Aperçu sur la relation entre le Théorème de Noether et le Lagrangien…
(traduction libre par J. Fric de" Noether's Theorem in a Nutshell de J Baez").Mise à jour le 28/02/2019
http://math.ucr.edu/home/baez/noether.html

Commentaires et addition entre [.], Version PDF_de_la_traduction.

1-Présentation générale

Le théorème de Noether associe de façon élégante des quantités physiques conservées aux symétries des lois de la nature. La symétrie de translation dans le temps (phénomène invariant dans le temps) correspond à la conservation de l'énergie, celle de translation dans l'espace à la conservation de l'impulsion, celle de rotation dans l'espace à la conservation du moment cinétique etc..
Ce résultat établi en 1915 par Emmy Noether juste après son arrivée à Göttingen, fut qualifiée par Einstein de " **Monument de la pensée mathématique** ". C'est maintenant un des piliers de la physique théorique.
Aujourd'hui, il est souvent présenté à l'occasion de cours sur la théorie quantique des champs. Cela le fait paraître plus compliqué et mystérieux qu'il n'est, et c'est oublier qu'il s'applique aussi à la Mécanique classique du point matériel.
Nous allons le démontrer dans ce contexte simple, sachant que cette démonstration contient les idées de base qui apparaissent dans la version la plus générale.

La démonstration s'appuie sur le Lagrangien. En effet, quand on dit que le théorème de Noether associe à chaque symétrie une quantité conservée c'est une **demi vérité**.

Le théorème ne s'applique qu'à certaines classes de théories. Dans sa version originale, il s'applique aux **théories décrites par un Lagrangien*,** lequel formalisme contient l'essentiel de l'information nécessaire à la preuve. Il y a aussi une version qui s'applique aux théories décrites par un **Hamiltonien**. Par chance la plupart des théories en physique sont décrites par à la fois un **Lagrangien et un Hamiltonien**.

2-Démonstration dans le cas simple de la mécanique classique

Supposons une particule de l**agrangien** $L(q,q')$, où q est sa position et $q' = dq/dt$ est sa vitesse, se déplaçant sur une trajectoire linéaire. (Nous utiliserons l'apostrophe « **'** » pour indiquer les dérivées par rapport au temps).

L'impulsion de notre particule est définie par : $p = dL/dq'$

La force sur elle est définie par : $F = dL/dq$

Les équations du mouvement (équations d'Euler-Lagrange) disent que la force est la variation par rapport au temps de l'impulsion :$F = p'$

C'est comme cela que le Lagrangien fonctionne !

Supposons maintenant que le **Lagrangien** L **possède une symétrie**, ce qui signifie qu'il ne change pas quand on applique une **famille de transformations paramétrée** par une seule **variable "**s", envoyant q **vers une nouvelle position** $q(s)$**.**

Ceci s'exprime simplement par **la nullité de la dérivée du Lagrangien** par rapport à "*s*".
Ceci s'écrit en utilisant la **notation "*d/ds*" pour l'opérateur de dérivée** par rapport à "*s*". Si :

$$d/ds\ L[q(s)\ ,\ q'(s)] = 0 \qquad (1)$$

Nous revendiquons que :

$$C = p\ .dq(s)/ds \qquad (2)$$

Est une quantité conservée, c.a.d

$$C' = 0 \qquad (3)$$

<u>Preuve</u> : Nous prenons la dérivée par rapport au temps de notre quantité supposée conservée en utilisant la règle de dérivation du produit (Leibnitz).

$$C' = p'\ .dq(s)/ds + p\ .dq'\ (s)/ds \qquad (4)$$

Puis nous utilisons l'équation du mouvement de notre particule et la définition de l'impulsion pour réécrire les termes ***p'*** et ***p*** de cette équation :

$$C' = (dL/dq)\ .[dq(s)/ds] + (dL/dq').[dq'(s)/ds] \qquad (5)$$

Ceci est le développement par la règle de Leibnitz, de la dérivée par rapport à ***s*** du lagrangien ***L*** . Cette dérivée est nulle, car nous avons supposé que ce lagrangien ne dépend pas de ***s*** !

Ceci s'écrit : $C' = d/ds\ \ L\ [\ q(s),\ q'(s)\ ] =\ 0$ **C<u>QFD</u>**

<u>[Exemple</u>: Invariance de *L* par rapport à un déplacement dans l'espace ***(*** $q \rightarrow q+dq$), ici $s = q$.

$$L\ (q,q') = L\ [\ (q\ +\ dq),\ q'] \ \rightarrow \text{invariance de } C = p.dq/dq = p.$$

<u>L'impulsion est conservée, si le Lagrangien est invariant par translation dans l'espace !]</u>

<u>Conclusion</u>

On peut bien sûr généraliser ce résultat à un ensemble de particules dans des espaces de dimensions supérieures et même dans une variété. C'est la même méthode.

Il n'aura pas échappé aux puristes que notre démonstration suppose que notre symétrie est indépendante du temps, ce qui m'a permis d'identifier : **(dq(s)/ds)' à dq'(s)/ds dans (4)**

Qu'on me pardonne ce tour de passe-passe, qui n'enlève rien à l'intérêt de la démonstration. Cependant il est important de noter que pour les symétries dépendant du temps nous devons utiliser une version plus élaborée du théorème de Noether. Un exemple important concerne les quantités conservées associées aux transformations de Lorentz. Mais c'est une autre histoire.
Vous pourrez trouver plus d'information sur Emmy Noether sur le Web. Emmy Noether a également démontré bien d'autres théorèmes élégants et introduit de nombreuses idées essentielles en mathématiques en particulier dans la théorie de groupes et des anneaux.

** **La formulation Lagrangienne des lois** consiste à faire dériver les lois du mouvement (équations du mouvement) d'un principe unique, **le principe de moindre action** (plus généralement en physique moderne de **stationnarité de l'action**).*

[Annexe 1: Les groupes de symétrie en physique]

Non observable	**Symétrie par Transformation de:**	**Loi de conservation**
Position spatiale absolue	Translation d'espace	Impulsion P
Temps absolu	Translation dans le temps	Energie E
Orientation spatiale absolue	Rotation	Moment cinétique L
Vitesse, Orientation, Position absolues (Relativité Restreinte)	Transformations du groupe de Poincaré (Lorentz + translations dans l'Espace et le Temps)	Intervalle d'espace temps s^2, Impulsion P, moment cinétique L, Energie E
Orientation, Position, Vitesse et Accélération absolues (Relativité Générale)	- Difféomorphismes (Covariance Générale) - Difféomorphismes infinitésimaux	-Invariants topologiques. - Action (d'Hilbert) champs de gravitation et de matière .
Différence entre particules identiques	Permutation de Particules identiques	Statistique de Fermi Dirac ou de Bose Einstein
Droite (ou gauche) absolue	Changement du vecteur X en le vecteur -X	Parité
Signe absolu de la charge	Changement des particules en leurs antiparticules	Conjugaison de charge
Phase absolue d'un champ de matière chargé	Changement de la phase	Charge électrique
Différence entre mélanges cohérents différents de quarks colorés	Changement de couleur	Générateurs de couleur
Différence entre mélanges cohérents différents de leptons chargés et de neutrinos	Changement d'un lepton en son neutrino	Générateurs d'isospin faible