Le Paradoxe des jumeaux

(le voyageur de Langevin)

Plan: Relativité Restreinte (Special Relativity)

Voyage spatial (cinématique)

Voyage spatial (propulsion)

Annexe1: Contraction des longueurs

Dilatation du temps

Annexe2: Calcul des paramètres

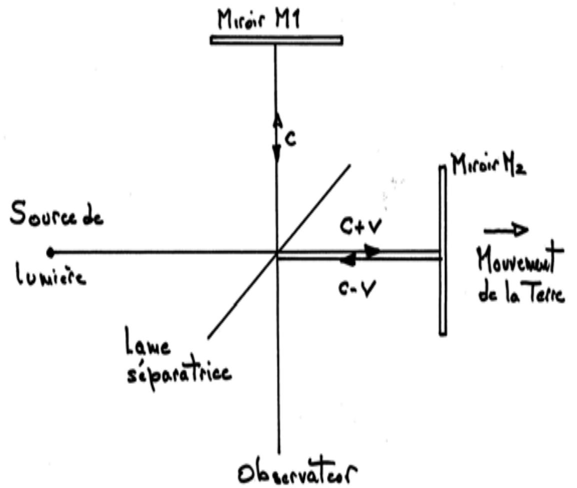
du voyage spatial

Quelques références:

SAF commission cosmologie

La Relativité Restreinte, c'est simple

La Vitesse de la lumière est une constante $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

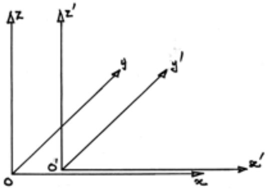


Coulomb
Ampère
Faraday
Maxwell (1871)
Michelson-Morley (1887)
Lorentz
Poincaré

Einstein (1905)
Minkowski

Mais ses conséquences heurtent beaucoup le sens commun

Transformations de Lorentz-Poincaré



2 repères Galiléens : $Oxyzt$ et $O'x'y'z't'$ en mouvement

Vitesse de $O' = v$

Si un évènement A est vu en x, y, z, t dans O

il sera vu en $x' = \gamma(v)(x - vt)$ avec $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (facteur de Lorentz >1)

$$t' = \gamma(v)(t - \tfrac{vx}{c^2})$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Ce changement de coordonnées entraine la loi d'addition des vitesses

$$w = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}$$

qui entraine aussi que c est une vitesse limite que l'on ne peut dépasser

Simultanéité ?

"Distance" de 2 évènements A et B

Espace Euclidien de Newton

$$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$
$$\Delta t_{AB} = t_B - t_A$$

Espace-temps de Einstein-Minkowski

$$\Delta S^2 = c^2 (t_B - t_A)^2 - [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]$$

Nouvelle distance dans l'espace-temps

ΔS^2 sera identique pour tous les observateurs Galiléens

ΔS^2 sera $\geq$ 0 pour 2 évènements causals

ΔS^2 sera $=$ 0 sur le parcours d'un photon

$\Rightarrow$ la notion de cône de lumière d'un évènement avec la nappe avenir et la nappe passée

si ΔS^2 est $<$ 0 suivant l'observateur A précède B ou l'inverse et il existe un référentiel de simulté

*La loi d'inertie de Sylvester sur les formes quadratiques indique que la signature + - - - est conservée dans tous les changements de repère c'est à dire qu'il existe toujours une direction temps

Voyage Spatial

- Objectif : Rejoindre une planète qui circule autour de l'étoile alpha du centaure distante de 4.36 AL et si possible en revenir…
- On considère que pour le confort des astronautes le voyage se fera à accélération constante, pendant la première partie du voyage on accélère, au milieu du parcours on retourne la fusée et puis on décélère.
- On fait d'autres hypothèses : longueur de la fusée 1000m masse au départ
- 100 000 tonnes.

Dans le référentiel de la fusée :

Accélération : α

Le temps propre des astronautes : τ

La vitesse d'ejection des gaz : u

Dans le repère terrestre:

La vitesse de la fusée : V

La distance parcourue : X

Le temps terrestre : T

Ce que l'on cherche c'est exprimer

V et X en fonction de T , τ

et T en fonction de τ

Voyage Spatial (Cinématique) 1

- Donc nous sommes devant un problème de physique tout à fait standard, nous connaissons l'accélération d'un mobile et nous devons trouver sa vitesse et la distance parcourue.
- Ce qui n'est pas classique c'est que l'accélération est dans un repère en mouvement accéléré et que la vitesse de la fusée va s'approcher de la vitesse de la lumière, dans le repère terrestre.

Nous allons raisonner en Mécanique classique

$$\alpha = g = 9.80 \ m / s^2$$

$$V = 9.80 \times T$$

$$X = \tfrac{1}{2} \times 9.80 \times T^2$$

On doit parcourir: $4.36 AL \times 9.46 \times 10^{15} m \times 0.5 \ = \ 2.06 \times 10^{16} m$

$$T \ = \ 6.49 \times 10^7 s \times 2 \ \equiv \ 4.11 \ ans$$

$$V \max \ = \ 6.36 \times 10^8 m / s \ \equiv \ 2.1 \times c$$

$$1AL = 9.46 * 10^{15} m$$

$$1ann\acute{e}e = 3.153 * 10^7 s$$

$$c = 3 * 10^8 m$$

$$g = 9.80 m / s^2$$

Voyage Spatial (Cinématique) 2

- En Relativité Restreinte on peut montrer qu'à un instant donné τ (voir annexe2)

$$\alpha_t = \gamma^{-3} \times \alpha \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T = \frac{c}{\alpha} sh \frac{\alpha \times \tau}{c}$$

$$V = c \times th \frac{\alpha \times \tau}{c}$$

$$\gamma = ch \frac{\alpha \times \tau}{c}$$

$$X = \frac{c^2}{\alpha}(ch \frac{\alpha \times \tau}{c} - 1) \qquad \alpha = g$$

Pour la demi-distance on obtient $ch \frac{\alpha \times \tau}{c} = 3.2456$

Ce qui donne pour l'aller $\tau = 5.648 \times 10^7 \times 2 \equiv 3.58 ans$

L'observateur terrestre verra un voyage aller de 6 ans

Les astronautes 3.58 ans

La vitesse atteinte au milieu du parcours sera de 0.95c

Voyage Spatial (Cinématique) 3

- On va supposer que des observateurs regardent passer la fusée
- Les premiers sont sur Pluton (6 milliards de km)
- La vitesse n’est alors que de 0.0361c et la longueur observée sera de
- 999.35m

- Les seconds sont au milieu du parcours ou la vitesse est max 0.95c
- Ils verront passer une fusée qui leur paraîtra de 310 m de longueur

Voyage Spatial (propulsion) 1

- Comment propulser notre fusée ?

- Quelques ordres de grandeur :
- Au milieu du trajet la vitesse est maximum 0.95 c

- L'augmentation de masse de la fusée est : $M = M_0 \times \gamma(v)$

- Son énergie cinétique : $E = 2.2 \times M_0 \times c^2 = 1.98 \times 10^{25}\ joules$

- Le soleil : $4.5 \times 10^{26}\ joules / s \quad (700\ Megatonnes\ H_2 / s)$

- Une bombe H de une mégatonne : $4.18 \times 10^{15}\ joules$

- Il nous faut de l'ordre de 5 milliards de bombes H

Voyage Spatial (propulsion) 2

- Dans le référentiel des astronautes les lois classiques de propulsion des fusées s’appliquent :
- $$Ln\frac{m_0}{m_1} = \frac{\alpha\times\tau}{I_{sp}}$$
- I_{sp} est l’impulsion spécifique
- La distance est connue et le temps propre du voyage aller est calculé
- en fonction de l’accélération :

$$ch\frac{\alpha\times\tau}{c} = 3.2456 \Rightarrow (\frac{\alpha\times\tau}{c}) = 1.84582$$

- Cas ou $I_{sp} = c$ $\quad \frac{m_0}{m_1} = 40$
- Cas du moteur à fusion : $I_{sp} = 0.118c$ $\quad \frac{m_0}{m_1} = 4\times 10^{13}$
- Même avec un moteur à antimatière on arrive avec seulement 2.5%
- de la masse de départ

• Voyage Spatial (propulsion) 3

- On peut se dire que nous nous approchons de trop près de la
- vitesse de la lumière et cela coûte très chère en énergie…

- Si on suppose une accélération de : $0.1\ m/s^2$
- Durée du voyage aller: 40 ans
- Avec un moteur à antimatière : $m_0 / m_1 = 1.53$
- Avec un moteur atomique : $m_0 / m_1 = 37.3$

- Si on suppose une accélération de: $0.01\ m/s^2$
- Durée du voyage aller: 144 ans
- Avec un moteur à antimatière: $m_0 / m_1 = 1.16$
- Avec un moteur atomique: $m_0 / m_1 = 3.6$

- Voyage Spatial (propulsion) 4

- La difficulté vient du fait que l'on accélère non seulement la charge utile mais aussi de la masse « de propulsion ».

- **Quelques idées qu'il faudrait approfondir :**

- Propulsé le vaisseau spatial par l'action d'un faisceau laser terrestre sur une voile

- Collecter son carburant dans l'espace

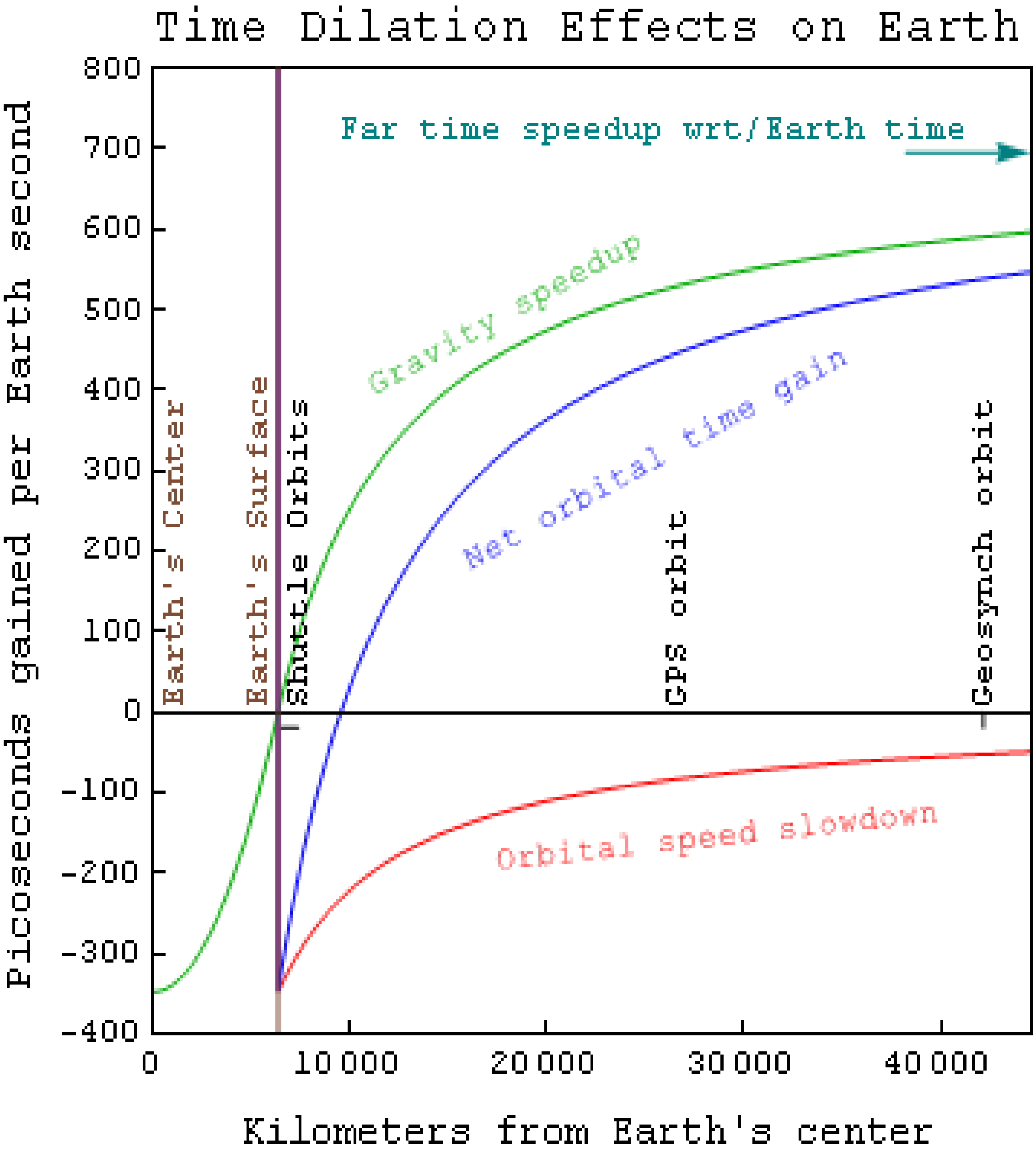
- Utiliser l'énergie noire comme antigravité…

- Naviguer à travers un trou noir…

Validité de la RR

- 2 exemples d'applications / vérifications :
- L'un à faible vitesse le GPS
- Le second à grande vitesse le LHC

Le GPS



Time Dilation Effects on Earth
Far time speedup wrt/Earth time
Gravity speedup
Net orbital time gain
Orbital speed slowdown
Earth's Center
Earth's Surface
Shuttle Orbits
GPS orbit
Geosynch orbit
Picoseconds gained per Earth second
Kilometers from Earth's center
800
700
600
500
400
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
0
10 000
20 000
30 000
40 000

Le GPS

Satellite clocks are slowed by their orbital speed but sped up by their distance out of the Earth's gravitational well.

According to the theory of relativity, due to their constant movement and height relative to the Earth-centered inertial reference frame, the clocks on the satellites are affected by their speed (special relativity) as well as their gravitational potential (general relativity). For the GPS satellites, general relativity predicts that the atomic clocks at GPS orbital altitudes will tick more rapidly, by about 45.9 microseconds (μs) per day, because they have a higher gravitational potential than atomic clocks on Earth's surface. Special relativity predicts that atomic clocks moving at GPS orbital speeds will tick more slowly than stationary ground clocks by about 7.2 μs per day. When combined, the discrepancy is about 38 microseconds per day; a difference of 4.465 parts in 10^{10}.[58] To account for this, the frequency standard on board each satellite is given a rate offset prior to launch, making it run slightly slower than the desired frequency on Earth; specifically, at 10.22999999543 MHz instead of 10.23 MHz.[59] Since the atomic clocks on board the GPS satellites are precisely tuned, it makes the system a practical engineering application of the scientific theory of relativity in a real-world environment. Placing atomic clocks on artificial satellites to test Einstein's general theory was first proposed by Friedwardt Winterberg in 1955.[60]

Le Large Hadron Collider LHC

- Dans les accélérateurs comme le LHC les vitesses atteintes par les particules sont très proches de c .

- Les protons du LHC atteignent une énergie de 7 Tev
- c’est à dire 7000 fois leur énergie de masse Mo (1 Gev)
- V = 0.99999999 c

Annexe 1

2 référentiels en mouvement R et R' de vitesse relative v.

Ce qu'il faut imaginer c'est que dans les référentiels R et R' on a une infinité d'observateurs

Les observateurs de chaque référentiel sont tous équipés d'une horloge .

Les observateurs de R regardent la règle L' du référentiel R'

Les bouts de règle sont 2 évènements simultanés dans R' x'_1, t'_1 et x'_2, t'_2 avec $t'_1 = t'_2$

Pour les observateurs R, les 2 évènements ne sont pas simultanés $t_1 \neq t_2$ car $x'_1 \neq x'_2$

Si l'on veut faire une mesure de la règle dans R, il nous faut 2 évènements simultanés dans R

On veut donc $t_1 = t_2$

$\gamma(ct'_1 + \frac{v}{c}x'_1) = \gamma(ct'_2 + \frac{v}{c}x'_2)$ $x = \gamma(x' + vt')$ et $t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})$

$t'_1 - t'_2 = \frac{v}{c}L'$

On cherche $x_2 - x_1$

$x_2 = \gamma(x'_2 + vt'_2)$

$x_1 = \gamma(x'_1 + vt'_1)$

$x_2 - x_1 = \gamma(L' - \frac{v^2}{c^2}L')$

$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times L'$

L □ L' d'ou l'observation par 2 observateurs de R d'une contraction apparente des longueurs de R'

Annexe 1 (suite)

Il y a 2 façons d'observer les horloges de R'

Je suis en O et je regarde passer les horloges de R'

Nous sommes dans R et nous regardons l'horloge qui est en O'

$x = \gamma(x' + vt')$ et $t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})$

On obtient ainsi

$\Delta t = \gamma \times \Delta t'$ comme $\gamma > 1$, $\Delta t > \Delta t'$ il y a dilatation du temps

$L = \frac{1}{\gamma} \times L'$

Annexe 2

On différentie la formule d'addition des vitesses

$$w = \frac{v+v'}{\sqrt{1+\frac{vv'}{c^2}}}$$

$$dw = \frac{(1+\frac{vv'}{c^2})dv' - (v+v')(\frac{vdv'}{c^2})}{(1+\frac{vv'}{c^2})}$$

dans cette formule $v' = 0$, la fusée est fixe dans son repère

$$dv = dv' \cdot (1 - \frac{v^2}{c^2}) = dv' \cdot \gamma^{-2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

L'accélération de la fusée dans son repère est α : $dv' = \alpha dt'$

On observe dt' dans le repère terrestre $dt = \gamma dt'$

On obtient l'accéleration dans le repère terrestre $\alpha_T = \frac{dv}{dt} = \alpha\gamma^{-3}$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} \cdot \gamma^3 \quad = \frac{dv}{dt}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{3}{2}} \quad = \frac{d}{dt}(v \cdot \gamma)$$

Maintenant il faut intégrer 2 fois pour obtenir le mouvement dans le repère terrestre

$\alpha t = \gamma v$ entraine $\alpha^2 t^2 = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow v^2 = \frac{c^2\alpha^2 t^2}{c^2+\alpha^2 t^2}$

$$\frac{v}{c} = \frac{\alpha t}{\sqrt{c^2+\alpha^2 t^2}}$$

on intègre encore une fois

$$x = \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}} \times \frac{c^2}{\alpha}\right]_0^t \quad = \frac{c^2}{\alpha}\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}} - \frac{c^2}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad (\frac{\alpha x}{c^2} + 1)^2 = 1 + \frac{\alpha^2 \times t^2}{c^2}$$

$\alpha x^2 + 2c^2 x - \alpha c^2 t^2 = 0$ donne x en fonction de t

Annexe 2 (suite)

$$t' = \tau \qquad v = V$$

En utilisant : $d\tau = \gamma dT$, $\frac{1}{c} \times \frac{dv}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\alpha d\tau}{c}$, $\arg\mathrm{th}\,\frac{v}{c} = \frac{\alpha\tau}{c}$

On obtient :

$$\alpha_t = \alpha\gamma^{-3}$$

$$T = \frac{c}{\alpha} sh\frac{\alpha\tau}{c}$$

$$V = cth\frac{\alpha\tau}{c}$$

$$\gamma = ch\frac{\alpha\tau}{c}$$

$$X = \frac{c^2}{\alpha}(ch\frac{\alpha\tau}{c} - 1)$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$thx = \frac{chx}{shx}$$

Quelques Références et compléments:

Texte de la présentation faite en juillet 2002:
http://www-cosmosaf.iap.fr/Paradoxe%20de%20Langevinpres.pdf

Calcul par la méthode de la rotation de Wick (ou comment résoudre le problème en le traitant en géométrie euclidienne) :
http://www-cosmosaf.iap.fr/spoirier-relativite.htm

Une traduction d'une FAQ de J. Baez qui m'avait bien amusé..
http://www-cosmosaf.iap.fr/P-Langevin-1.htm

le paradoxe en espace Hypertorique compact .

http://www-cosmosaf.iap.fr/Hyperparadoxe_Langevin.htm