit}} \quad (39)$$

avec

$$\rho_{\text{crit}} = 3H^2 / 8\pi G \quad (40)$$

ρ est la densité d'énergie totale ($\Lambda = 0$ pour l'équation de Friedmann).

Ce paramètre (qui change au cours du temps) est dit critique car l'équation de Friedmann (36) peut être écrite :

³Les premiers modèles prévoyant une décélération, on a gardé le vocable.

$$\Omega - 1 = k/H^2a^2 \quad (41)$$

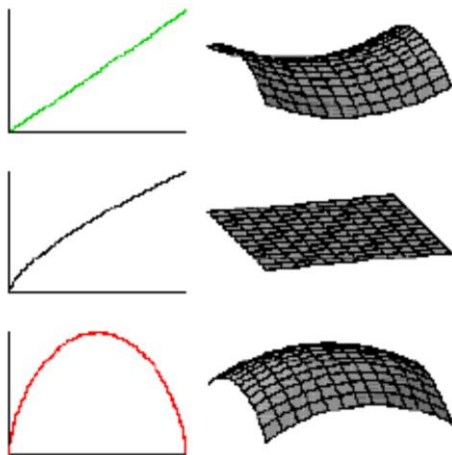
Ω est le paramètre de densité total avec $\Omega_\Lambda = 0$ dans l'équation de Friedmann et $\Omega_\Lambda \neq 0$ dans l'équation de Lemaître.

Le signe de k est déterminé en fonction de la valeur de Ω par rapport à 1 (H^2a^2 est positif).
Nous avons:

$\rho < \rho_{\text{crit}} \leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k = -1 \leftrightarrow$ Univers ouvert.

$\rho = \rho_{\text{crit}} \leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0 \leftrightarrow$ Univers plat.

$\rho > \rho_{\text{crit}} \leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k = 1 \leftrightarrow$ Univers fermé.



Le paramètre de densité nous indique donc laquelle des trois géométries de Robertson-

Walker décrit notre Univers. On comprend l'intérêt que suscite sa détermination précise qui est l'objet d'une intense activité.

Etude qualitative de l'équation de Friedmann

On peut résoudre rigoureusement l'équation de Friedmann dans quelques cas simples.

Avant de le faire, il est très utile d'étudier le comportement qualitatif de ses différentes possibilités.

Cas où la constante cosmologique est nulle

Si $\Lambda = 0$, et si l'univers rempli de fluides d'énergie positive. ($\rho > 0$) et de pression non négative ($p \geq 0$), l'univers "décélère". Posons donc pour le moment $\Lambda = 0$, et considérons le comportement d'Univers remplis de fluides d'énergie positive. ($\rho > 0$) et de pression non négative ($p \geq 0$).

$$a''/a = - (4\pi G/3).(\rho + 3 p) \tag{35}$$

Alors (35) impose $a'' < 0$. Comme nous observons l'Univers en ($a' > 0$), cela implique que l'Univers décélère.

Cela est logique, car la gravitation (attractive) agit contre l'expansion.

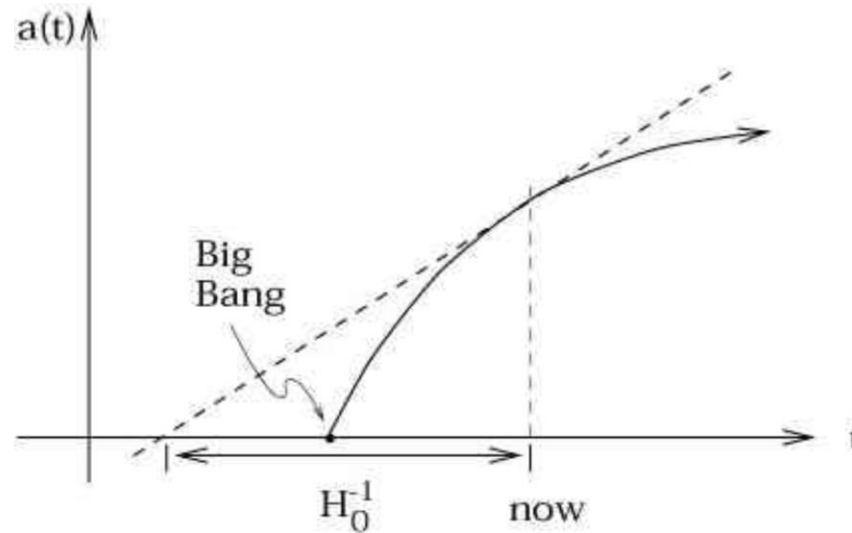
Cela nous indique que son taux d'expansion était beaucoup plus important dans le passé, et si on remonte suffisamment loin on tombe sur une singularité pour $a = 0$. Notons que si a'' vaut exactement zéro, $a(t)$ serait linéaire, et l'âge de l'Univers serait H_0^{-1} . Comme a'' est en fait négatif, l'univers doit être plus jeune que cela.

Singularité initiale : le big bang

Cette singularité pour $a = 0$ est le "Big Bang".

Le Big Bang représente la création de l'univers "Ex Nihilo".

Ce n'est pas une explosion de matière pré existante dans un espace-temps pré existant (cf théorème de singularité de Penrose avec $\rho > 0$ et $p \geq 0$).



Evolution de l'univers

L'évolution de l'univers dépend des valeurs de k . Pour les cas ouvert et plat, $k \leq 0$, (36) implique (42). Si $k \leq 0$, (Univers plats et ouverts) : Expansion éternelle

$$(a'/a)^2 = 8\pi G \cdot \rho / 3 - k/a^2 \quad (36)$$

$$a'^2 = (8\pi G/3) \cdot \rho \cdot a^2 + |k| \quad (42)$$

Le membre de droite est strictement positif (car $\rho > 0$), donc a' ne s'annule jamais. Comme nous observons $a' > 0$, il doit le rester indéfiniment. De ce fait les univers plats et ouverts sont en expansion "éternelle" ouverts temporellement et spatialement. Rappelons l'hypothèse de densité d'énergie strictement positive. Une densité d'énergie négative ne conduit pas à une expansion sans fin de l'univers même s'il est ouvert.

Vitesse d'expansion

En appliquant (20) on obtient :

$$d(\rho \cdot a^3)/dt = a^3 (\rho' + 3\rho a'/a) = -3p a^2 a' = -p \cdot d(a^3) \quad (43)$$

La quantité $d(\rho \cdot a^3)/dt$ est donc négative ou nulle si $p > 0$, ce qui est le cas d'Univers non dominé par le vide). La fonction ρa^3 décroît. Comme $\rho a^3 = \rho a^2 \cdot a$, cela implique que $\rho \cdot a^2$ doit s'annuler dans un univers en expansion infinie car $a \rightarrow \infty$. Alors (42) nous indique que:

$$a'^2 \rightarrow |k| \quad (45)$$

Rappelons que ceci est vrai pour $k \leq 0$, donc pour $k = -1$, la vitesse d'expansion a' tend vers 1, alors que pour $k = 0$ l'univers poursuit son expansion de plus en plus lentement.

Si $k = 1$, Univers fermés : Expansion jusqu'à un maximum puis contraction

Pour les univers fermés ($k = + 1$) l'équation (36) devient (46)

$$(a'/a)^2 = 8\pi G \cdot \rho / 3 - k/a^2 \quad (36)$$

$$a'^2 = (8\pi G/3) \cdot \rho \cdot a^2 - 1 \quad (46)$$

L'argument $\rho \cdot a^2 \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow \infty$ s'applique toujours, mais dans ce cas (46) devient négatif, ce qui ne peut arriver.

Donc l'univers ne s'étend pas indéfiniment, a possède une limite supérieure a_{\max} .

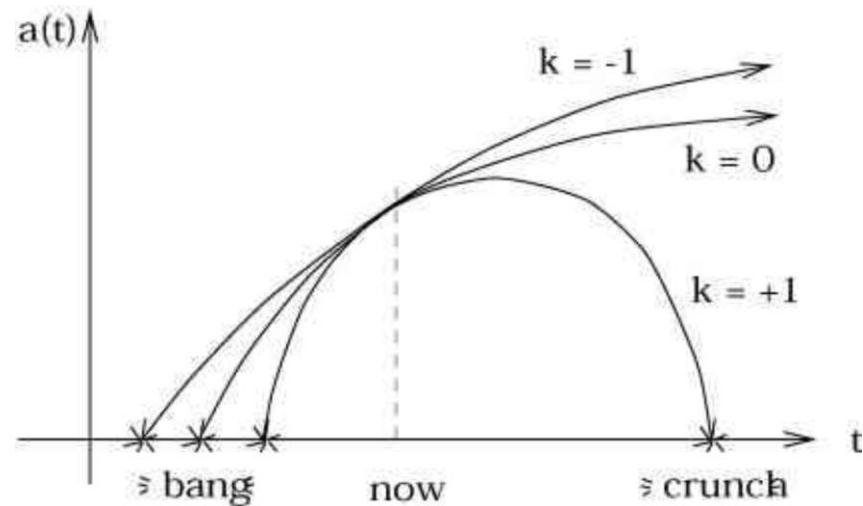
Quand a approche a_{\max} , (35) implique : $a'' \rightarrow - (4\pi G/3) \cdot (\rho + 3 p) \cdot a_{\max} < 0$ (47)

Donc a'' atteint une valeur finie et négative à ce point, lorsque a atteint a_{\max} il commence à décroître et comme $a'' < 0$, il va inexorablement se contracter vers zéro: le Big Crunch .

De ce fait les univers fermés (sous réserve des hypothèses ρ positif et p non négatif) sont fermés en temps et en espace.

A noter que $a(t)$ peut être interprété comme le rayon physique de l'hypersphère à l'instant t.

Synthèse de l'évolution



Solutions exactes de l'équation de Friedmann

Univers de FRW dominés par la matière

Pour les univers dominés par la matière ($p = 0$), on peut utiliser l'angle de développement $\Phi(t)$, plutôt que t comme paramètre direct. Les solutions sont alors, avec C défini par (51) :

Univers ouverts

$$a = C/2 (\cosh \Phi - 1) , t = C/2 (\sinh \Phi - \Phi) , \quad k = - 1 \quad (48)$$

Univers plats

$$a = (9C/4)^{1/3} \cdot t^{2/3} , \quad k = 0 \quad (49)$$

Univers fermés

$$a = C/2 (1 - \cos \Phi) , t = C/2 (\Phi - \sin \Phi) , \quad k = + 1 \quad (50)$$

où on a posé : $C = (8\pi G/3) \cdot \rho \cdot a^3 = \text{Constante}$ et $r = \sinh \Phi$ ou $r = \sin \Phi$ (51)

Univers dominés par le rayonnement :

Alors $p = \rho / 3$, on a :

$$\text{Univers ouverts} \quad a = B^{1/2} [(1 + B^{-1/2} \cdot t)^2 - 1]^{1/2} \quad k = -1 \quad (52)$$

$$\text{Univers plats} \quad a = (4B)^{1/4} \cdot t^{1/2} \quad k = 0 \quad (53)$$

$$\text{Univers fermés} \quad a = B^{1/2} [1 - (1 - B^{-1/2} \cdot t)^2]^{1/2} \quad k = +1 \quad (54)$$

$$\text{Où cette fois nous avons défini : } B = (8\pi G/3) \cdot \rho \cdot a^4 = \text{Constante} \quad (55)$$

Ces solutions exactes possèdent bien les propriétés que nous leur avons attribuées à priori.

Univers dominés par le vide

Soit ρ soit p va être négatif, en contradiction avec les hypothèses faites avant pour déterminer le comportement général de $a(t)$.

Dans ce cas la correspondance entre ouvert / fermé et expansion sans fin et re-contraction ne s'applique plus.

Commençons par considérer $\Lambda < 0$.

Dans ce cas (31) montre que Ω est négatif, et de (41), on voit que ceci ne peut arriver que si $k = -1$, on obtient alors :

$$a = (-3/\Lambda)^{1/2} \cdot \sin [(-\Lambda/3)^{1/2} \cdot t] \quad (56)$$

Il y a aussi une solution ouverte ($k = -1$) pour $\Lambda > 0$, donné par :

$$a = (3/\Lambda)^{1/2} \cdot \sinh [(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t], \quad k = -1 \quad (57)$$

Un Univers plat dominé par le vide doit avoir $\Lambda > 0$, et la solution est (Univers de De Sitter).

$$a \sim \exp \pm [(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t], \quad k = 0 \quad (58)$$

Tandis qu'un univers fermé doit aussi avoir $\Lambda > 0$, et satisfaire

$$a = (3/\Lambda)^{1/2} \cdot \cosh [(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t], \quad k = 1 \quad (59)$$

Ces solutions sont d'apparence trompeuse car toutes, sauf (56) qui correspond à l'espace anti De Sitter, représentent l'espace-temps De Sitter.

Type d'espace	Univers dominés par la matière ($\rho_m > 0, \rho_r = 0, \Lambda = 0$)	Univers dominés par le rayonnement ($\rho_m = 0, \rho_r > 0, \Lambda = 0$)	Univers dominés par le vide ($\rho_m = \rho_r = 0, \Lambda > 0$ ou $\Lambda < 0$)
Espace Ouvert $k = -1$	$a = C/2 (\cosh \Phi - 1),$ $t = C/2 (\sinh \Phi - \Phi),$ Expansion ∞	$a = \{ C' [(1 + t \cdot C'^{-1/2})^2 - 1]^{1/2}$ Expansion ∞	$a = (3/\Lambda)^{1/2} \cdot \sinh [(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $\Lambda > 0,$ Expansion ∞
			$a = (-3/\Lambda)^{1/2} \cdot \sin [(-\Lambda/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $\Lambda < 0$ Espace oscillant
Espace plat $k = 0$	$a = (9C/4)^{1/3} \cdot t^{2/3},$ Expansion ∞ critique	$a = (9C/4)^{1/4} \cdot t^{1/2},$ Expansion ∞ critique	$a \sim \exp \pm [(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $\Lambda > 0$ (en expansion ∞)
Espace fermé $k = +1$	$a = C/2 (1 - \cos \Phi),$ $t = C/2 (\Phi - \sin \Phi),$ Expansion finie, contraction	$a = \{ C' [1 - (1 - t \cdot C'^{-1/2})^2] \}^{1/2}$ Expansion finie, contraction	$a = (3/\Lambda)^{1/2} \cdot \cosh [(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $\Lambda > 0, ($ en expansion $\infty)$
Paramètre	$C = (8\pi G/3) \cdot \rho \cdot a^3 = \text{Constante}$	$C' = (8\pi G/3) \cdot \rho \cdot a^4 = \text{Constante}$	

Dans quel Univers vivons-nous ? La situation a pas mal évolué.

Vers 1995, on supposait l'univers critique mais fait de matière, $k = 0$, $\Omega_m = 1$:

Les paramètres étaient :

$H_{\text{crit}} = (8\pi G\rho / 3)^{1/2}$: Constante de Hubble critique (65 km/s par Mpc)

$T = 2/3H_{\text{crit}}$: T (environ 10^{10} ans) est l'âge de l'univers en fonction de H_{crit} .

$a = (t/t_0)^{2/3}$: a est le facteur d'échelle , t_0 l'âge aujourd'hui, t l'âge à considérer

Pendant l'ère radiative cette loi était : $a = (t/t_0)^{1/2}$

$d(\text{Ga.l}) = a.D$: D distance de Hubble actuelle, d distance à l'émission des photons

Horizon (particule) : C'est le point le plus éloigné dont nous recevons aujourd'hui des photons. Dans ce modèle, il s'accroît plus vite que la taille de l'univers : on voit une part de plus en plus importante de l'univers, au bout d'un temps infini on verrait l'univers entier (donc le big bang)

Calculons cet horizon :

Utilisons la métrique de Robertson Walker.

Pour un photon $ds^2 = 0$ donne : $dt/a(t) = dr.(1-kr^2)^{-1/2}$ en intégrant:

$$\int_{t_e}^{t_0} dt/a(t) = \int_0^r dr.(1-kr^2)^{-1/2}$$

Le membre de gauche donne le temps de parcours de la lumière (en coordonnées co-mobiles) entre le temps d'émission t_e et aujourd'hui t_0 , celui de droite donne la distance parcourue en coordonnées co-mobiles (nous sommes à $r = 0$ dans ces coordonnées). La distance de Hubble d_H (aujourd'hui) s'obtient en multipliant par le facteur d'échelle aujourd'hui $a_0(t)$. L'horizon s'obtient en faisant tendre le temps d'émission vers 0.

$$d_H = a_0(t) \int_0^r dr.(1-kr^2)^{-1/2} = a_0(t) \int_0^{t_0} dt/a(t)$$

En prenant $a(t) = t^{2/3}$, $a_0(t) = t_0^{2/3}$, et la primitive de $t^{-2/3}$ valant $3.t^{1/3}$ on voit que cela donne:

$$d_H = a_0(t) \int_0^r dr.(1-kr^2)^{-1/2} = a_0(t) \int_0^{t_0} dt/t^{2/3} = (t_0^{2/3})(3.t_0^{1/3}) = 3t_0.$$

On pourrait vérifier que pendant la phase radiative $a(t) = (t/t_0)^{1/2}$ on obtiendrait $2t_0$.

Dynamique de l'expansion dans un tel univers.

En fait l'expansion a enchaîné une phase radiative (très courte), une inflation (brève mais intense), reprise de la phase radiative (150 000 ans) puis phase domination matière qui sera suivie d'une domination de la constante cosmologique.

Parcours de photons en univers critique (le RFC qu'on reçoit aujourd'hui)

Dans l'hypothèse d'un univers critique, les photons du RFC que nous captions maintenant ont été émis à $T_0 + 380\,000$ ans environ, lorsque le facteur d'échelle " $a(t)$ " de l'univers était de $1/1089$. La constante de Hubble valait environ 1.644 millions de km/s par méga parsec ce qui veut dire que deux objets, distants d'environ 0.18 Mpc, avaient une vitesse de récession égale à c .

Comme le point (alors dans le RFC à 3000°K) qui dans le futur (après expansion) allait abriter la terre était distant du point d'émission du photon, qu'on observe aujourd'hui, d'environ 11 Mpc (distance de Hubble) à cette époque, la vitesse de récession était bien supérieure à c .

Les photons, que nous recevons aujourd'hui, ont commencé à s'éloigner de nous, emportés par l'expansion, avant de commencer à se rapprocher lorsque le rythme d'expansion s'est ralenti et nous atteindre aujourd'hui.

Ce point d'émission des photons est aujourd'hui distant d'environ 12 Gigaparsec (facteur d'échelle environ de 1100 et facteur 3 entre l'âge de l'univers T et sa dimension liée à l'expansion dans ce type d'univers).

Cas d'univers dominé par la matière et une constante cosmologique non nulle

Dans ces conditions (on rappelle qu'on a posé $c = 1$):

Les équations de Friedmann (36) et (35) deviennent les équations de Friedmann Lemaître.

L'équation de Friedmann (36) : $(a'/a)^2 = 8\pi G \rho_{\text{tot}}/3 - k/a^2$, en prenant en compte: $\rho_{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$ dans $\rho_{\text{tot}} = (\rho_m + \rho_{\Lambda})$ peut s'écrire: $a'^2(t)/a^2(t) = 8\pi G \rho / 3 - k/a^2(t) + \Lambda/3$ (36')

ou $a'^2(t) = (8\pi/3)(G \cdot \rho_{0\text{rad}} \cdot a_0^4) a^{-2}(t) + \{(8\pi/3)(G \cdot \rho_{0m} a_0^3)\} a^{-1}(t) - k + (\Lambda/3) a^2(t)$ (36bis)

ou $\Omega_{\text{tot}} - 1 = k/H^2 a^2$ (41), $\Omega_{\text{tot}} = 8\pi G \rho_{\text{tot}}/3H^2$ (41 bis)

avec : $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \{\Omega_{\text{ray}}\}$ Soit: $\Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1$ (41 ter)

$\Omega_m = 8\pi G \rho_m / 3H^2$, $\Omega_{\Lambda} = \Lambda/3H^2$, $\Omega_k = -k/a^2 H^2 =$ paramètre de densité de courbure.

En négligeant, $\Omega_{\text{ray}} = (8\pi G \rho_{\text{ray}})/3H^2 \sim \Omega_m \cdot 10^{-6}$, avec $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$

L'équation de Friedmann (35): $a''/a = -(4\pi G/3) \cdot (\rho_{\text{tot}} + 3 p_{\text{tot}})$ peut s'écrire:

$$a''/a = - (4\pi G/3) \cdot [(\rho_m + 3 p_m) + (\rho_{\Lambda} + 3 p_{\Lambda})] = - (4\pi G/3) \cdot \rho_m + \Lambda/3 \quad (35\text{bis})$$

Remarquons que (36 bis), en négligeant l'énergie de rayonnement et la pression de la matière, est de la forme : $a'^2 = C_1 \cdot a(t)^{-1} - k + C_2 \cdot a^2(t)$, avec C_1 , C_2 constantes, donc le problème revient à étudier le signe de cette fonction pour $k = 1, -1, 0$ correspondant aux différentes topologies pour $a(t) > 0$ et C_1, C_2 .

Discussion générale des types d'Univers possibles, dans ce cas, à partir de (36 bis)

Si $\Lambda < 0$ alors $a(t)$ a une limite supérieure, $\forall k$, car le terme de gauche doit être positif, alors selon (35 bis) comme $a'' < 0$ pour a_{\max} : univers oscillant

Si $\Lambda > 0$ et $k = 0$ ou $k = -1$, on voit que quand a est grand, l'univers entre dans une phase d'expansion exponentielle.

Si $\Lambda > 0$ et $k = +1$, selon les valeurs relatives de Λ et ρ , nous avons:

Si $\Lambda = \Lambda_{\text{crit}}$: Univers statique (Einstein)*si $a' = a'' = 0$ simultanément, ce qui correspond à $\Lambda_{\text{crit}} = 1/a_0^2 = 4\pi G\rho$

Si $\Lambda > \Lambda_{\text{crit}}$ alors la force répulsive l'emporte: Expansion infinie et exponentielle sur la fin,


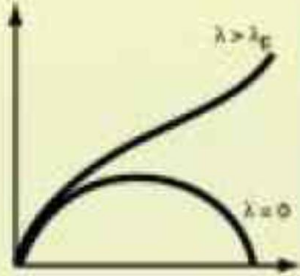

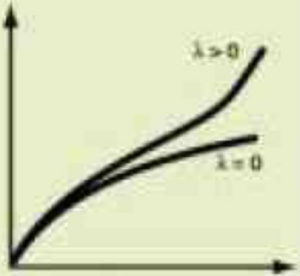

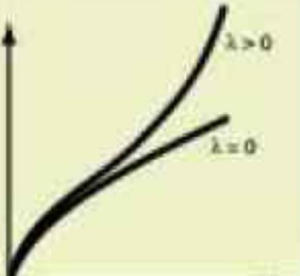
Si $\Lambda < \Lambda_{\text{crit}}$, il y a un intervalle de a ($a_{\text{inf}} < a < a_{\text{sup}}$) qui rend (36 bis) négatif (interdit).

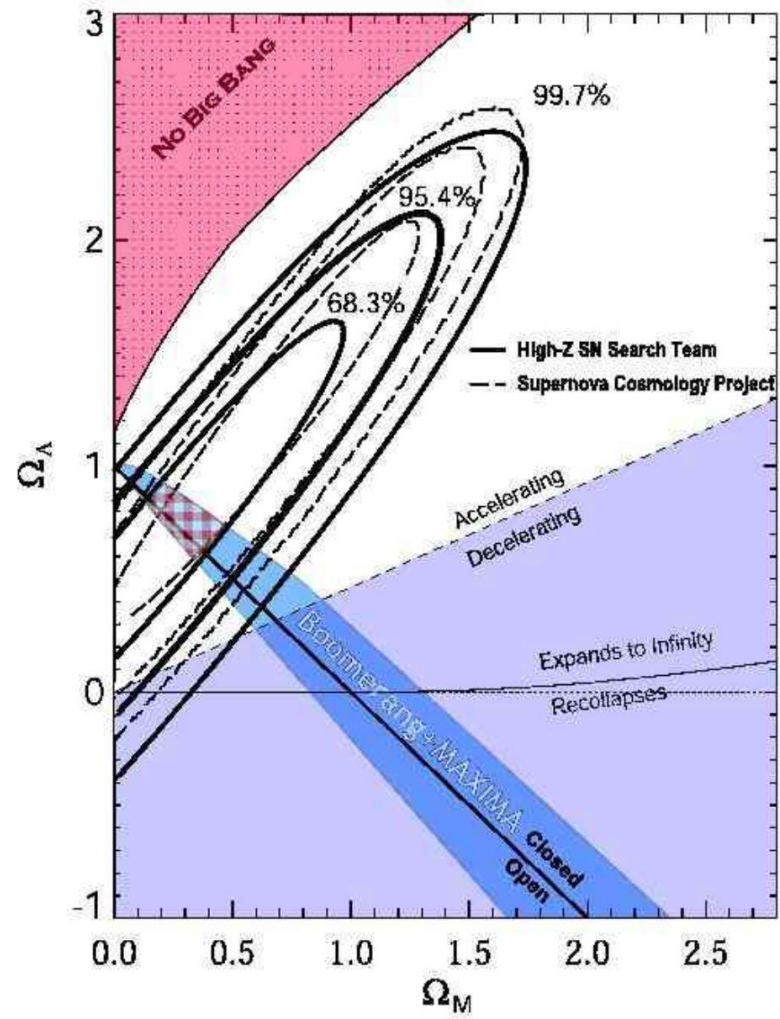
Selon les conditions initiales, on peut avoir un Univers oscillant (entre 0 et a_{inf}) ou en

expansion éternelle et même une contraction avec rebond à a_{sup} , (pas de Big bang)!

Synthèse de l'évolution de l'Univers ref [6]

Matière + Rayonnement, $\Lambda=0, \Lambda < 0$						Matière + Rayonnement, $\Lambda > 0, V_{limite} = \Lambda^{-1/2} ac/3$						
t	a	a''	a'	Ω	k	t	a	a''	a'	Ω	k	Λ
0	0		$+\infty$			0	0	< 0	> 0			$+e$
			\downarrow			tM	aMin	< 0	$= 0$			
\downarrow	\downarrow		> 0			tc	0	< 0	$-\infty$			
			\downarrow			$aMin < a < aMax$ Interdit						
						0	aMax	\forall	> 0			
tM	aMax	< 0	$= 0$	> 1	1	∞	$\rightarrow \infty$	> 0	V_{limite}	> 1	1	
				ou	ou	0	a- init	> 0	< 0			
			\downarrow	$\forall \Omega$	$\forall k$	tr	aMax	> 0	$= 0$			
\downarrow	\downarrow		< 0	si	si	∞	$\rightarrow \infty$	> 0	V_{limite}			$< \Lambda c$
			\downarrow	$\Lambda < 0$	$\Lambda < 0$	\forall	$\Lambda^{-1/2}$	$= 0$	$= 0$			$= \Lambda c$
tc	0		$-\infty$			0	0	\forall	> 0			$> \Lambda c$
0	0		$+\infty$	≤ 1						≤ 1	0,-1	$+e$
$+\infty$	$+\infty$		0, c		0, -1	$+\infty$	$+\infty$	> 0	V_{limite}			$+\infty$

courbure	topologie	dynamique	destin
$K > 0$  sphérique	fini		ouvert si λ grand fermé
$K = 0$  Euclidien	fini ou infini		ouvert
$K < 0$  hyperbolique	fini ou infini		ouvert



Cas particulier $\Omega_{0m} (\sim 0,3) + \Omega_{\Lambda} (\sim 0,7) \sim 1$

Ces paramètres sont suggérés par les hypothèses les plus récentes.

Aujourd'hui quelle que soit sa topologie, aujourd'hui l'Univers accélère (après avoir longtemps décéléré).

En reportant ces valeurs dans: $a''/a = - (4\pi G\rho_m)/3 + \Lambda/3$ (35bis)

on constate que $a''/a > 0$.

Comme il a commencé par décélérer, $a'' = 0$ donne les paramètres du point d'inflexion.

Remarquons que s'il n'avait pas décéléré nous ne pourrions pas voir de galaxies avec $z > 1$, ni le RFC.

Quelle topologie pour l'Univers ?

On en déduit qu'aujourd'hui $\Omega_k \sim 0$, ce qui ne veut pas dire que l'Univers est de topologie plate ($k = 0$)! , car comme Ω_k ne peut pas strictement être égal à 0:

Il est soit inférieur ($k = -1$) soit supérieur ($k = 1$).

On a vu qu'il y avait des solutions pour les 3 valeurs de k .

Remarque sur la variation de Ω_{tot} au cours du temps

Par contre $\Omega_{\text{tot}}(t) = \Omega_{0m}(t) + \Omega_{\Lambda}(t) = 1 \pm |\varepsilon(t)|$ implique que Ω_{tot} était incroyablement proche de 1, au tout début de l'univers : la différence par rapport à 1 va être multipliée par la puissance du rapport des temps par exemple 10^{46} depuis $t=10^{-30}$ sec.

En négligeant Ω_{Λ} au début de l'univers (là où les facteurs d'échelle ont le plus varié), et en écrivant:

$$\Omega_{\text{tot}}(t) - 1 = \pm \delta(t) = k/a^2 H^2, \text{ avec } H^2 = 8\pi G\rho/3$$

en fonction du modèle d'expansion, (41 bis) donne:

$$\pm \delta(t) = (k/a^2)/8\pi G\rho/3, \quad (41 \text{ quater})$$

ρ = densité d'énergie varie en a^{-4} (rayonnement) ou a^{-3} (matière),

$$\pm \delta(t) \sim a^2(t) \sim t, \quad \text{en période de domination rayonnement,}$$

$$\pm \delta(t) \sim a(t) \sim t^{2/3} \quad \text{en période de domination matière.}$$

Rôle de l'inflation primordiale

De la même formule, on constate que l'inflation a eu un effet contraire, en effet pendant

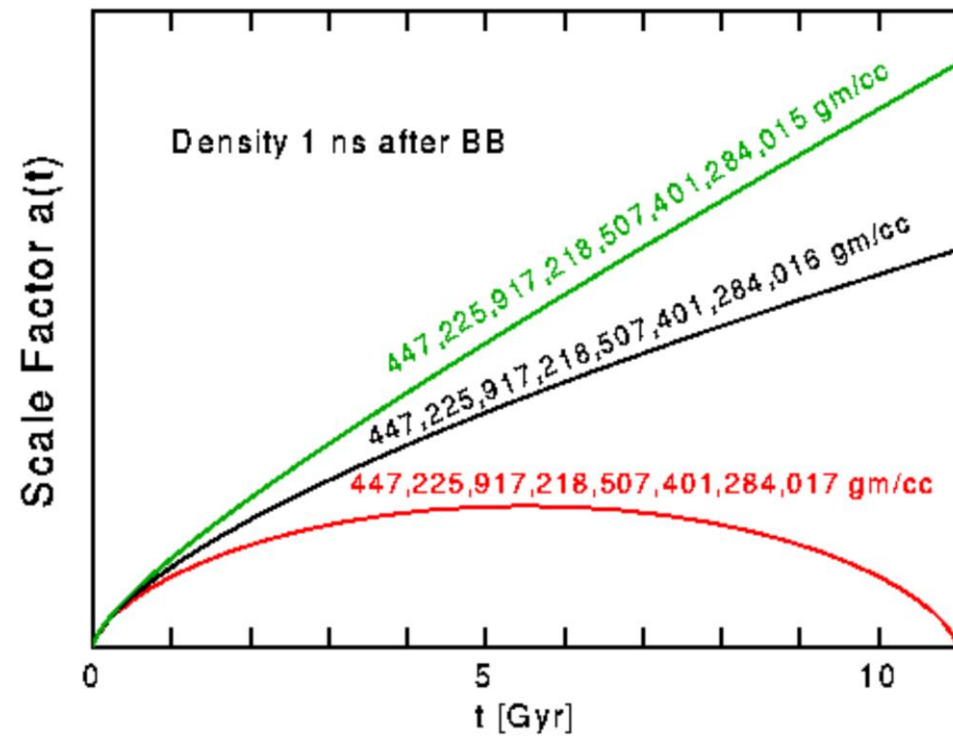
l'inflation, le facteur a s'est accru exponentiellement ($\sim 10^{43}$) alors que la densité d'énergie est restée constante (Λ).

La même formule 41 quater donne : $\delta(t) \sim a^{-2}(t)$ soit une réduction de l'écart à 1 de 10^{86} .

Ceci a lissé l'Univers. Remarquons que si la constante cosmologique redevient prépondérante δ va diminuer.

Bien que les différents Ω varient énormément, avec l'expansion, l'Univers ne change pas de topologie !

En effet $\delta(t)$ ne change pas de signe d'après (41 quater), seule sa valeur absolue change (beaucoup).



Constante Cosmologique positive correspond à une "répulsion"

En supposant la pression nulle (cas poussière), si on place à la surface d'une sphère de coordonnée comobile fixe r (rayon physique $a.r$, masse M) une particule de test de masse m , cette particule va être accélérée par "l'expansion" selon:

$$a''/a = - (4\pi G\rho_m)/3 + \Lambda/3, \quad (35\text{bis})$$

Cette équation est l'équation (35) avec constante cosmologique. Ceci peut s'écrire :

$$d^2(a.r)/dt^2 = -4\pi.a.r.G\rho_m /3 + a.r. \Lambda /3,$$

avec :

$$M = 4\pi\rho_m (a.r)^3/3,$$

on obtient :

$$d^2(a.r)/dt^2 = -GM/(a.r)^2 + a.r. \Lambda/3$$

On reconnaît la force d'attraction newtonienne :

$$-GM/(a.r)^2$$

La constante cosmologique (si $\Lambda > 0$) qui suit est de signe opposé et agit donc répulsivement : (Λ introduite pour équilibrer la gravitation).

Influence de la densité sur le destin de l'Univers des paramètres Cosmologiques

Nous aimerions déterminer avec précision la valeur des paramètres clés pour savoir quel destin nous attend.

En particulier H_0 , du fait de sa relation avec l'âge de l'Univers.

Pour un Univers de matière pure, avec $k = 0$, (49) implique que l'âge est $2 / (3H_0)$.

D'autres possibilités permettraient de prédire des relations similaires. Connaître Ω , détermine k par (41).

D'après la définition (39) de Ω , ceci signifie que nous voulons à la fois H_0 et ρ_0 . Malheureusement ces paramètres sont difficiles à mesurer précisément en particulier le paramètre ρ .

Distance de luminosité

Lorsqu'on connaît la luminosité absolue (chandelles standards telles que Céphéides, supernovas, galaxies selon type), la luminosité apparente permet de déterminer la distance. Mais attention du fait de l'expansion, la longueur d'onde est décalée vers le rouge, mais ce n'est pas le seul effet : le nombre de photons également reçu par un détecteur est réduit dans le même rapport (par rapport à un espace statique du fait que le temps entre deux photons émis s'allonge).

Effet de courbure

On suppose dans la suite un effet de courbure négligeable (l'Univers paraît plat, et il l' était plus hier qu'aujourd'hui)

Rappel des méthodes classiques et des résultats: Situation en 1995 (univers où $\Lambda=0$)

La détermination de ρ et de H_0 dont dépend Ω sont essentiels pour le devenir de l'Univers.

Estimation directe de ρ

La densité cosmique ρ a d'abord été estimée par observation " directe" et comptage des objets cosmiques dans un large spectre (des ondes radio aux rayons γ), en étalonnant la masse de ces objets.

La masse des galaxies par exemple dépend de leur type, de leur nombre d'étoiles estimé, de leur comportement gravitationnel lorsqu'ils sont en interaction avec d'autres galaxies.

De même, on a estimé la masse des étoiles, du gaz des poussières, le tout étant affiné par un traitement statistique.

Compte tenu du nombre d'hypothèses sur lesquelles repose cette estimation, donc de la fragilité de ces estimations, il est essentiel de recouper un maximum d'informations provenant de méthodes, si possible, indépendantes pour les crédibiliser.

Cette observation ne donne qu'une projection en 2D sur la voûte céleste, il faut d'autres

informations pour déterminer la distance qui permet de calculer le volume et donc la densité.

La méthode directe géométrique ne s'applique que pour les proches distances.

La loi de Képler permet de déterminer avec précision la masse des étoiles doubles ou multiples a une échelle un peu plus lointaine.

Les céphéides (2 types), chandelles standards caractérisées par leur signature spectrale permettent d'aller beaucoup plus loin.

Enfin le Décalage vers le rouge est appliqué pour les objets très lointains (à appliquer avec circonspection comme l'illustre la suite).

La spectrométrie galactique s'est révélée très productive à cet effet (heureusement que les raies ne sont pas "équidistantes" on n'aurait pas pu observer de décalage)

A noter que tout cela ne donne pas des résultats très précis et présuppose beaucoup ce qui fait l'objet de beaucoup de débats passionnés.

On dispose également d'autres informations "génériques" qui permettent de borner certains paramètres

L'âge de l'Univers (1995)

Comme l'univers est suffisamment vieux (il a au moins l'âge du système solaire, on lui prête avec une certaine fiabilité un âge de au moins 10 milliards d'années) on peut raisonnablement penser que sa densité est proche de la densité critique .

Tous les modèles montrent qu'avec une densité, surtout au début, même très peu différente de la densité critique la durée de vie des univers est fugace Soit ils se re-contractent soit ils s'évaporent très rapidement.

Et un âge tel que celui qu'on connaît prouve qu'au début de l'univers la densité devait être incroyablement proche de cette densité critique.

Avec l'expansion l'écart initial avec la densité critique (s'il n'est pas strictement nul) s'accroît car instable.

Nucléosynthèse primordiale

La composition en éléments légers (hydrogène, deuterium, tritium, hélium) résultant de la nucléosynthèse primordiale dans le modèle du "Big bang" chaud prédit que la masse volumique de la matière ordinaire doit représenter environ 5 % de la masse critique.

La valeur de la constante de Hubble mesurée

Avec une moyenne d'environ 70 km/s/Mparsec qui correspond à un âge de 10^{10} ans dans un Univers critique, ceci encadre les possibilités.

L'observation directe révèle un Univers beaucoup trop léger

On sait que cette estimation directe de matière visible ne rend compte au mieux que de 1% de la matière qui correspond à la densité critique estimée à partir de la constante de Hubble.

A la recherche de la matière invisible

Il y a donc de la matière indétectable par son rayonnement.

L'étude des rotations des galaxies (lois de Képler, la vitesse de rotation à une distance donnée dépend de la masse "centrale") nous indique une masse cachée d'au moins 5 fois la masse visible. On suppose donc un halo de matière qui doit s'étendre au-delà. Donc, de bonnes présomptions existent sur l'existence de matière ordinaire invisible (planètes géantes, naines brunes, MACHOs, nuages de gaz ténus, trous noirs, masse des neutrinos), à hauteur de cinq fois la matière visible. L'étude du mouvement local d'amas de galaxies nous conduit à porter ce chiffre à 50. Ce qui conduit à 50 % de la densité critique.

Une étude d'envergure sur 577 galaxies a mis en évidence des perturbations de vitesse par un grand attracteur, concentration de masse invisible équivalente à des centaines de milliers de galaxies situé à environ 200 Ma.l dans la direction de la constellation du Centaure.

La masse manquante détectée ?

Vu la précision très relative, on a environ la densité critique répartie comme suit

Matière visible ordinaire (baryonique)	~ 1%
Matière invisible ordinaire (baryonique)	~ 4%
Matière invisible exotique (non baryonique)	~ 95%
Total	~100%

Tout semble pour le mieux dans le meilleur des mondes, et pourtant

Approche actuelle

Les éléments recueillis précédemment se heurtent un obstacle de taille, ils prédisent un Univers pas assez vieux compte tenu de la valeur de la constante de Hubble et du modèle d'Univers.

Certaines méthodes d'évaluation de l'âge des objets cosmiques, âge des amas globulaires, radioactivité des éléments à très longue période par exemple, prédisent un âge supérieur à 10 Gal. On connaît la validité relative de telles mesures, mais cela a conduit les astrophysiciens à s'interroger sur la nature de l'univers et la possibilité d'une **constante Cosmologique non** nulle et comment le détecter.

D'où la mise en place de nouvelles stratégies

Certains paramètres sont sensibles à la nature de l'Univers, les stratégies vont consister à les mesurer

- La distance de luminosité que l'on sait mesurer grâce aux chandelles standards (Etoiles caractéristiques dont on connaît la luminosité absolue) dépend de H_0 que l'on sait mesurer par d'autres moyens, de z décalage spectral, qu'on mesure directement et du paramètre de décélération q cf (78) qui lui-même dépend de la nature de l'Univers cf (60).

Nous allons pouvoir ainsi déterminer q et par la même la nature de notre Univers (matière,

constante cosmologique, on néglige l'énergie de rayonnement).

Avec une même constante de Hubble l'âge de l'Univers s'allonge s'il y a une constante cosmologique significative.

Notons que des paramètres qui ne dépendent que de z , ne fourniront pas d'information sur ce point.

- La mesure de l'anisotropie du rayonnement de fond cosmologique RFC à petite échelle angulaire (aujourd'hui $< 1^\circ$, demain $< 1'$), du fait du facteur z très élevé (1100), est très sensible à la nature de l'univers et nous renseigne sur la présence et l'ampleur d'une constante cosmologique.

Ces mesures ont donné des résultats très intéressants qui sont présentés ci après

Le paramètre de décélération q

Mais notons que le paramètre de décélération q est lié à Ω par (35):

$$q = -aa''/a'^2 = -H^{-2} \cdot a''/a' = (4\pi G/3H^2)(\rho + 3p) = (4\pi G/3H^2)\rho(1+3w) = \frac{1}{2} \sum_k \Omega_k (1+3w_k) \quad (60)$$

avec:

$$w_k = 0 \text{ pour la matière } \Omega_m = (8\pi G/3H_0^2)\rho_{0m},$$

$$w_k = 1/3 \text{ pour le rayonnement } \Omega_{\text{ray}} = (8\pi G/3H_0^2) \cdot \rho_{0\text{ray}}$$

$w_k = -1$ pour la constante Cosmologique $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2$

Si on néglige la contribution de l'énergie du rayonnement, on a:

$$q = (\Omega_m / 2) - \Omega_\Lambda \quad (60 \text{ bis})$$

La détermination de la nature de notre Univers par la distance de luminosité repose sur le principe suivant. Le facteur z ne dépend que de l'état "initial" et "final" ($f(a_1/a_0)$) de l'Univers et pas de la manière (qui est très différente selon sa nature) dont il a évolué de l'un vers l'autre. Le photon qui a voyagé a subi cette variation et y est sensible, pour une même différence de coordonnée r , la distance de luminosité va varier, donc avec (78) on peut, déterminer w (de quoi notre univers est fait) à partir des distances de luminosité mesurées

Détermination du décalage spectral dans un univers en expansion.

Pour comprendre comment on peut raisonnablement mesurer ces paramètres considérons le mouvement géodésique dans un Univers FLRW. Nous avons des vecteurs Killing de type espace mais pas de vecteur de Killing⁴ de type temps pour nous donner une notion de l'énergie conservée.

Pourtant nous avons un tenseur de Killing. Si $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ est la quadri vitesse des observateurs comobiles alors

⁴Un champ de vecteurs de Killing caractérise une isométrie (invariance de la métrique par une "translation" par ce champ).

$$K_{\mu\nu} = a^2 (g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu) \quad (61)$$

satisfait $\nabla_{(\sigma} K_{\mu\nu)} = 0$ (on peut le vérifier), et est donc un tenseur de Killing.

Cela signifie que si une particule a une quadri vitesse $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$, la quantité

$$K^2 = K_{\mu\nu} V^\mu \cdot V^\nu = a^2 [V_\mu V^\mu + (U_\mu V^\mu)^2] \quad (62)$$

Va être conservée sur la géodésique.

Examinons ce cas, d'abord pour les particules massives. Alors on a $V_\mu V^\mu = -1$, soit

$$(V^0)^2 = 1 + |V|^2 \quad (63)$$

Où $|V|^2 = g_{ij} V^i V^j$, comme $U_\mu V^\mu = U_0 V^0 = -V^0$, alors (62) implique

$$|V| = K/a \quad (64)$$

La particule alors ralentit dans le système de coordonnées comobiles quand l'univers s'étend.

C'est un vrai ralentissement dans le sens où un gaz de particules animées d'un mouvement relatif rapide va se refroidir quand l'univers s'étend

Le même phénomène se produit sur les géodésiques nulles. Dans ce cas $V_\mu V^\mu = 0$, et (62)

impliquent: $U_\mu V^\mu = K/a \quad (65)$

Mais la fréquence du photon mesuré par un observateur est $\omega = -U_\mu V^\mu$.

La fréquence du photon émis avec une fréquence ω_1 va alors être observé à une fréquence plus faible ω_0 du fait de l'expansion selon:
$$\omega_0 / \omega_1 = a_1 / a_0 \quad (66)$$

Le décalage spectral est une observable.

Les Cosmologistes aiment dénommer ceci par le terme z , décalage vers le rouge entre deux évènements, définis par le ratio de la variation en longueur d'onde :

$$z = \lambda_0 - \lambda_1 / \lambda_1 = a_0 / a_1 - 1 \quad (67)$$

Nous avons montré que ce décalage vers le rouge n'est pas un effet Doppler conventionnel. C'est l'expansion de l'espace et non pas la vitesse relative qui en est la source.

On peut mesurer le décalage vers le rouge car on connaît la longueur d'onde dans un référentiel au repos de diverses raies spectrales émises par des galaxies lointaines, donc on connaît le décalage subi pendant leur trajet entre leur temps d'émission t_1 et réception t_0 .

Rapport des facteurs d'échelle

On connaît le rapport des facteurs d'échelle à ces instants.

Mais on ne connaît pas les temps, les photons n'indiquant pas combien de temps s'est écoulé pendant leur trajet.

Il faut approfondir ce point pour obtenir cette information.

En gros, comme un photon se déplace à la vitesse de la lumière, son temps de trajet devrait être sa distance (unité c) Mais comment définir la distance d'une galaxie lointaine dans un univers en expansion.

La distance comobile n'est pas physique, car non mesurable et de surcroît on ne connaît pas la vitesse propre de cette galaxie.

La distance de luminosité est une observable.

Définissons la distance de luminosité comme :
$$d_L^2 = L / 4\pi F \quad (68)$$

où L est la luminosité absolue de la source et F le flux mesuré par l'observateur (énergie par unité de temps, unité de surface d'un détecteur donné). La définition vient du fait que dans un espace plat, pour une source à une distance d , le rapport du flux sur la luminosité vaut 1 divisé par la surface de la sphère centrée sur la source, $F/L = 1/A(d) = 1/4\pi d^2$.

Dans un Univers FLRW, cependant, le flux va être dilué.

La conservation des photons nous dit que le nombre total de photons émis par la source va traverser la sphère à la distance comobile r de l'émetteur.

Une telle sphère est à une distance physique $d = a_0 r$, où a_0 est le facteur d'échelle quand les photons sont observés.

Mais le flux est dilué par deux effets additionnels :

Le Décalage vers le rouge individuel des photons par un facteur $(1 + z)$,

et le fait que les photons traversent la sphère moins fréquemment du fait que deux photons émis à δt d'intervalle vont être mesurés à $(1 + z) \delta t$ d'intervalle. Donc il vient :

$$F/L = 1/4\pi \cdot a_0^2 r^2 (1 + z)^2 \quad (69) \quad \text{La}$$

distance de luminosité donnée par (68) vaut alors:

$$d_L = a_0 r (1 + z) \quad (70)$$

Méthode de calcul de H0 et q a partir de la distance de luminosité et de z

La distance de luminosité d_L est mesurable du fait que la luminosité absolue de certaines sources astrophysiques est connue (chandelles standards). Mais r n'est pas observable, nous devons l'éliminer de l'équation.

Sur une géodésique lumière choisie radiale pour la circonstance, on a

$$0 = ds^2 = - dt^2 + (a^2 / 1 - kr^2) \cdot dr^2 \quad (71)$$

où

$$\int_{t_1}^{t_2} dt/a(t) = \int_0^r dr \cdot (1-kr^2)^{-1/2} \quad (72)$$

Pour les galaxies pas trop lointaines on peut développer le facteur d'échelle en série de

Taylor autour de sa valeur actuelle.

$$a(t_1) = a_0 + a_0' (t_1 - t_0) + (1/2) a_0'' (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (73)$$

Si on développe les deux membres de (72) on trouve

$$r = a_0^{-1} [(t_0 - t_1) + (1/2) H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots] \quad (74)$$

D'après (67), l'expansion (73) est identique à

$$1 / 1+z = 1 + H_0 (t_1 - t_0) - (1/2) q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (75)$$

Pour $H_0(t_1 - t_0)$ petit, ceci peut être inversé et donne

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} [z - (1 + q_0 / 2) z^2 + \dots] \quad (76)$$

En substituant de nouveau dans (74) cela donne

$$r = a_0^{-1} H_0^{-1} [z - 1/2 (1 + q_0) z^2 + \dots] \quad (77)$$

Finalement en l'utilisant dans (70) on a la loi de Hubble :

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - q_0) z^2] + \varepsilon (z^{3+}) \text{ pour } z \ll 1 \quad (78)$$

Calcul Rigoureux de D_L .

Pour faire ce calcul, commençons pour des raisons pédagogiques, par déterminer l'âge de

l'Univers :

Age de l'univers (calcul en fonction du rapport Ω_m , Ω_Λ en négligeant l'énergie du rayonnement.

Rappel: $\Omega_m = 8\pi G/3H_0^2 \rho_m$, $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2$, $\Omega_k = -k/a_0^2 H_0^2$ (courbure), comme $(a'/a)^2 = H^2$,
on a déjà déduit de (41) que:
$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (80)$$

L'équation de Friedman:

$$H^2 = (a'/a)^2 = 8\pi G/3 \cdot \rho_m + \Lambda/3 - k/a^2 =$$
$$H_0^2 [(8\pi G \cdot \rho_{0m} / 3H_0^2) \cdot \rho_m / \rho_{0m} - (k/a_0^2 H_0^2) \cdot a_0^2 / a^2 + \Lambda/3H_0^2].$$

Comme $1+z = a_0/a$ et $\rho_m / \rho_{0m} = (1+z)^3$ du fait du rapport en volume, en substituant les Ω

on arrive à :
$$H^2 = H_0^2 [(\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2)] \quad (81)$$

la densité de matière décroît en a^{-3} , la courbure en a^{-2} et Ω_Λ est constant.

$$H = a'/a = d(\log [a(t)/a_0]) / dt = d[\log(1/(1+z))]/dt = [-1/(1+z)] \cdot [dz/dt] \quad (82)$$

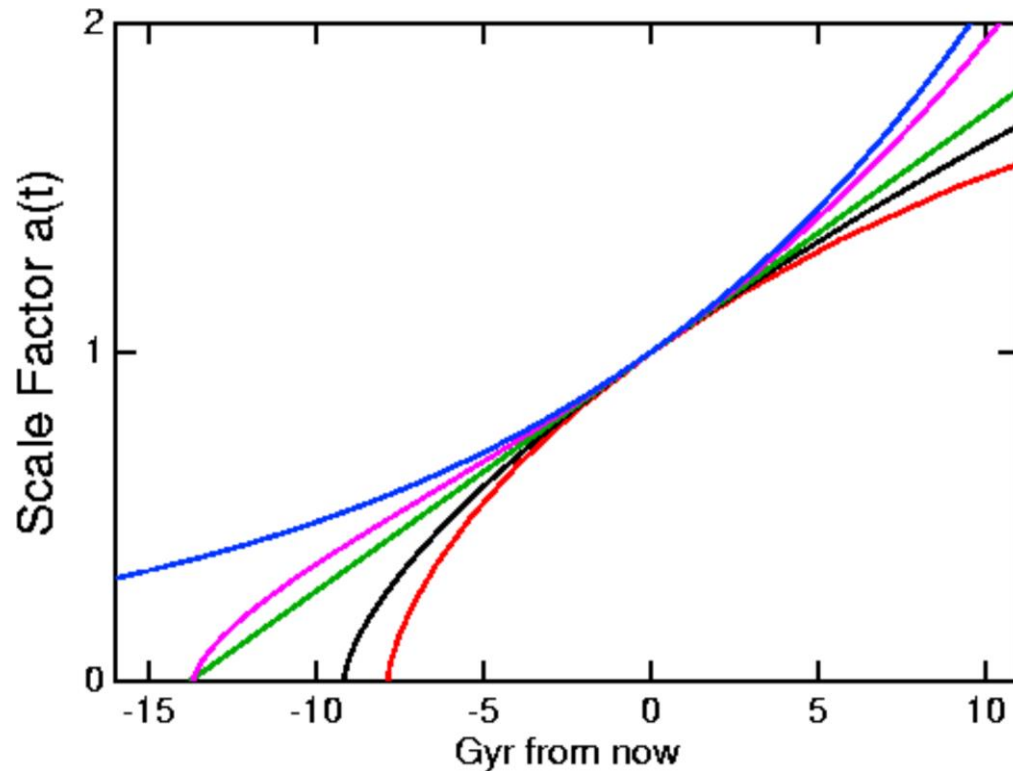
En combinant (81) et (82) nous trouvons

$$dt/dz = - (1+z)^{-1} / \{H_0 [(\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2)]^{1/2}\} \quad (83)$$

En remplaçant Ω_K par $1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$ dans (83) et en intégrant de t_1 jusqu'à maintenant (t_0), on arrive à la formule donnant le temps écoulé jusqu'à maintenant.

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} \{ (1+z)^{-1} [(1+z)^2 (1 + z \cdot \Omega_m) - z(2+z) \Omega_\Lambda]^{-1/2} \} dz \quad (36 \text{ ter})$$

Avec $t_1=0$, (soit $z \rightarrow \infty$) on obtient l'âge de l'univers, fonction de H_0 , Ω_m , Ω_Λ .



La figure ci-dessus montre le facteur d'échelle fonction du temps mesuré à partir de maintenant pour $H_0 = 71$ km/sec/Mpc et $\Omega_0 = 0$ (vert), $\Omega_0 = 1$ (noir), et $\Omega_0 = 2$ (rouge) avec $\lambda = 0$, le modèle WMAP avec $\Omega_m = 0.27$ et $\Omega_\lambda = 0.73$ (magenta) et le modèle stationnaire avec $\Omega_\lambda = 1$ (bleu). L'âge de l'Univers (origine pour $t = 0$), est respectivement 13.8, 9.2, 7.9, 13.7 et ∞ Ga dans ces 5 modèles.

Revenons au calcul de la distance de Luminosité

On peut noter que l'expression :

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - q_0) z^2] + \varepsilon (z^{3+}) \quad (78)$$

valable pour $z \ll 1$ est l'évaluation au deuxième ordre de la formule abominable:

$$d_L (z, H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = (1+z)(H_0^{-1})(|\Omega_k|^{-1/2})S \{ |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z dz' [(1+z')^2 (1+z'\Omega_m) - z'(2+z')\Omega_\Lambda]^{-1/2} \} \quad (79)$$

qui doit être utilisée si z n'est pas petit et qui s'évalue par calcul numérique (on a posé $c = 1$, et $S(x) = \sin x$, x , ou $\sinh x$ pour les univers fermés, plats et ouverts.

Cette formule s'obtient à partir de la définition (70) de la distance de luminosité,

$$d_L = r \cdot a_0 (1 + z) \quad (70)$$

par le fait que la lumière se déplace sur une géodésique radiale nulle ($ds^2 = 0$ métrique de RW avec $d\theta, d\phi = 0$), on a :

$$0 = ds^2 = - dt^2 + (a^2 / 1 - kr^2) \cdot dr^2 \quad (71)$$

d'où $dr/dt = (1 - kr^2)^{1/2} / a(t)$

soit : $a_0 \cdot dr / (1 - kr^2)^{1/2} = (1 + z) dt$

(en multipliant l'équation par $a_0 = a(t_0)$ et de la définition de z : $1+z = a_0/a$

En utilisant (72) $\int_{t_1}^{t_2} dt/a(t) = \int_0^r dr \cdot (1 - kr^2)^{-1/2}$ et en remplaçant t par z selon (36 ter) ci-dessous:

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} \{ (1+z)^{-1} [(1+z)^2 (1 + z \cdot \Omega_m) - z(2+z) \Omega_\Lambda]^{-1/2} \} dz \quad (36 \text{ ter})$$

on arrive à: $a_0 \int_0^{r_1} dr \cdot (1 - kr^2)^{-1/2} = H_0^{-1} \int_0^{z_1} dz \cdot [(1+z)^2 (1 + z \cdot \Omega_m) - z(2+z) \Omega_\Lambda]^{-1/2}$

Les intégrales du membre de gauche sont : $a_0 \cdot K^{-1/2} \cdot \arcsin(r_1 k^{1/2})$ si $k > 0$, $a_0 \cdot r_1$ si $k=0$, $a_0 \cdot k^{-1/2} \cdot \operatorname{arcsinh}(r_1 \cdot k^{1/2})$ si $k = -1$

On exprime r_1 en fonction de z , a et d_L par la formule donnant la distance de luminosité (70) et en remplaçant

$\Omega_k = -k / a_0^2 \cdot H_0^2$ par sa valeur, on obtient la formule (79) exprimant la distance de luminosité en fonction du décalage spectral z

Distance d'horizon en fonction du décalage spectral.

De la définition de la distance d'horizon :

$d_H(t) = a(t) \int_0^t dt'/a(t') = a(t) \int_0^{a(t)} da(t')/a'(t') \cdot a(t')$ tirée de la métrique de RW pour un rayon lumineux radial ($ds^2=0$, $d\phi$, $d\theta=0$)

Comme on vient de voir que : $a' = aH_0 [(\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2)]^{1/2}$

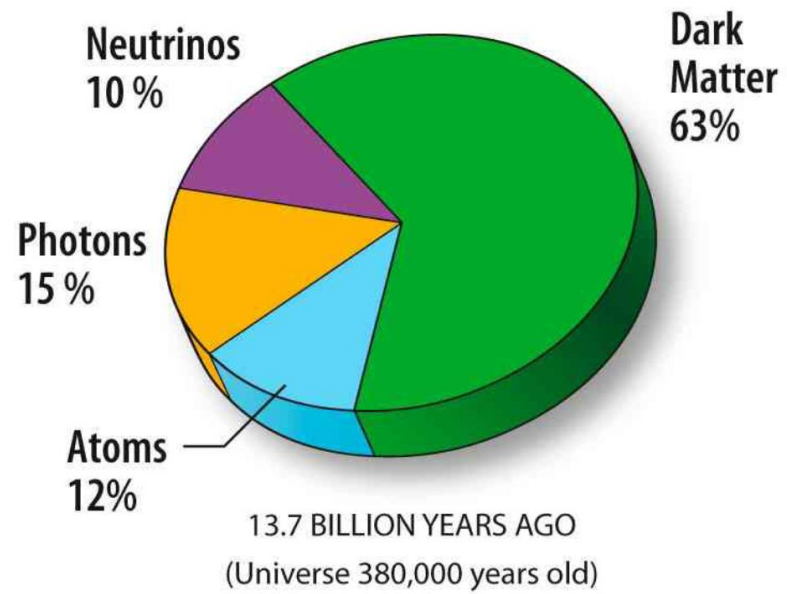
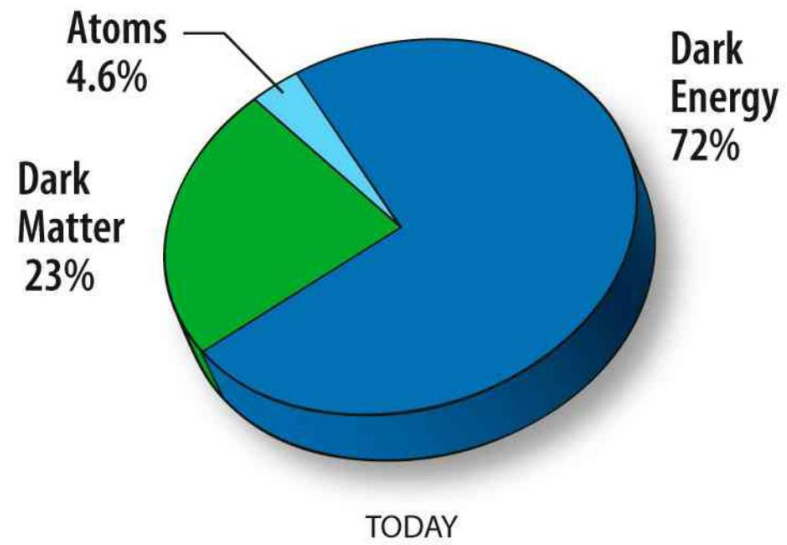
En moulinant tout cela on arrive à : $d_H(t) = [H_0 (1+z)]^{-1} \int_z^\infty f(z') dz'$

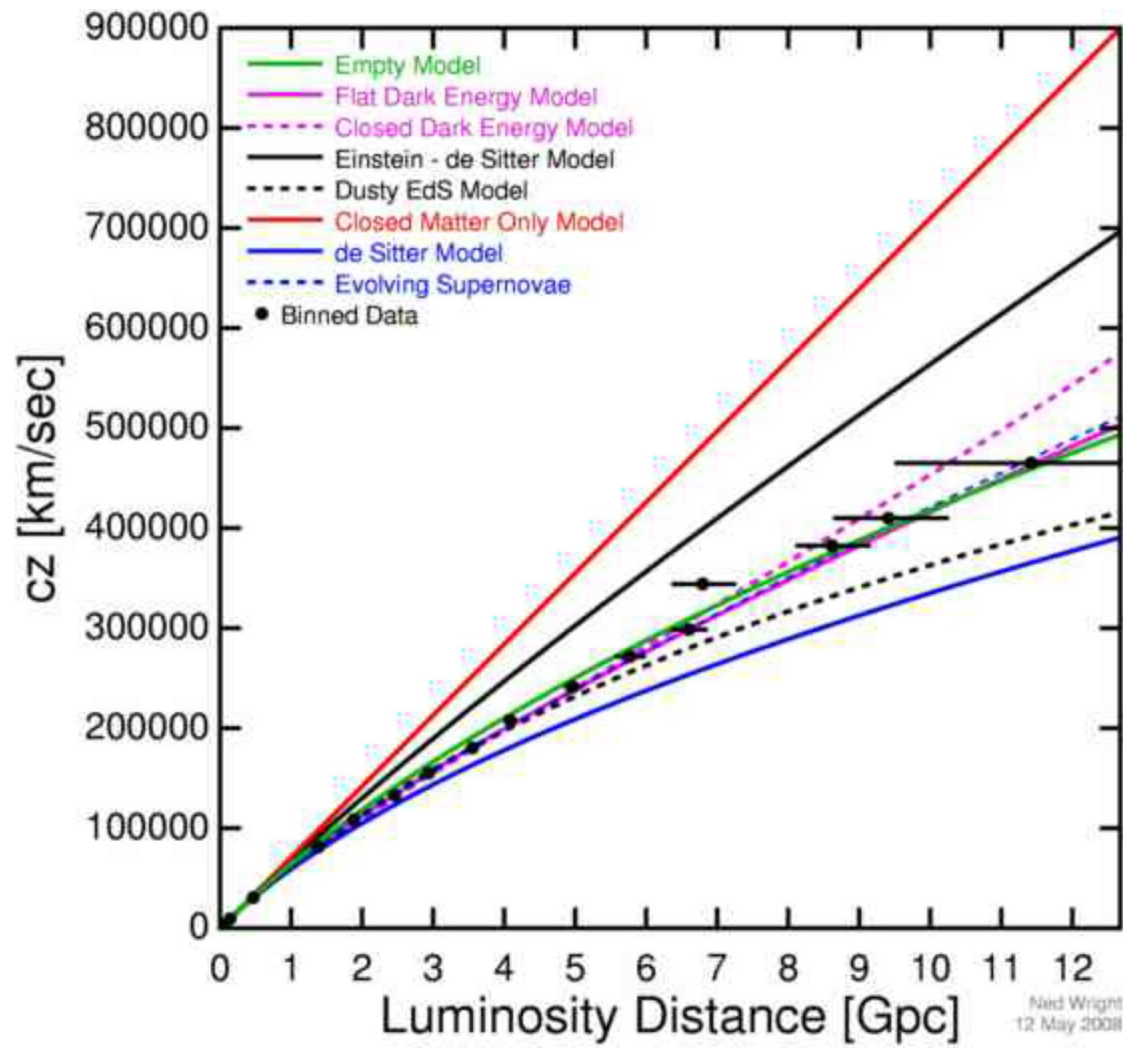
Avec $f(z) = [\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_\Lambda + (\Omega_x (1+z)^{-3(1+\alpha)})]^{-1/2}$

Où on a introduit pour être complet, une contribution du rayonnement et d'une matière hypothétique X, caractérisée par son équation d'état $p = \alpha\rho$ qu'on néglige en général.

Supernova Cosmology project :

La mesure de H_0 et T par (36 ter) et (79) plaide en faveur d'une densité actuelle critique mais avec une partie dominante de constante cosmologique $\Omega_\Lambda = 0,72$, $\Omega_m = 0,28$. Pourquoi la somme vaut elle 1 maintenant ?





Projet Boomerang (mesure fine de l'anisotropie du RFC)

On sait qu'un des mystères du RFC est son isotropie à large échelle, puisque ces régions n'étaient pas causalement connectées au moment du découplage (expliqué par l'inflation). Les régions connectées sont de distance angulaire faible $< 1^\circ$. La distance d'horizon (qui dépend de la nature de l'Univers) était faible à l'époque du découplage (0,5 Mpc). L'examen de la structure de tels domaines va se révéler instructive.

Les anisotropies présentes au moment du découplage lumière matière, causées par les inhomogénéités des distributions de matière, créant des puits de gravitation dans un fluide soumis à une forte pression radiative, a provoqué des oscillations acoustiques dans ce fluide. Les régions de compression et de dépression se propageant dans l'espace environnant causalement connecté. L'état de ces oscillations au moment du découplage s'est conservé et se propage avec le rayonnement fossile.

En quoi cela peut il nous renseigner sur la constitution de l'Univers ?

Les oscillations étaient confinés dans un espace causal limité par H_{rec}^{-1} . Il faut donc une résolution correspondante à cette taille. On calcule facilement que l'angle de résolution $\Delta\theta$ ($z_{\text{découplage}} = (D_A \cdot H)^{-1}$, où D_A est la distance angulaire dans un univers de Friedmann Lemaître). Le premier pic acoustique est supposé être à la distance angulaire $\Delta\theta$, qui est très sensible aux paramètres Ω_m , Ω_Λ , comme cela est montré sur la figure 11.2. La luminance

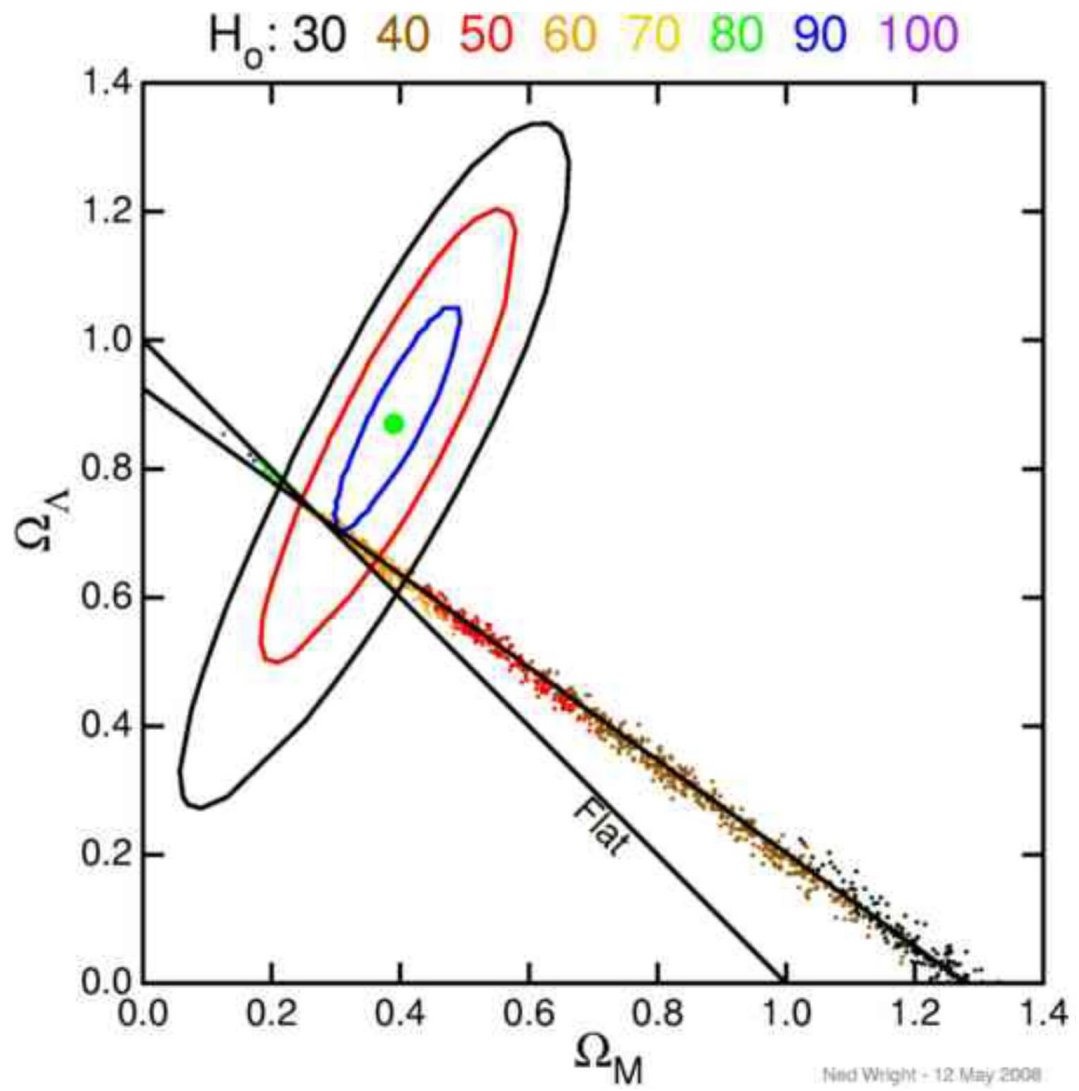
de fond est reproduite sur les figures suivantes (large échelle et détail).

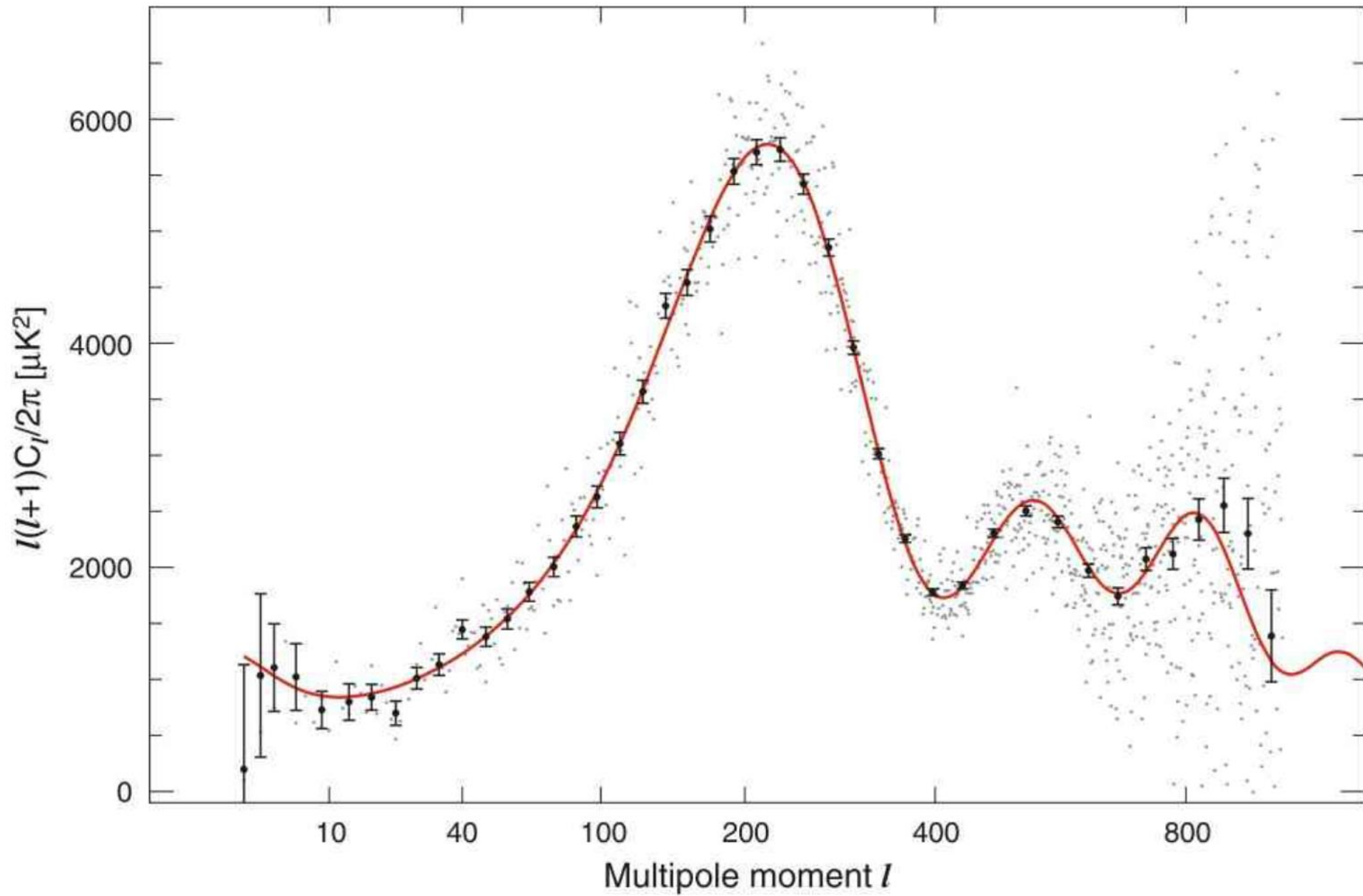
Son analyse par décomposition en harmoniques sphériques fournit un spectre de puissance qui présente un premier pic au moment multipolaire $l_p = 197 \pm 6$, correspondant à un angle $\theta = \pi / l_p = (0,91 \pm 0,03)^\circ$.

La hauteur du pic est $\Delta T = (69 \pm 10)\mu\text{K}$

Synthèse des deux expériences et diagramme de détermination de Ω par distance angulaire

Comme le montrent les diagrammes ci-dessous, il y a une zone de recouvrement correspondant à une solution possible.





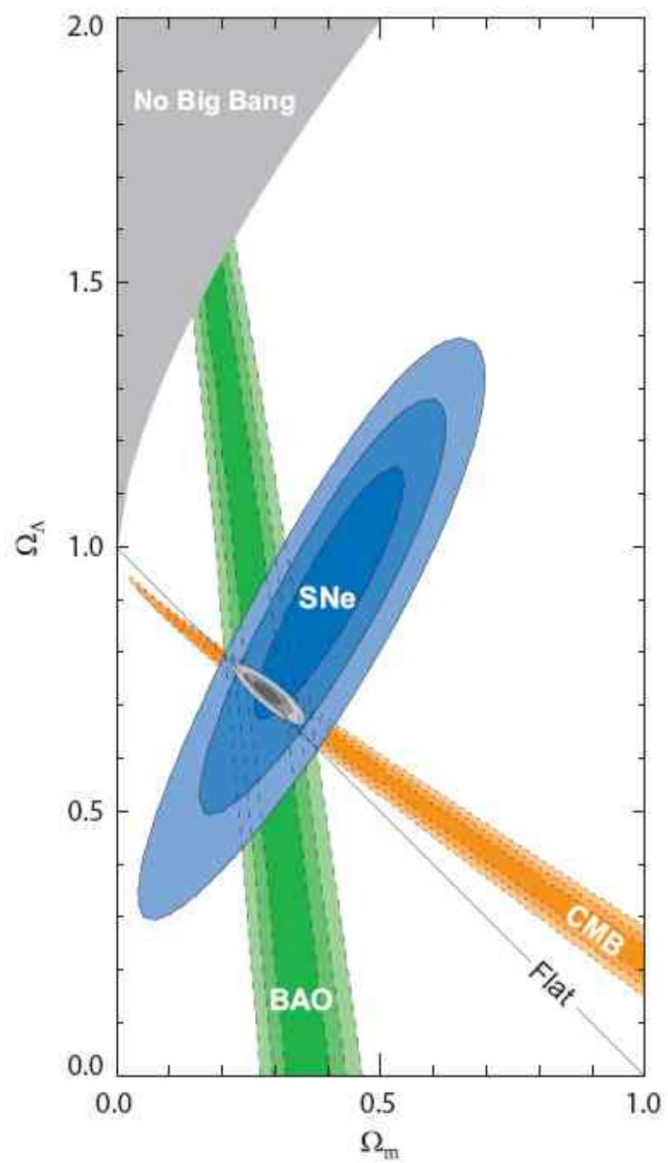


FIG. 15.— 68.3 %, 95.4 % and 99.7% confidence level contours on Ω_Λ and Ω_M obtained from CMB, BAO and the Union SN set, as well as their combination (assuming $w = -1$).

Conclusion

La mesure de la distance de luminosité et du "Décalage vers le rouge" d'un nombre suffisant de galaxies nous permet de déterminer H_0 et q_0 , et nous fournissent une piste permettant de déterminer dans quel type FLRW nous vivons. Les observations sont délicates et les valeurs de ces paramètres très contestés. Nous avons vu comment l'âge de l'univers dépend des valeurs relatives des différents Ω et de leur somme.

Signalons d'autres méthodes qui sont utilisées dont le recoupement permet de conforter les résultats d'observation :

Mesure de la distance angulaire, que nous avons utilisé pour le projet boomerang :

$d_A = D/\delta\theta = a_1(t_1) \cdot r_1 = d_L / (1+z)^2$, mais qui peut aussi être utilisée pour déterminer la nature des Ω par la position du minimum de $\delta\theta$ fonction de z . cf ref [4] et [2]

Mesure de la luminosité de surface : luminosité apparente par unité de surface angulaire :

$$\Sigma = 1/\pi\delta^2 = L / (1+z)^4 \cdot (4\pi^2 d^2) .$$

Elle ne dépend que de z , de la luminosité intrinsèque L de la source et de sa dimension d .

Elle permet de distinguer le cas d'un modèle dont le z est cosmologique d'un autre modèle (lumière fatiguée par exemple).

Cette vérification a été réalisée très récemment.

Dépendance du décalage vers le rouge de l'horizon des évènements, cf ref [2], liste non exhaustive ...

Dans la prochaine décennie de nouvelles stratégies et des applications plus précises des anciennes stratégies pourraient nous permettre d'obtenir des réponses plus fiables.

Nous pouvons signaler le projet de grande ampleur "supernova Cosmology project" qui apporte une contribution importante et innovante à la connaissance des paramètres H et Ω_m et Ω_Λ .

Toutefois il faut rester prudent, le passé nous ayant enseigné combien dans ce domaine, les mesures sont délicates et peuvent être remises en cause par un phénomène qui n'avait pas été pris en compte.

Références

Lecture notes on general relativity par Sean M. Carroll

<http://preposterousuniverse.com/grnotes/> [1]

Cosmology and particle astrophysics par Lars Bergström et Ariel Goobar (Wiley)[2]

Astronomie et astrophysique par Marc Seguin et Benoît Villeneuve (Masson) [3]

Géométrie du Big Bang : Autour de Robertson Walker. A. Bouquet (Site web du Collège de France) [4]

Dynamique du Big Bang : Le modèle du Big Bang. A. Bouquet (Site Web du Collège de France) [5]

L'Univers est-il chiffonné : J.P Luminet (l'Astronomie juillet/Août/septembre 2001) [6]

Université Montpellier II, Module Cosmologie : BOOMERanG : H. Reboul [7]

Measuring Global Curvature and Cosmic acceleration with supernovae : Brian . P. Schmidt [8]

Ned Wright's Cosmology tutorial : <http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm> [9]

Albert Einstein Œuvres choisies, tome 3 (., Cosmologie,..): Sources du savoir Seuil / CNRS[10]