

<b>LES TROUS NOIRS.....</b>	<b>2</b>
<b>1-LES PREMIERES SOLUTIONS 1916 -1921.....</b>	<b>2</b>
1-1    1916 : SOLUTION DE SCHWARZSCHILD : .....	3
1-2    1916- SOLUTION DE DROSTE : .....	4
<b>2- PREMIERES SOLUTIONS NON SINGULIERES SUR L'HORIZON (1921-1933).....</b>	<b>5</b>
2-1    1921- COORDONNEES DE PAINLEVE-GULLSTRAND: .....	5
2-2    1924- COORDONNEES D'EDDINGTON.....	7
2-3    1933- COORDONNEES DE LEMAITRE : .....	8
<b>3- LE CREUX DE VAGUE 1933-1949.....</b>	<b>9</b>
<b>4- 1950- 1960 LA NATURE DES TROUS NOIRS ENFIN REVELEE .....</b>	<b>9</b>
4-1    1950 LA SOLUTION DE SYNGE .....	9
4-2    1958 FINKELSTEIN REDECouvre LES COORDONNEES D'EDDINGTON. ....	16
4-3    1959 : REPRESENTATION GEOMETRIQUE DE FRONSDAL .....	18
4-4    1960 SOLUTION DE KRUSKAL .....	20
<i>La méthode et les résultats de Kruskal .....</i>	<i>20</i>
<i>Kruskal s'est il inspiré de Synge entre autres ?.....</i>	<i>22</i>
<i>L'apport de Kruskal .....</i>	<i>23</i>
4-5    1960 SZEKERES, INDEPENDAMMENT, FAIT LA MEME DECOUVERTE.....	23
4-6    1963- FORME DE NOVIKOV .....	23
4-7    1965 RINDLER PROPOSE UNE IDENTIFICATION DE L'ESPACE ET DE L'ANTI ESPACE .....	24
<b>5- FAISONS LE POINT SUR CES SOLUTIONS .....</b>	<b>25</b>
<i>Les singularités sont bien embarrassantes .....</i>	<i>25</i>
<i>L'horizon .....</i>	<i>26</i>
<i>La singularité centrale.....</i>	<i>27</i>
<i>Rappel historique : Astres obscurs et trous noirs.....</i>	<i>27</i>
<b>6- 1965 – 1975 NATURE PHYSIQUE ET IMPLICATION DES SINGULARITES.....</b>	<b>29</b>
6-1 RAPPEL DE LA SITUATION .....	29
6-2 ÉTUDE DES CONGRUENCES.....	29
6-3 LE DEBAT SUR LA SINGULARITE CENTRALE.....	30
6-4 INTRODUCTION DES METHODES GLOBALES .....	31
6-5 CRITERES DE CARACTERISATION D'UNE SINGULARITE.....	32
6-6 TYPES DE SOLUTIONS POUR LA SINGULARITE .....	33
<i>Singularité où la force de marée devient infinie.....</i>	<i>33</i>
<i>Singularité sans force de marées infinies .....</i>	<i>34</i>
<i>Singularité associée à une implosion avortée avec rebond .....</i>	<i>34</i>
<i>Autres hypothèses .....</i>	<i>35</i>
6-7 SINGULARITE BKL .....	35
<i>Espaces homogènes.....</i>	<i>35</i>
<i>Régime oscillatoire à l'approche de la singularité.....</i>	<i>37</i>
<i>Singularité BKL dans le cas du trou noir .....</i>	<i>38</i>
6-8 AUTRES THEOREMES ET CONJECTURES .....	39
<i>Théorème des singularités de Hawking et Penrose .....</i>	<i>39</i>
<i>Conjecture de censure cosmique .....</i>	<i>40</i>
<i>Théorème des aires.....</i>	<i>40</i>
<i>Les trous noirs n'ont pas de poils.....</i>	<i>41</i>
<i>Perte d'information dans les trous noirs .....</i>	<i>41</i>
<i>Théorèmes d'unicité .....</i>	<i>42</i>
6-9 CARACTERISTIQUES PARTICULIERES DES HORIZONS .....	42
<i>Définition d'un horizon .....</i>	<i>43</i>
<i>Surfaces piégées .....</i>	<i>44</i>
<i>Gravité de surface .....</i>	<i>44</i>
<i>Horizon des événements et horizon apparent. ....</i>	<i>45</i>
<b>7- THERMODYNAMIQUE ET TROUS NOIRS .....</b>	<b>45</b>

7-1 ANALOGIE THERMODYNAMIQUE.....	45
7-2 INTRODUCTION AU RAYONNEMENT DE HAWKING.....	47
<b>8- REFERENCES .....</b>	<b>47</b>

## Les trous noirs

### 1-Les premières solutions 1916 -1921<sup>1</sup>

En 1915, Einstein bute encore sur le problème de covariance générale, il publie plusieurs versions de ses équations. Einstein a élaboré ses équations en cherchant une généralisation « relativiste » de l'équation « classique » de Poisson.

A partir de sa conception géométrique de l'espace temps (la matière génère une courbure de l'espace temps), son équation se devait de comporter d'un côté une entité géométrique  $G_{ij}$  (caractérisant une courbure) et de l'autre une entité physique (caractérisant la distribution de matière énergie), qui comme il l'avait montré en relativité restreinte est caractérisé par le tenseur énergie impulsion  $T_{ij}$ .

Ce qui s'écrit :

$$G_{ij} = K.T_{ij}$$

$T_{ij}$  est à flux conservatif (divergence covariante nulle)<sup>2</sup>:  $T_{ij;i} = 0$

Partant du principe qu'en physique, les équations différentielles ne vont pas au-delà du second ordre, il a cherché un tenseur « géométrique » dérivé du tenseur de Riemann qui caractérise la courbure possédant cette propriété qui pouvait être égalé (via une constante dimensionnée  $K$ ) au tenseur énergie impulsion.

Le choix est restreint. Le tenseur de Ricci aurait pu faire l'affaire s'il avait satisfait à la condition de divergence nulle. Einstein est donc amené à construire un tenseur à partir du tenseur de Ricci  $R_{ij}$  et de sa contraction  $R = g^{ij} R_{ij}$  (le scalaire de Ricci). C'est le tenseur d'Einstein<sup>3</sup>  $G_{ij}$  qui a une divergence nulle comme il est facile de le vérifier.

$$G_{ij} = R_{ij} - 1/2 g_{ij} R \quad G_{ij;i} = 0$$

Ajoutons une condition aux limites : Dans un espace vide de matière ou du moins très loin des sources de matière on doit converger asymptotiquement vers la relativité restreinte. La forme générale de son équation étant établie, il restera à valoriser la constante dimensionnée par convergence à la limite « Newtonienne » avec la théorie classique de la gravitation.

Fort de ce résultat, a peu de temps d'intervalle, il publie fin 1915 ses équations dont la première version est restrictive, avec la condition  $g = -I$ . Il publie aussi celle correspondant à la covariance générale, mais comme il n'est pas très sûr de lui, il recommande de respecter si possible la condition  $g = -I$ .

A cette même époque et quelques jours avant qu'Einstein publie ses propres travaux, D. Hilbert en utilisant un principe différent (principe variationnel, utilisant action d'Hilbert<sup>4</sup>) propose une équation, solution de la théorie élaborée par Einstein. Cela a donné lieu à une petite querelle en paternité de la RG qui s'est rapidement éteinte, Hilbert reconnaissant

<sup>1</sup> Cette partie fait de larges emprunts à « Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild », Jean Eisenstaedt, Archive for history of exact sciences, Vol 27, Number 2, 1982, pp 157-198

<sup>2</sup> Le symbole « ; » est utilisé conformément aux usages pour désigner l'opération de dérivation covariante.

<sup>3</sup> Le tenseur d'Einstein est la trace inverse du tenseur de Ricci.

<sup>4</sup> La méthode plus générale de Hilbert est celle qui a la préférence aujourd'hui, d'autant que s'appuyant sur le principe variationnel, elle se généralise à d'autres théories.

finalement la paternité d'Einstein<sup>5</sup>. Finalement, Einstein publie une synthèse<sup>6</sup> très argumentée et complète de sa théorie en 1916.

### 1-1 1916 : Solution de Schwarzschild :

C'est dans ce contexte, à partir de la première version des équations d'Einstein (fondée sur  $g = -I$ ) qu'en janvier 1916, depuis le front russe où il s'est porté volontaire, Karl Schwarzschild, un des fondateurs de l'astrophysique moderne, astronome à l'observatoire de Postdam, élabore la première solution exacte aux équations d'Einstein dans le vide, celle relative au champ gravitationnel généré par une masse unique à symétrie sphérique (à l'extérieur de la masse).

Schwarzschild est parti de la publication restrictive d'Einstein. Du fait de cette contrainte, les coordonnées sphériques, pourtant naturelles dans un problème manifestement à symétrie spatiale sphérique, sont difficiles à utiliser (elles ne satisfont pas à la condition de déterminant  $I$  pour la partie spatiale).

A partir des coordonnées polaires  $(R, \theta, \varphi)$ , dont l'origine est le centre de symétrie de la masse unique, Schwarzschild est amené à fabriquer des coordonnées spatiales déterminant  $I$ . Il introduit une coordonnée radiale auxiliaire  $r$  définie par :

$$r = (R^3 + r_s^3)^{1/3} \quad \text{avec } c=G=1^7, r_s = 2M^8, r_s \text{ est le rayon de Schwarzschild.}$$

pour établir la forme de la métrique qui s'écrit alors

$$ds^2 = (1 - r_s/r)dt^2 - dr^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)$$

Cette solution décrit un espace temps statique, à l'extérieur de l'horizon (et aussi à l'extérieur de la masse générant le champ, car rappelons le elle est définie dans le vide) dont la partie spatiale est à symétrie sphérique.

Elle est définie à l'extérieur de l'horizon, car dans ces coordonnées la valeur minimum de  $R$ ,  $R=0$ , donne  $r = r_s$ , ce qui correspond à la sphère<sup>9</sup> qui représente géométriquement l'horizon.

Dans un deuxième article Schwarzschild publiera une solution « intérieure<sup>10</sup> » en utilisant l'équation hydrostatique pour une boule de fluide à densité constante dont la pression s'annule sur la surface. Dans ce modèle la pression au centre devient infinie dès que le rayon devient inférieur à une valeur limite  $R_{\text{lim}} > r_s$ . Il en déduit (à tort) que des corps de rayon  $r$  et de masse  $M$ , tels que  $r < 2GM/c^2$  ne peuvent exister, donc que la région  $r \leq r_s$  est non physique<sup>11</sup>.

<sup>5</sup> Earman J., Glymour C. (1978) Einstein and Hilbert: Two months in the history of general relativity. Arch. For history of exact sciences. 19 :291-308

<sup>6</sup> Einstein. A (1916). Die Grundlâge der allgemeinen Relativitätstheorie; Annalen der Physik, vol XLIX, 1916, p. 769-882

<sup>7</sup> On supposera que  $c=1, G=1$ , par défaut lorsque  $c, G$  ne sont pas spécifiés explicitement dans tout le texte

<sup>8</sup> En fait  $r_s = 2GM/c^2 = 2M$  avec  $c=1, G=1$ . On utilisera également la notation  $r_s$  tout au long du document

<sup>9</sup> Ceci a donné lieu à des interprétations hautement douteuses, allant jusqu'à nier l'existence d'une singularité centrale dans cette solution, à savoir dans l'ordre de degré dans l'horreur croissant :

Antoci S., Liebscher D.E.(2001). Reconsidering Schwarzschild's original solution. arXiv:gr-qc/01102084 v2

Zakir. Z (1999). New exact Solution of the Einstein Equations as Revised Schwarzschild solution without black holes. arXiv:gr-qc/99005068 v3

Et la critique de ces solutions :

Senovilla, J.M. (2006) New editorial note on K. Schwarzschild's Golden Oldie. To be published in GRG

<sup>10</sup> Schwarzschild (1916b) A l'intérieur de la matière, par opposition à la solution « dans le vide » (à l'extérieur de la masse générant le champ). Solution obtenue toujours avec la condition de déterminant 1.

<sup>11</sup> Pas de solution statique pour  $r \leq r_s$ , mais il oublie de considérer la possibilité de solutions non statiques.

Einstein commettra la même erreur (Einstein 1939) dans sa « démonstration » de non existence des trous noirs.

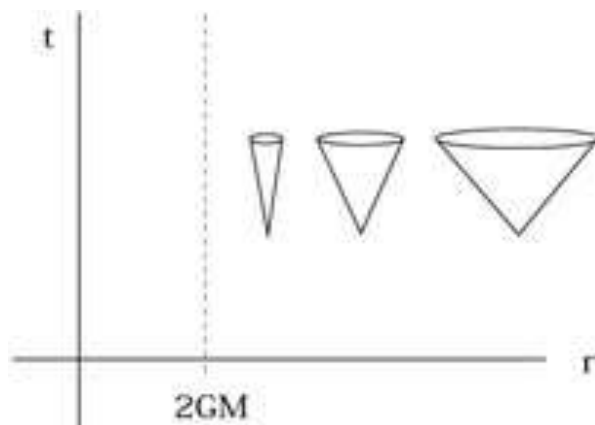
### 1-2 1916- Solution de Droste :

Droste<sup>12</sup> élève de Lorentz, établit indépendamment une solution au même problème, dans le cadre des équations d'Einstein dans le contexte de la covariance générale (sans cette restriction de déterminant qui a contraint Schwarzschild à quelques acrobaties), qui généralise la solution de Schwarzschild, en l'étendant jusqu'au point  $r = 0$  (centre de symétrie) en coordonnées sphériques. C'est la forme actuelle de la solution de Schwarzschild.

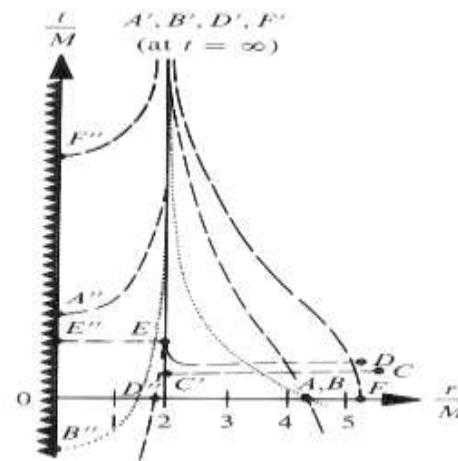
$$ds^2 = (1 - r_s/r)dt^2 - dr^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\phi^2)$$

Cette forme met en évidence deux singularités de coordonnées à  $r = r_s$  et  $r = 0$ .

La discussion portera longtemps sur la nature de ces singularités. Cette forme décrit la métrique (le  $ds^2$ ) de l'espace temps pour  $0 < r < \infty$ . Mais notons qu'il faut plusieurs référentiels pour décrire cet espace temps. En effet il faut un premier référentiel pour décrire la région  $r > r_s$  et un deuxième pour décrire  $0 < r \leq r_s$ , comme la fermeture des cônes de lumière à l'approche de  $r = r_s$  et la discontinuité de la représentation des géodésiques radiales<sup>13</sup> le montre.



Allure des cônes de lumière en fonction de r



Quelques géodésiques radiales : AA'A''- FF'F''

C'est un problème assez classique lié aux coordonnées pour baliser une variété. On peut rarement étiqueter la variété avec un seul système de coordonnées<sup>14</sup>.

Cette forme est la solution unique des équations de la relativité générale qui représente l'espace temps extérieur vide généré par un corps « central » à symétrie sphérique, quelle que soit sa taille et sa masse (un trou noir, une étoile), qu'il soit statique ou non, du moment qu'il reste à symétrie sphérique (Théorème de Birkoff<sup>15</sup>). Il est étonnant de constater que le caractère statique demeure même si le corps central ne l'est pas.

<sup>12</sup> Droste .J. (1916) « Het van eenenkel centrum in Einstein's theorie des zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld. Versl. Gewone Vergad Akad.Amst.25,163-180. English translation : the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Proc.Acad.Sci. Amst.,19(i):197-215.

<sup>13</sup> Gravitation, C.W Misner, K. Thorne, J.A Wheeler.(1973) Freeman New York fig 31.1 p 825

<sup>14</sup> On verra dans la suite que c'est pourtant possible dans ce cas.

<sup>15</sup> Birkoff G.D. (1923). Relativity and modern Physics. Harvard University Press Cambridge Mass.

## 2- Premières solutions non singulières sur l'horizon (1921-1933)

Les trous noirs sont un sujet maudit, dont il n'est pas convenable de parler. Tous les scientifiques faisant autorité s'accordent à penser que cette conception de la solution présentant des singularités qui nuisent gravement à l'intégrité et la crédibilité de la théorie est une aberration de la nature et ne saurait physiquement exister. Le sujet est même tourné en dérision et ceux qui s'y intéressent feraient mieux de faire de la physique plutôt que de spéculer sur une curiosité mathématique. Pourtant, certains irréductibles continuent à ne pas partager ce point de vue

### 2-1 1921- Coordonnées de Painlevé<sup>16</sup>-Gullstrand<sup>17</sup>:

Paul Painlevé, plus connu en tant qu'homme politique, (il a été ministre de la guerre pendant le premier conflit mondial), que scientifique, mais qui avait étudié de très près l'œuvre d'Einstein, propose en 1921 une forme qui s'écrit

$$ds^2 = (1 - r_s/r)dT^2 - 2(r_s/r)^{1/2} dr.dT - [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] \quad (2-1-1)$$

On voit qu'elles effacent la singularité à  $r = r_s$ .

Ces coordonnées correspondent à un observateur en chute libre radiale de l'infini vers  $r = 0$ , avec comme condition à la limite une vitesse nulle à l'infini<sup>18</sup>.

Bien que Painlevé les ait posés a priori comme nouvelle solution, on peut les dériver de la forme de Schwarzschild en considérant l'équation géodésique radiale dans ces coordonnées. Cette équation détermine  $t'$  et  $r'$  (dérivées par rapport au temps propre de l'observateur).

A partir de la quadri vitesse contravariante  $u^\mu = (t', r', 0, 0)$  on peut calculer la quadri vitesse covariante  $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$  et la considérer comme le gradient d'une fonction  $T$  soit :  $u_\mu = \partial_\mu T$ .

En intégrant on obtient la fonction  $T$  suivante :

$$T = t + 2 r_s[(r/r_s)^{1/2} + 1/2 \ln|(r/r_s - 1)/(r/r_s + 1)|] \quad (2-1-2)$$

C'est le changement de coordonnées qu'il faut effectuer pour trouver la forme (2-1-1)

Elles sont historiquement les premières coordonnées à décrire dans un même système de coordonnées l'extérieur et l'intérieur du trou noir, ce qui est assez méconnu.

Il est étonnant qu'elles ne soient pas plus souvent citées, d'autant que ce type de coordonnées (chute libre) est souvent très intéressant à utiliser et qu'on redécouvre aujourd'hui tout l'intérêt qu'elles présentent.

Remarquons qu'elles décrivent une géodésique radiale entrante, mais que la forme symétrique par renversement du temps (ce qui change le signe du terme en  $dr.dT$ ) décrit une géodésique radiale sortante (cette possibilité n'ayant pas été exploitée par Painlevé, à l'époque).

Elles permettraient d'accéder dans ces conditions à trois des quatre régions qui seront décrites ultérieurement par la forme de Kruskal.

Une des raisons possibles de son impopularité résulte peut être des débats entre Painlevé et Einstein, qui montraient clairement que Painlevé n'avait pas compris certains aspects

<sup>16</sup> Painlevé P.(1921) La mécanique classique de la théorie de la relativité. C.R Acad. Sci Paris 173, 677-680, A.

<sup>17</sup> Gullstrand A.(1922). Allgemeine Lösung des statischen Einkörper-problems in der Einsteinschen Gravitations theorie, Arkiv.Mat.Astron.Fys. 16(8), 1-15

<sup>18</sup> Ce qui signifie que, à l'infini, l'énergie  $e$  de la particule en chute libre radiale (géodésique) est égale à son énergie de masse. On utilise en fait l'énergie par unité de masse  $E = e/m$ . Si la vitesse n'est pas nulle, cela va définir une famille de formes à un paramètre.

fondamentaux de la théorie de la Relativité, en particulier le rôle conventionnel des coordonnées, puisqu'il soutenait que cette métrique était une autre solution (différente) au problème du corps central. Il semble qu'il accordait un sens physique intrinsèque aux coordonnées et il tirait de sa forme de la métrique certaines conclusions hâtives et fausses (il niait le décalage spectral dans un champ de gravitation et plus étonnant l'objectivité du  $ds^2$ ). Einstein lui a fait remarquer qu'en remplaçant la coordonnée  $r$  par une fonction de  $r$  on n'obtient pas une nouvelle solution, mais que c'est la même exprimée autrement.<sup>19</sup>

Par contre ce qu'Einstein aurait pu ajouter, s'il n'avait été aussi un farouche opposant aux trous noirs et à leurs singularités, c'est que les coordonnées de Painlevé-Gullstrand telles que décrites par leurs auteurs représentaient par un seul système de coordonnées (sans discontinuité à  $r = r_s$ ) la partie à l'extérieur de l'horizon et la partie à l'intérieur de l'horizon du trou noir (deux régions), ce qui était une découverte fondamentale qui n'a pas été reconnue à l'époque.

En effet, si Painlevé n'a pas bien compris la signification de ses coordonnées, on peut en dire tout autant de ses contemporains, pour preuve la récusation par Becquerel en 1923<sup>20</sup> du système de coordonnées de Painlevé au motif qu'on ne pourrait pas leur attribuer une signification, qu'elles ne comporteraient pas de grandeurs mesurables et que le terme en  $dr \cdot dt$  détruit la symétrie sphérique<sup>21</sup>. Ce point de vue est d'autant plus étonnant, que, après avoir mis un certain temps à l'admettre (1913-1916), Einstein a compris et clame haut et fort que les coordonnées n'ont aucune signification physique en Relativité Générale. On voit combien à encore cette époque, même les scientifiques les plus éminents ont une vision confuse de la représentation de la gravitation par des espaces temps en la relativité générale.

Par ailleurs, indépendamment du fait qu'elle efface la « singularité » de coordonnées à  $r = r_s$ , cette forme de la métrique possède quelques propriétés originales<sup>22</sup>.

En posant  $T = \text{constante}$ , on voit que le  $ds^2$  se réduit à:

$$ds^2 = [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)] \quad (2-1-3)$$

C'est la forme caractérisant une géométrie euclidienne en coordonnées sphériques.

Autrement dit, les **sections spatiales**, dans cette forme sont **euclidiennes** !

Remarquons cependant que si les sections spatiales sont euclidiennes, la métrique spatiale (3D) qui vaut<sup>23</sup> :

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad \text{avec}$$

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{0i} \cdot g_{0j} / g_{00}$$

ne l'est pas, du fait de la présence du terme croisé  $g_{tr}$ .

$$\gamma_{rr} = +1 + (r_s/r) / (1 - r_s/r) = 1 + (r_s) / (r - r_s) = 1 / (1 - r_s/r),$$

alors, comme  $\gamma_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}$  et  $\gamma_{\phi\phi} = g_{\phi\phi}$  la métrique spatiale vaut :

$$dl^2 = dr^2 / (1 - r_s/r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2), \quad (2-1-4)$$

<sup>19</sup> Ces polémiques ont peut-être nuit à Einstein pour l'attribution du Nobel, car Gullstrand, ophtalmologiste de l'université d'Upsala, était membre du comité Nobel en 1921 et 1922. Il était très critique envers Einstein.

<sup>20</sup> Becquerel J. (1923) Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la sphère de Schwarzschild. Paris. Hermann, 32 pages.

<sup>21</sup> P.176 de « Eisenstaedt, Jean (1982). « Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild ». Archive for history of exact sciences, Vol 27, Number 2, 157-198 »

<sup>22</sup> Martel. K, Poisson E. (2000) Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes ArXiv.gr-qc/0001069 v4

<sup>23</sup> Landau Lifchitz, 1994. Théorie des champs, Ed. Mir –Ellipse, p 306

On retrouve le  $dl^2$  de la forme de Schwarzschild (qui correspond aux sections spatiales, car il n'y a pas de termes croisés dans la forme de Schwarzschild)

La forme complète peut s'écrire de façon équivalente :

$$ds^2 = dT^2 - (dr + (r_s/r)^{1/2}.dT)^2 - [r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] \quad (2-1-5)$$

On voit que toute la « courbure » de la géométrie dans cette forme est encodée dans le terme

$$(dr + (r_s/r)^{1/2}.dT)^2.$$

Des travaux plus récents ont montré que cette forme fait partie d'une classe plus générale de formes de coordonnées.<sup>24</sup>

En effet si on autorise une vitesse non nulle à l'infini  $v_\infty \neq 0$  (en unité de  $c$ ,  $v_\infty = 1$  pour  $v_\infty = c$ ), et qu'on pose  $p = 1 - v_\infty^2$ , on obtient alors une famille de formes.

$$ds^2 = dT^2/p - p[dr + (1-p[(1-r_s/r)]^{1/2}.dT/p)^2 - [r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] \quad (2-1-6)$$

On remarque immédiatement que les sections spatiales ( $dT = 0$ ),

$$ds^2 = -p.dr^2 - [r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] \quad (2-1-7)$$

ne sont plus plates dans le cadre de cette extension

On vérifie que cette forme se réduit bien à la forme (2-1-1) pour  $p = 1$  ( $v_\infty = 0$ ).

Et propriété très intéressante, pour  $p = 0$  soit  $v_\infty = 1$ , c'est dire dans le cas d'une géodésique lumière radiale entrante, la relation (2-1-2) donne :

$$\lim_{p \rightarrow 0} T(p \rightarrow 0) = t + r^*$$

$$\text{Avec } r^* = r + r_s \cdot \ln|1-r/r_s|$$

Ce qui donne la forme d'Eddington Finkelstein.

Ce qui montre que la forme de Painlevé et celle de d'Eddington Finkelstein appartiennent à une même famille. Par ailleurs on peut construire des coordonnées de ce type pour décrire un espace temps de Kerr non sphérique.<sup>25</sup>

## 2-2 1924- Coordonnées d'Eddington<sup>26</sup>.

La forme s'écrit :

$$ds^2 = -(1-r_s/r)dv^2 + dv.dr + dr.dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2) \quad (2-2-1)$$

A l'époque, l'horizon, la « boule de Schwarzschild » était considéré comme « impénétrable ». De plus il était malséant de parler de ces « erreurs de la nature » qu'on appelait trou noir. Eddington en particulier en était un des détracteurs les plus virulents. Se demander s'il était possible de traverser l'horizon à cette époque, autrement dit, se demander si l'espace temps

<sup>24</sup> Lake K (1994) arXiv :gr-qc/9407005 v1 5 Jul 94, discuté préalablement par Gautreau et Hoffmann

<sup>25</sup> C. Doran (2000) A new form of the Kerr solution, Phys.rev D61,067503-067506

<sup>26</sup> Eddington A.S 1923. The mathematical theory of gravitation. Cambridge Un. Press 1923, 336p

sous l'horizon avait un caractère physique, faisait partie des problèmes qu'on ne se posait pas. D'ailleurs, avec les coordonnées de « Schwarzschild » cela semblait impossible de décrire des trajectoires qui traversaient l'horizon puisque cela prenait un temps infini pour l'atteindre. Paradoxalement, Eddington a été le premier à proposer des coordonnées de ce type<sup>27</sup> qui étaient non singulières à  $r = r_s$  et qui permettaient donc une description des trajectoires et géodésiques traversant cet horizon et allant jusqu'à la singularité centrale. Il n'a pas eu conscience, semble t'il, de l'importance de cette découverte et n'a pas exploité ces coordonnées, convaincu sans doute comme il l'était de l'inexistence des trous noirs. Il se plaisait à déclarer « Il doit y avoir dans la nature des lois qui doivent empêcher cela ».

### 2-3 1933- Coordonnées de Lemaître :

En 1933 Lemaître<sup>28</sup>, qui travaillait activement sur son sujet de prédilection, la cosmologie, dans un long article mal diffusé à l'époque, car écrit en français et paru dans une revue belge, note au passage une analogie entre certaines solutions de cosmologies et celle de Schwarzschild.

Il est vraiment le premier à prendre conscience que la singularité à  $r = 2GM/c^2$  est « fictive ». Il écrit : « La singularité du champ de Schwarzschild est donc une singularité fictive, analogue à celle qui se présentait à l'horizon du centre dans la forme originale de l'univers de de Sitter ».

Il propose une forme dans un référentiel « chute libre radiale », qui semble présenter une parenté avec celle de Painlevé-Gullstrand, mais qui est « comobile » ce qui fait que la coordonnée  $t$  est le temps propre  $\tau$  de l'observateur, non singulière à  $r = 2GM/c^2$  qui permet d'accéder à la région sous l'horizon.

Cette forme s'obtient par le changement de coordonnées suivant :

$$dt = dr + (1 - r_s/r)^{-1} (r_s/r)^{1/2} dr, \quad r = [3 \cdot r_s^{1/2} \cdot (\tau - R)/2]^{2/3} \quad (2.3.1)$$

Elle s'écrit :

$$ds^2 = d\tau^2 - r_s dR^2/r - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.3.2)$$

Ou également en remplaçant  $r$  par sa valeur

$$ds^2 = d\tau^2 - [2 r_s / 3(R-\tau)]^{2/3} dR^2 - r_s^{2/3} (3(R-\tau)/2)^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2-3-3)$$

On voit que  $\tau$  est le temps propre dans cette forme, ce qui est très intéressant. La forme n'est pas statique puisqu'elle dépend du temps propre. Il n'y a pas de singularité à  $r = r_s$ .

Le diagramme  $R = f(t)$  correspondant à une géodésique radiale ( $R = \text{constante}$ ) est très explicite et permet de décrire clairement cette trajectoire. Les cônes de lumière se représentent simplement en tout point, ils sont donnés par :

$$d\tau/dR = \pm (r_s/r)^{1/2}$$

<sup>27</sup> La forme de Painlevé propose des coordonnées « chute libre », ces deux formes font partie d'une même famille à un paramètre (voir coordonnées de Finkelstein), mais cela n'était pas reconnu à l'époque..

<sup>28</sup> Lemaître, Georges (1933), « l'univers en expansion ». Annales de la société scientifique de Bruxelles, Ser.A, 53 p 51-85, en particulier p.82



Ceci qui permet de bien positionner les géodésiques temporelles, quant aux surfaces correspondant à  $r = \text{constante}$  dans la forme de Schwarzschild, ce sont des droites de pente  $+1$ . En particulier  $r = r_s$  et  $r = 0$ .

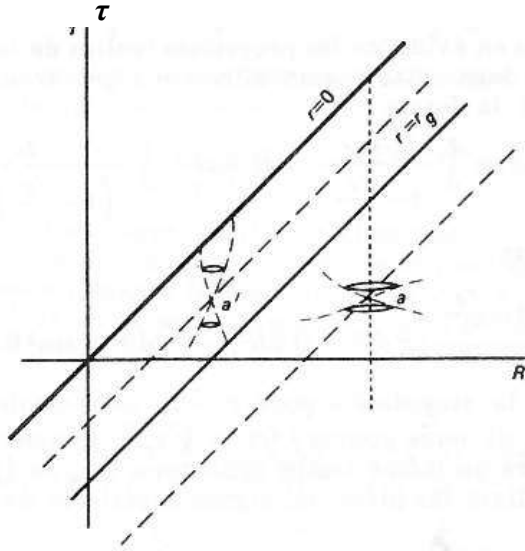


Fig. 20

### 3- Le creux de vague 1933-1949

En 1938, Robertson,<sup>29</sup> montre explicitement qu'on peut traverser l'horizon

En 1939, Einstein dans une tentative désespérée pour prouver qu'un trou noir ne peut pas se former par « effondrement » de matière publie un article<sup>30</sup> où il prétend le démontrer.

En 1939, Snyder et Oppenheimer<sup>31</sup> démontrent au contraire qu'une boule de matière sans pression peut s'effondrer en « trou noir ». C'est le prélude à l'étude de la singularité centrale.

### 4- 1950- 1960 La nature des trous noirs enfin révélée

#### 4-1 1950 La solution de Synge

Dans un article<sup>32</sup> remis en avril 1949 mais seulement publié en mars 1950, Synge propose la première forme montrant l'existence non pas de deux régions mais de 4 régions (deux autres, symétriques des deux premières).

Sa démarche n'est pas triviale et mérite qu'on s'y attarde, même si c'est un tout petit peu long, il n'y a aucune difficulté technique.

Il commence par souligner que s'il existe une solution à ce type de problème et que plusieurs formes de la métrique ont été proposées pour la décrire, en particulier celles de Schwarzschild

<sup>29</sup> Lettre de Synge à Robertson datée du 31/10/1938 cité p 329 dans :

Eisenstaedt J. (1987). Trajectoires et impasses de la solution de Schwarzschild. Archives for history of exact sciences. Vol 37, Number 4, p 275-357.

<sup>30</sup> Einstein, A. (1939). Stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. Ann. Math. 40 : 922-936. Einstein tire une conclusion erronée d'un calcul correct. Il considère un système à symétrie sphérique, formé d'un grand nombre de particules, chacune tournant sur une orbite déterminée par la masse « intérieure ». Il calcule la vitesse en fonction de l'orbite et montre que la vitesse de la lumière est atteinte à l'extérieur de l'horizon défini par la masse « intérieure » (à  $3GM/c^2$ , qui correspond à la sphère des photons). Il en déduit (à tort) qu'un trou noir ne peut donc pas exister. En fait, d'une part il ne traite pas le problème général et d'autre part, il ne peut que déduire qu'il n'y a pas d'orbite stationnaire possible en dessous d'un certain rayon ( $3GM/c^2 > 2GM/c^2$ ).

<sup>31</sup> Oppenheimer J.R., & Snyder H. (1939). On continued gravitational contraction. Phys. Rev. 56: 455-459

<sup>32</sup> Synge J.L (1950). « The gravitational field of a particle ». Proc. R. Irish Acad. A 53, 83-114

et de Lemaître, la structure de l'espace temps qu'elles représentent reste bien obscure et qu'en réalité, on sait bien peu de choses à ce sujet.

Celle de Schwarzschild a le mérite de bien mettre en évidence la symétrie sphérique spatiale et le caractère statique de la région extérieure mais ne permet pas de voir que l'horizon est une singularité fictive et qu'on peut le traverser, celle de Lemaître n'a pas ces propriétés mais par contre elle a le mérite de montrer que la singularité à  $r = r_s$  est fictive, donc qu'un observateur peut en théorie traverser l'horizon et qu'il faut bien considérer la région « intérieure » comme « physique ».

Mais tout cela est bien maigre.

Après cette sensibilisation, sans justification préalable à caractère épistémologique, il introduit à priori un certain nombre de fonctions qui vont lui servir dans la suite.

Il prend résolument une approche de mathématicien plutôt que de physicien, ce qui va le servir d'un côté et le desservir d'un autre comme nous allons le voir.

Il introduit des variables cartésiennes  $u$  et  $v$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$  qui définissent un plan complet<sup>33</sup>. Il va construire des fonctions, non pas de  $u$  et  $v$  directement, mais de  $(u^2 - v^2)$  qu'il va utiliser dans l'élaboration de sa nouvelle forme de la métrique. Il commence par définir la forme d'une certaine fonction :

$$Y = a^2 X [1 + (\sum_0^\infty X^m / (2m+1)!) (\sum_0^\infty X^n / 2n !)]^2 \quad (4-1-1)$$

Cette fonction a des propriétés pas triviales, en effet sous forme paramétrique, en posant :

$$\begin{aligned} X &= \xi^2 & (\xi \geq 0) \text{ pour } X \geq 0 \\ X &= -\eta^2 & (\eta \geq 0) \text{ pour } X \leq 0 \end{aligned}$$

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} Y &= a^2 (\xi + \sinh \xi \cdot \cosh \xi)^2 & \text{pour } X \geq 0 \\ Y &= -a^2 (\eta + \sin \eta \cdot \cos \eta)^2 & \text{pour } X \leq 0 \end{aligned}$$

Synge a construit une fonction qui « change de nature » au passage de  $X$  par zéro.

Notons que  $X$  et  $Y$  sont toujours de même signe (et nuls) en même temps

Elle fait intervenir des fonctions trigonométriques hyperboliques non périodiques pour  $X \geq 0$ , et des fonctions trigonométriques périodiques pour  $X \leq 0$  (et nulle pour  $X = 0$ ).

On imagine l'usage qu'il va en faire dans le problème qu'il se propose de traiter et on devine que  $X = Y = 0$  va correspondre à une « frontière », l'horizon probablement.

Il va étudier son comportement. Elle est croissante et régulière partout, mais sa dérivée s'annule pseudo périodiquement dans le domaine négatif.

Synge va s'intéresser à la fonction inverse  $f$ , définie par  $X = f(Y)$ .

On la retrouve bien croissante et continue et sa dérivée est infinie pseudo périodiquement, dans le domaine négatif, là où la fonction de départ avait une dérivée nulle.

<sup>33</sup> Elles vont se substituer aux variables  $t, r$  de la forme de Schwarzschild, qui définissaient un demi plan ( $r > 0$ ). D'où l'extension. On conserve en général la variable  $r$  (alors fonction de  $u, v$ ) dans la partie à symétrie sphérique.

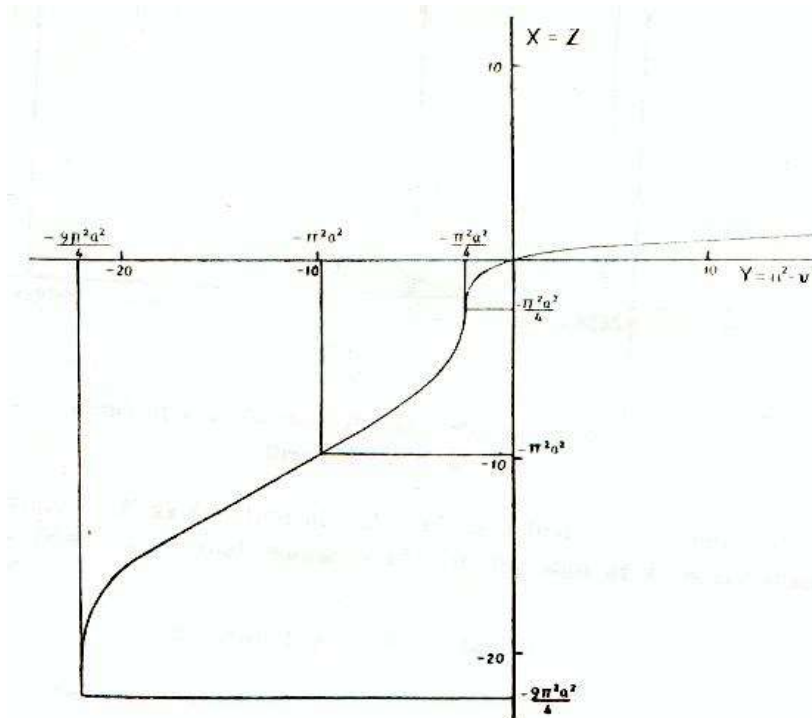


Fig 4-1-1 Représentation de  $X = f(Y)$ , la fonction inverse de  $Y = g(X)$

Cette fonction  $f$  étant ainsi définie il va l'utiliser pour définir  $Z$  comme fonction de  $u^2 - v^2$  par :

$$Z = f(u^2 - v^2)$$

C'est bien cette fonction de  $(u^2 - v^2)$  qu'il cherchait à définir et qui selon lui va être la *clé de voûte* de la construction de l'extension<sup>34</sup> de la forme de la métrique de Schwarzschild, le reste n'étant qu'habillage.

Il inverse la fonction  $f$  (cela devient une habitude) ce qui donne :

$$u^2 - v^2 = a^2 Z [1 + (\sum_{0}^{\infty} Z^m / (2m+1)!) (\sum_{0}^{\infty} Z^n / 2n !)]^2 \tag{4-1-2}$$

Ce qui est exactement (et pour cause, on inverse deux fois) la fonction initiale où  $X$  est devenu  $Z$  et  $Y$  est devenu  $u^2 - v^2$ .

Le procédé paraît bizarre, il semble qu'on aurait pu directement poser le résultat, Synge a sans doute voulu marquer les deux étapes, la définition formelle d'une fonction ayant certaines propriétés et l'application à son problème.

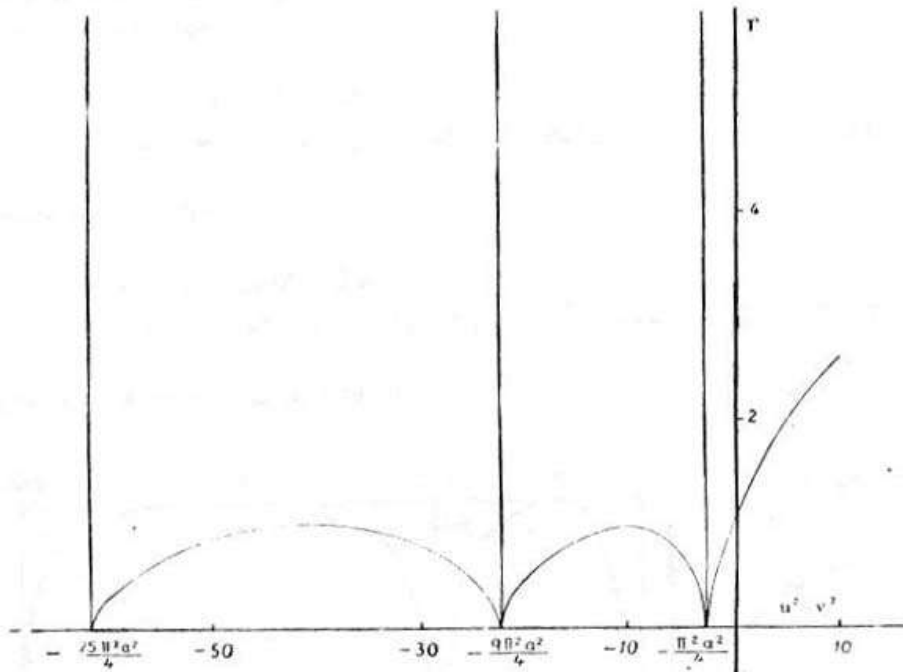
Remarquons que comme  $(u^2 - v^2) \leftrightarrow Y$  et que nous avons vu que la fonction changeait de nature au passage de  $Y = 0$ , elle va changer de nature pour  $(u^2 - v^2) = 0$ , ce qui va correspondre à l'horizon comme nous le verrons plus loin, et ce dont nous nous doutions

Ensuite il définit  $r$  et  $F$  fonctions de  $Z$  et  $(u^2 - v^2)$ , donc de  $(u^2 - v^2)$  seulement puisque  $Z$  est lui-même une fonction de  $(u^2 - v^2)$  et quelques autres fonctions annexes.

<sup>34</sup> Notons que dans son texte c'est le seul endroit où il déclare explicitement que la forme qu'il propose est bien une extension de la forme de Schwarzschild. Il l'a pourtant construite par le choix de ses variables  $u, v$  définissant un plan complet. Il n'y fera référence ensuite qu'implicitement quand il comparera sa forme de la métrique avec celle de Lemaître (qu'il a d'ailleurs intempestivement étendue) en soulignant que des géodésiques dans sa métrique peuvent être issues de la singularité dans le passé, traverser l'horizon du passé puis celui du futur pour aller vers la singularité du futur, alors que dans la forme de Lemaître passé et futur sont totalement disjoints. Tout cela étant représenté de façon très claire sur des diagrammes visualisant les lignes d'univers et leur orientation. En tant que mathématicien, il ne lui a sans doute pas paru utile de le répéter.

Soulignons que  $r$  est bien la variable radiale  $r$  de la forme de Schwarzschild, donc  $r(u^2-v^2)$  définit bien la valeur de  $r$  dans ces coordonnées. Remarquons que  $r = \text{constante}$  est un cercle en coordonnées de Schwarzschild et une hyperbole en coordonnées de Synge car  $r$  est une fonction de  $u^2-v^2$ . Ceci correspond à une « rotation de Wick <sup>35</sup> » entre le plan  $r, t$  et le plan  $u, v$

Pour conclure cette partie un peu détaillée donnons l'allure des fonctions  $r(u^2-v^2)$  et  $F(u^2-v^2)$ .



**Figure 4-1-2**  $r(u^2-v^2)$

Remarquons que la fonction  $r(u^2-v^2)$  est telle que :

$$r \geq r_s \text{ pour } u^2-v^2 \geq 0 \quad \text{et}$$

$$r \leq r_s \text{ pour } u^2-v^2 \leq 0$$

<sup>35</sup> La rotation de Wick transforme une géométrie Euclidienne en géométrie «Lorentzienne » et vice versa

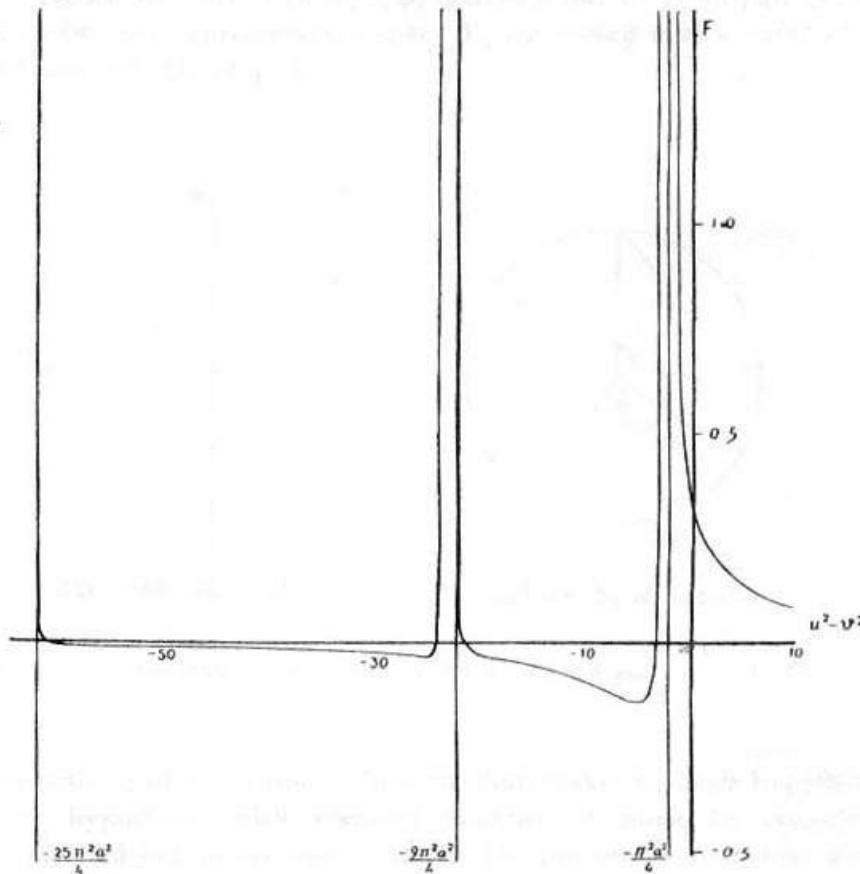


Figure 4-1-3  $F(u^2-v^2)$

$F(u^2-v^2)$  est une fonction assez complexe qui dans ce contexte, incorpore toutes les singularités<sup>36</sup> et assure la compatibilité avec la forme de Schwarzschild, dans le changement de coordonnées réalisé.

Syngé propose alors directement une forme de la métrique dans ses coordonnées.

$$ds^2 = du^2 - dv^2 + (v \cdot du - u \cdot dv)^2 F + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2) \quad (4-1-2)$$

Remarquons qu'il conserve la partie spatiale à symétrie sphérique en  $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)$  sous la forme classique,  $r$  étant ici une fonction de  $(u^2-v^2)$ .

Il va ensuite montrer que la forme qu'il propose est bien solution du problème du corps unique à symétrie sphérique, en répondant aux questions :

- a) La signature de la forme est correcte ?
- b) Satisfait-elle aux équations d'Einstein dans le vide  $R_{\mu\nu} = 0$  ?
- c) Est-elle à symétrie sphérique ?
- d) Quelles sont ses singularités ?
- e) Quelle est la structure des géodésiques temporelles et nulles dans cette représentation ?

Il va utiliser la propriété de la covariance pour répondre aux points **b** et **c**.

<sup>36</sup> Bien que Syngé n'ait pas été très disert sur les raisons qui l'ont poussé à poser de telles transformations, on voit qu'un de ces soucis était sans doute de regrouper les difficultés dans une seule fonction en y concentrant toutes les singularités, cette contrainte conduisant à une forme assez compliquée pour la métrique. La question clé étant cela a-t-il été son souci principal et la découverte de la partition en 4 régions une conséquence ? Au quel cas, il aurait été remarquablement « inspiré ».

En effet, comme cela a été démontré dans le cas de la forme de Schwarzschild, il suffira de démontrer que cette forme s'en déduit par un changement de coordonnées  $(u, v) \leftrightarrow (r, t)$ .

Il apparaît qu'il est bien le premier à introduire les coordonnées  $u, v$  reliées aux coordonnées  $r, t$  de la forme de Schwarzschild par des relations du type:

$$u(r, t) = R(r) \cdot \cosh(t/2r_s), \quad v(r, t) = R(r) \cdot \sinh(t/2r_s) \text{ pour } u^2 - v^2 > 0$$

$$u(r, t) = R(r) \cdot \sinh(t/2r_s), \quad v(r, t) = R(r) \cdot \cosh(t/2r_s) \text{ pour } u^2 - v^2 < 0$$

La fonction  $R(r)^{37}$  est définie par :  $dR^2 = dr^2/(1 - r_s/r)$  pour  $u^2 - v^2 > 0$  et

$$-dR^2 = dr^2/(1 - r_s/r) \text{ pour } u^2 - v^2 < 0 \text{ pour que } dR^2 \text{ soit toujours positif.}$$

On voit que la métrique dans cette forme (4-1-2) dépend à la fois directement de  $u$  et  $v$  et indirectement de  $u$  et  $v$  à travers les fonctions  $F(u^2 - v^2)$  et  $r(u^2 - v^2)$ .

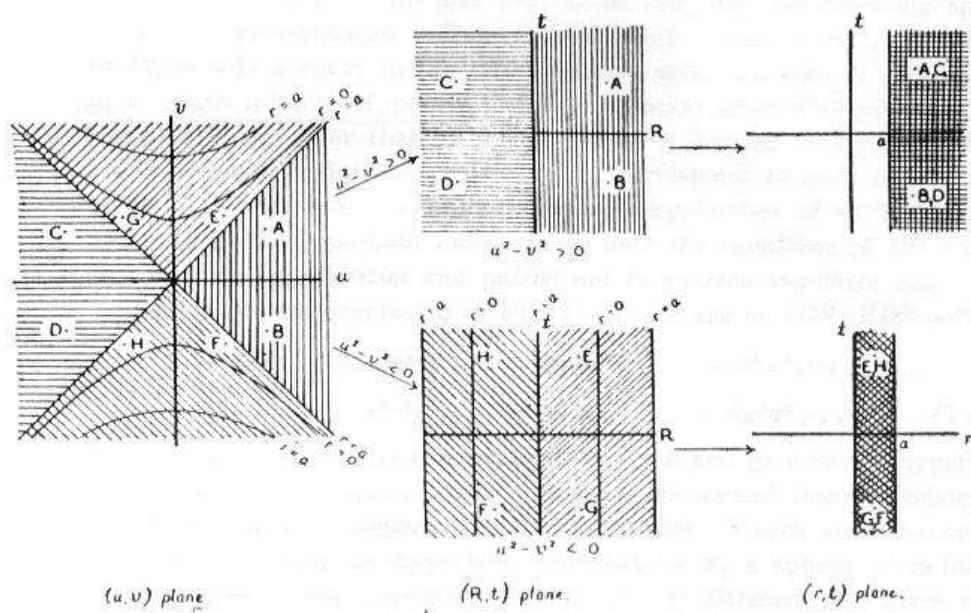
Elle n'est pas diagonale car elle possède des produits croisés  $du \cdot dv$ .

L'axe des  $v$  est de type temps, celui des  $u$  de type espace.

Elle ne présente pas de singularités « apparentes », toutes les singularités ayant été « regroupées et encodées » dans la fonction  $F$ . Ses singularités sont celles de la fonction  $F$ .

L'analyse dans le plan  $u, v$  fait bien apparaître que les courbes à  $r = \text{constante}$ , correspondant à  $u^2 - v^2 = \text{constante}$ , sont des hyperboles dont les asymptotes communes (définies par  $u^2 - v^2 = 0$ ) délimitent quatre régions qu'on appellera, conformément à la figure 4-1-4 ci dessous:

**I = (A+B), II = (E+G), III = (F+H), IV = (C+D).**



**Figure 4-1-4 : Liens entre les régions des différentes représentations**

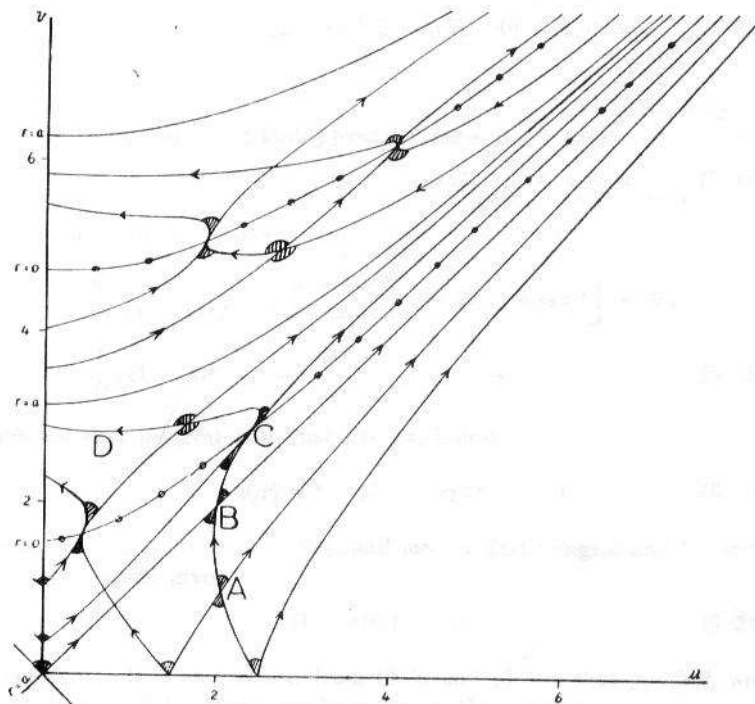
Les asymptotes correspondant à  $u^2 - v^2 = 0$  définissent bien l'horizon, tel qu'il est défini dans la forme de Schwarzschild, puisque pour  $u^2 - v^2 = 0$ , la fonction  $r(u^2 - v^2)$  vaut  $r_s$ .<sup>38</sup>

<sup>37</sup>  $R(r)$  est intégrable :  $R(r) = [r(r-a)]^{1/2} + a \cdot \text{arg th}[(1-a/r)^{1/2}]$  ou  $r(a-r)^{1/2} - a \cdot \text{arctg}[(a/r - 1)^{1/2}]$  selon signe de  $u^2 - v^2$ .  
**Bronstein I.N & Semandiev K.A** (1982), *Éléments d'analyse mathématiques*, In « Aide mémoire de mathématiques », 7ème édition p537 (Eyrolles)

<sup>38</sup> On n'a pas donné ici la forme de  $r(u^2 - v^2)$  mais on peut le voir sur la courbe représentée fig.4-1-2.

Pour les régions **II** et **III**, nous n'avons considéré que la partie entre les asymptotes et l'hyperbole  $r = 0$ . En fait la solution de Synge définit une infinité d'autres régions entre les infinités d'hyperboles  $r = 0$  et  $r = r_s$ . Ces sous régions apparaissent comme un artefact lié à la fonction  $r(u^2-v^2)$  qu'il a définie et qui est pseudo périodique pour  $r < r_s$ . Les hyperboles représentant les singularités à  $r = 0$  sont bien de type espace (leur métrique est dégénérée).

Comme Synge considère (à tort) qu'on peut traverser les singularités  $r = 0$ , il étend à l'infini les géodésiques temporelles dans les régions **II** et **III**, conférant une réalité physique à ces artefacts. Malgré ces défauts, sa représentation de l'espace temps en y insérant les différents types de géodésiques mérite qu'on s'y attarde.



**Figure 4-1-5 : géodésiques nulles orientées dans la solution de Synge. Les géodésiques de type temps (à l'intérieur du cône de lumière) ne sont pas représentées, mais sont confinées dans les zones dont le sommet est ombré. Compte tenu des symétries par rapport aux axes  $u, v$ , seul un quart du diagramme est représenté**

Remarquons l'asymptote à  $r = a$ , puis les hyperboles à  $r = 0$  et  $r = a$ .

Sa représentation, si on exclut la partie au dessus de la première hyperbole  $r = 0$  est remarquablement innovante.

Synge a bien pris en compte que dans un espace temps vide, c'est la description des géodésiques (qui en tissent la trame), qui le caractérise le mieux.

Cette représentation montre bien où se situent les géodésiques de type temps.

Cette idée sera reprise avec succès dans des travaux ultérieurs.<sup>39</sup>

Pour la partie au dessus de la première asymptote  $r = 0$ , son approche trop formelle l'a desservi. S'il avait considéré l'aspect physique du problème il n'aurait pas commis cette

<sup>39</sup> Analyse par les congruences, classification de Petrov....

erreur. C'est dommage car cet aspect qu'il développe largement complique inutilement sa présentation, sans retirer quoi que ce soit à sa découverte.

En effet les quatre régions délimitées par les asymptotes ( $u^2-v^2=0$ ) correspondant à :

$$I \rightarrow u^2-v^2 > 0 \ \& \ u > 0, \quad II \rightarrow u^2-v^2 < 0 \ \& \ v > 0, \quad III \rightarrow u^2-v^2 < 0 \ \& \ v < 0, \quad IV \rightarrow u^2-v^2 > 0 \ \& \ u < 0$$

sont les quatre régions délimitées par les mêmes asymptotes que Kruskal identifiera plus tard.

La région **I** est facilement identifiable à l'extérieur de la forme de Schwarzschild.

La région **II** est identifiable à l'intérieur de la solution de Schwarzschild.

Il lui reste les deux autres régions symétriques. Il n'a pas d'autre choix que de les « identifier » aux deux premières aux régions de la forme de Schwarzschild, comme indiqué sur la figure **4-1-4** ci-dessus.

C'est une découverte que Synge ne souligne pas suffisamment (il a bien mentionné que sa forme se proposait de réaliser une extension de la métrique de Schwarzschild, les variables qu'il utilise le réalisent, mais à part la référence implicite déjà citée quand il compare sa forme à celle de Lemaître<sup>40</sup>, il n'y revient pas).

En particulier la zone **IV** (statique, asymptotiquement plate, symétrique de la région extérieure de Schwarzschild) fait bien partie de son extension, bien qu'il n'en dise rien<sup>41</sup>.

De même il n'indique pas que c'est l'extension maximale de la solution de Schwarzschild, la chose lui semblant peut-être naturelle.

Cependant, ces erreurs, indépendantes de la découverte des quatre régions, n'enlèvent rien au caractère innovant de son analyse et à l'intérêt de la solution qu'il a trouvée.

L'extension à quatre régions est parfaitement valide.

## **4-2 1958 Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington<sup>42</sup>.**

La démarche utilisée par Finkelstein est intéressante et diffère notablement de la façon dont ces coordonnées sont introduites trivialement aujourd'hui<sup>43</sup>.

Finkelstein ne part pas de la forme de Schwarzschild, et ne procède pas à un changement de coordonnées pour obtenir sa solution. Comme il cherche l'extension maximum de la variété, il reprend le problème ex nihilo, et cherche en fait une forme, en coordonnées cartésiennes décrivant une variété possédant un certain nombre de propriétés caractéristiques, satisfaisant à huit conditions selon lui.

<sup>40</sup> Notons que lorsqu'il compare sa solution à celle de Lemaître il l'étend également sans sourciller en considérant que des géodésiques nulles ou temporelles peuvent traverser (comme dans sa solution) la singularité à  $r=0$ , négligeant le fait qu'en  $r=0$  la variété présente une singularité et que les équations d'Einstein ne s'appliquent pas.

<sup>41</sup> On ne peut y accéder que par des géodésiques de type espace mais pas de type temps ou lumière.

<sup>42</sup> Finkelstein D. (1958) Past-Future asymmetry of a gravitational Field of a point particle. Phys. Rev. 110 : p 965-967. Nous avons vu que ces coordonnées et celles de Painlevé Gulland appartiennent à une même famille.

<sup>43</sup> Aujourd'hui on obtient cette forme très simplement en établissant l'équation d'une géodésique nulle radiale entrante<sup>43</sup> dans la forme de Schwarzschild d'équation.  $ds^2 = -dt^2(1-r_s/r) + dr^2/(1-r_s/r) = 0$  : eq(4-2-1).

On tire de cela une relation du type  $dt = \pm dr / (1-r_s/r)$ , soit  $dt = -dr / (1-r_s/r)$  pour la géodésique entrante, qu'on intègre pour obtenir :  $t = -r - r_s \ln(r/r_s - 1) + u$ , soit  $u = t + r + r_s \ln(r/r_s - 1)$

On a introduit cette nouvelle variable  $u$ , qui est telle que  $u = \text{constante}$  correspond à cette géodésique lumière comme on peut le voir sur l'équation (4-2-1) et comme c'est représenté sur la figure ci-dessous montrant les cônes de lumière dans ces coordonnées.



- a) doit être relativiste dans le vide : satisfaire l'équation d'Einstein dans le vide.
- b) doit être invariante par translation dans le temps.
- c) doit être invariant par les rotations spatiales.
- d) doit converger asymptotiquement vers la métrique de Minkowski
- e) doit considérer que  $x^i = 0$  ( $x^i$  sont les coordonnées spatiales) est une « vraie » singularité.
- f) invariant par le groupe discret de symétrie spatiales :  $x^i \rightarrow x^i = -x^i$ ,  $x^0 \rightarrow x^0 = x^0$
- g) invariant par le groupe discret de symétrie temporel :  $x^0 \rightarrow x^0 = -x^0$ ,  $x^i \rightarrow x^i = x^i$
- h)  $x^0$  doit de type temps partout  $\rightarrow g_{00} > 0$  dans toute la variété

En les analysant, il arrive à la conclusion que les conditions **a-e** suffisent à elles seules pour définir totalement un  $g_{\mu\nu}$  analytique qui satisfait **f** mais ni **g** ni **h**.

Il souligne l'asymétrie temporelle (passé  $\leftrightarrow$  futur) des solutions, dans le cas du champ créé par une particule ponctuelle et ceci en dépit de la symétrie temporelle de l'équation d'Einstein, ce qui le surprend. Il déclare :

« Il semble que l'invariance par renversement du temps en Relativité Générale ne s'applique pas au cas du champ d'une particule ponctuelle de masse positive sphérique. Bien que les conditions **a-e** ne distinguent pas entre passé et futur, le seul univers qui les satisfasse fait cette distinction.

Comment des causes symétriques peuvent produire des effets qui ne le sont pas ?

Une telle violation du principe de raison suffisante doit être attribué à la nature non linéaire de la gravitation »

Après avoir fait remarquer que la solution de Einstein Rosen<sup>44</sup> pour le champ créé par une particule apparaît plutôt comme un rapiécage d'espaces extérieurs que comme une variété, puisque, entre autres, elle est singulière à la couture, il va rechercher dans une voie différente. L'asymétrie qu'il relevé, va le conduire à définir deux formes, une pour chaque « sens » du temps, en considérant que chaque forme, qui diffère de l'autre par le signe du produit croisé, décrit de façon complète une variété.

Le fait que l'horizon se comporte comme une membrane unidirectionnelle dans un sens pour une solution (on traverse l'horizon dans le sens du futur) et dans l'autre pour l'autre solution (on traverse l'horizon dans le sens du passé) le conforte dans son analyse d'asymétrie temporelle.

Il considère donc qu'il y a deux variétés différentes, correspondant à deux extensions différentes de la région « extérieure » à l'horizon et se demande sur quel critère on est dans une plutôt que dans l'autre. Il attribue cela à une instabilité, liée aux phénomènes non linéaires C'est de ces considérations seulement, sans faire référence a priori<sup>45</sup> à la forme de Schwarzschild, qu'il va déduire ses formes (il pose  $r_s = 1$ ,  $r = (x^i \cdot x^i)^{1/2}$   $dr = x^i \cdot dx^i / r$ )

#### a) Première forme

$$ds^2 = (1 - 1/r)(dx^0)^2 - 2(dx^0 \cdot dr)/r - (1 + 1/r)dr^2 - (dx^i \cdot dx^i - dr^2)$$

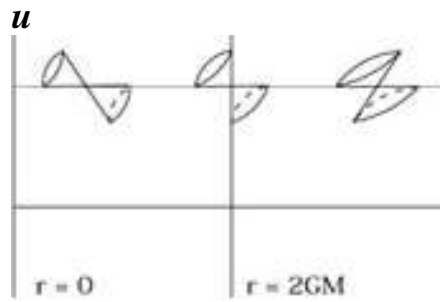
qu'on trouve aujourd'hui en coordonnées sphériques plutôt écrite comme cela :

$$ds^2 = -(1 - r_s/r)du^2 + (du \cdot dr + dr \cdot du) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)$$

On peut la représenter par la figure suivante

<sup>44</sup> Cette solution utilise des équations du champ modifiées (pour éliminer la singularité). Einstein A. & Rosen N. (1935). The Particle Problem in the General Theory of Relativity. Phys. Rev. V48 p73-77

<sup>45</sup> Mais il vérifiera sa compatibilité à postériori.



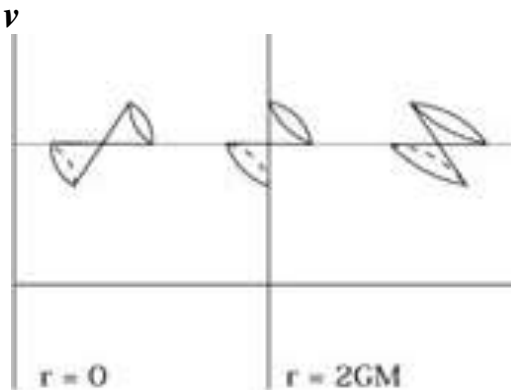
On voit qu'on peut traverser l'horizon sur une géodésique temporelle orientée vers le futur

**b) Deuxième forme**

$$ds^2 = (1 - 1/r)(dx^0)^2 + 2(dx^0 \cdot dr)/r - (1 + 1/r)dr^2 - (dx^i \cdot dx^i - dr^2)$$

qu'on trouve aujourd'hui en coordonnées sphériques plutôt écrite comme cela :

$$ds^2 = -(1 - a/r)dv^2 - (dv \cdot dr + dr \cdot dv) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)$$



On voit qu'on peut franchir l'horizon sur une géodésique temporelle orientée vers le passé

Ces coordonnées effacent bien la singularité de coordonnées à  $r = r_s$ , mais il lui faut deux référentiels (coordonnées avancées et retardés) pour couvrir 3 régions : a) couvre les régions **I** et **II**, et b) couvre les régions **I** et **III**. La région **IV** n'est pas couverte.

Finkelstein contribue à ouvrir la voie à la solution complète, mais son article montre que, encore en 1958, les idées ne sont pas très claires. En effet, Finkelstein considère encore que les deux formes qu'il a établies décrivent deux variétés différentes du fait de l'asymétrie temporelle qu'il n'arrive pas à interpréter correctement et que chacune des formes représente l'extension analytique maximum de la variété correspondante.

Comme nous l'avons noté, Synge, en précurseur, était allé plus loin sur ce point.

**4-3 1959 : représentation géométrique de Fronsdal**

A la même période décidément très féconde, Fronsdal<sup>46</sup> propose une autre approche originale de description géométrique de la solution, s'affranchissant du système de coordonnées choisi,

<sup>46</sup> Fronsdal C.(1959). Completion and embedding of the Schwarzschild solution. Phys. Rev. 116 p 778-781.

en imbriquant cet espace temps à 4 dimensions (décrit par la forme de Schwarzschild) dans un espace pseudo euclidien à six dimensions<sup>47</sup>.

L'imbrication de la forme de Schwarzschild,

$$ds^2 = (1 - r_s/r)dt^2 - dr^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)$$

dans un espace plat pseudo euclidien à six dimensions notées  $Z_1-Z_6$  avait été démontré par Kasner qui avait réalisé une telle imbrication sur la base du changement de coordonnées ci-dessous.

$$ds^2 = dZ_1^2 + dZ_2^2 - dZ_3^2 - dZ_4^2 - dZ_5^2 - dZ_6^2$$

Avec

$$Z_1 = (1-1/r)^{1/2}\cos(t), Z_2 = (1-1/r)^{1/2}\sin(t), Z_3 = f(r), Z_4 = r.\sin\theta\sin\varphi, Z_5 = r.\sin\theta\cos\varphi, Z_6 = r.\cos\theta,$$

Avec  $(df/dr)^2 = (1/4r^3 + 1)/(r-1)$  (4-3-1)

Ce changement de coordonnées ne permettait que de représenter la partie statique de cet espace temps ( $r > r_s$ ), comme l'équation (4-3-1) ci-dessus, non intégrable pour  $r < 1$ , le montre. De plus cette solution a pour inconvénient que l'imbrication de la variété au moyen de fonctions périodiques de  $t$  identifie des points différents de la variété originale sur des points uniques de son image.

Fronsdal, va remplacer les fonctions trigonométriques par des fonctions hyperboliques. Il définit une nouvelle imbrication :

$$ds^2 = dZ_1^2 + dZ_2^2 - dZ_3^2 - dZ_4^2 - dZ_5^2 - dZ_6^2$$

Avec

$$Z_1 = (1-1/r)^{1/2}\sinh(t/2), Z_2 = (1-1/r)^{1/2}\cosh(t/2), Z_3 = g(r), Z_4 = r.\sin\theta\sin\varphi, Z_5 = r.\sin\theta\cos\varphi, Z_6 = r.\cos\theta,$$

Il trouve :

$$(dg/dr)^2 = (r^2+r+1)/4r^3 \tag{4-3-2}$$

qui est intégrable partout pour  $r > 0$ .

Il est possible d'éliminer les coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$ , avec ces équations, mais il est plus simple et sans problème (car  $Z_3$  est une fonction monotone de  $r$ ) de garder  $r$  comme paramètre. On obtient alors :

$$Z_2 = +(4 - 4/r + Z_1^2)^{1/2}, \quad \text{soit} \quad Z_2^2 - Z_1^2 = 4(1 - 1/r)$$

$$Z_3 = + \int (dr(r^2+r+1)^{1/2}/r^{3/2})$$

$$Z_4^2 + Z_5^2 + Z_6^2 = r^2$$

Cette représentation est analytique de  $0 < r < \infty$ . Elle n'est pas maximum, car il est clair qu'il y a des géodésiques qui passent par  $Z_2=0$ .

---

<sup>47</sup> Kasner E. (1921b) Am.J.Math. 43, 130 a démontré cette possibilité ; il aussi démontré que c'était impossible dans un espace à 5 dimensions : Kasner E. (1921a) Am.J.Math. 43 126

Elle peut être étendue en considérant l'autre branche ( $Z_1^2 - Z_2^2 = 4(1 - 1/r)$ ) de l'hyperbole. La variété ainsi définie contient deux régions de Schwarzschild intérieures et deux régions extérieures. Les géodésiques de type temps relient les deux régions intérieures via la région extérieure, mais il n'en existe pas qui relient les deux régions extérieures.

**Cette représentation de l'extension analytique maximum** permet de mieux visualiser, en particulier par une section à trois dimensions, la géométrie et la topologie de la solution.

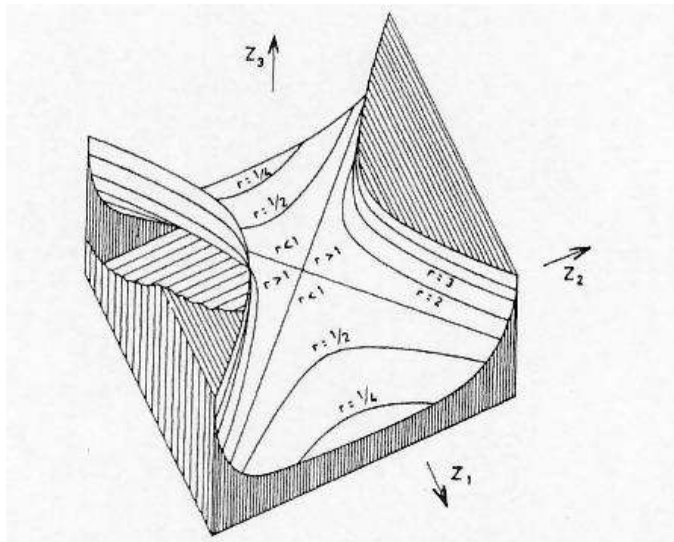


FIG. 1. The surface defined by Eqs. (18), showing the subspace  $d\theta = d\varphi = 0$  of the completed Schwarzschild manifold as a 2-dimensional surface in a pseudo-Euclidean space. Of the coordinate directions  $Z_1$  is time-like,  $Z_2$  and  $Z_3$  space-like.

#### 4-4 1960 Solution de Kruskal

##### La méthode et les résultats de Kruskal

En 1960, dans un article<sup>48</sup> très court d'une limpidité exemplaire, Kruskal décrit les 4 régions dans un seul système de coordonnées<sup>49</sup>.

Il explique clairement son objectif : trouver une forme de la métrique, explicitement à symétrie sphérique dans laquelle les cônes de lumière en tout point ont une pente de  $\pm 1$  ( $dx^1/dx = \pm 1$ ), de la forme :

$$ds^2 = f^2(r)(-dv^2 + du^2) + r^2.d\omega^2$$

Où  $f$  est une fonction qui ne dépend que de  $r$ , qui doit rester finie et non nulle pour  $u = v = 0$ . Il va la déterminer en cherchant une transformation qui va permettre d'identifier cette forme avec celle originale de Schwarzschild.

<sup>48</sup> Kruskal M. D. (1960). Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys.Rev. 119 : p 1743-1745.

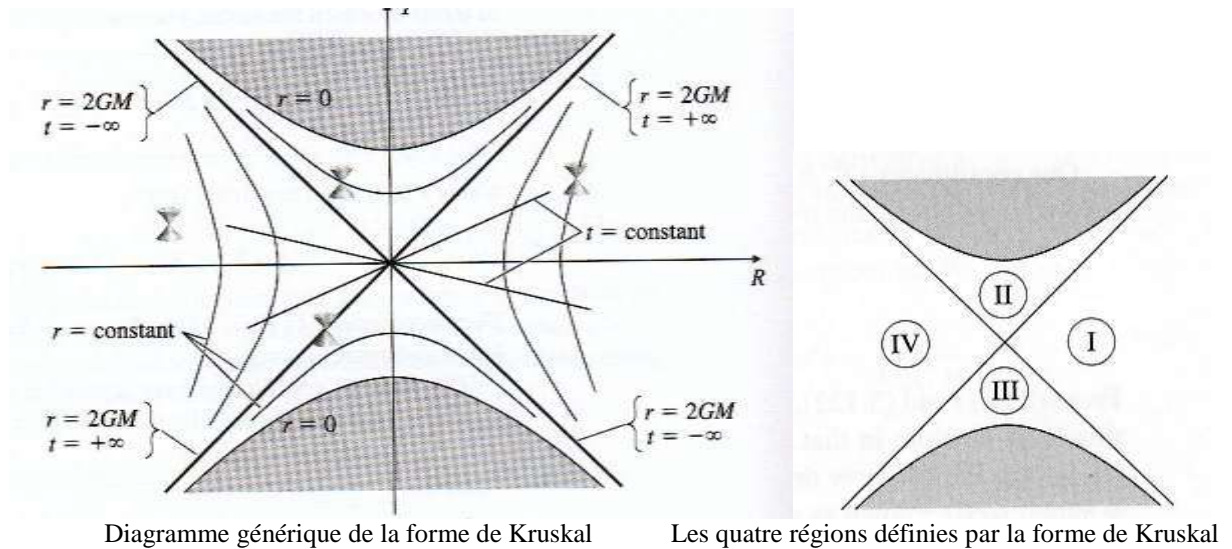
<sup>49</sup> Aujourd'hui la démonstration simple qu'on utilise déduit cette forme en combinant les deux formes de Finkelstein. On remplace partiellement les variables  $r, t$  de la forme de Schwarzschild par les variables  $u, v$  de celle de Finkelstein. Ceci donne  $ds^2 = \frac{1}{2} (1 - r_s/r)(dudv + dv.du) + r^2 d\Omega^2$ . On introduit de nouvelles variables pour ramener l'horizon à distance finie,  $u' = -\exp(-u/2r_s)$ ,  $v' = \exp(-v/2r_s)$ , soit  $u' = -(r/r_s - 1)^{1/2} \exp((r-t)/2r_s)$  et  $v' = (r/r_s - 1)^{1/2} \exp((r+t)/2r_s)$ , en termes de variables initiales. On obtient une nouvelle forme, mais comme les coordonnées  $u'$  et  $v'$  sont de type nul, ce qui est possible mais qu'on préfère en général travailler avec des coordonnées dont l'une est de type temps et les autres de type espace, on pose  $T = \frac{1}{2} (v' + u')$  et  $R = \frac{1}{2} (v' - u')$ . On obtient alors la solution de Kruskal:  $ds^2 = (4r_s^3/r) \cdot \exp(-r/r_s) (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2$

Les équations de transformation conduisent à une solution unique entre le quadrant  $u > |v|$  et la région définie par  $r > 2GM/c^2$  dans la solution de Schwarzschild.

Les relations directes, en rappelant qu'on pose  $r_s = 2GM/c^2$ , sont :

$$u = [(r/r_s) - 1]^{1/2} \exp(r/2r_s) \cosh(t/2r_s)$$

$$v = [(r/r_s) - 1]^{1/2} \exp(r/2r_s) \sinh(t/2r_s)$$



Les relations inverses sont :

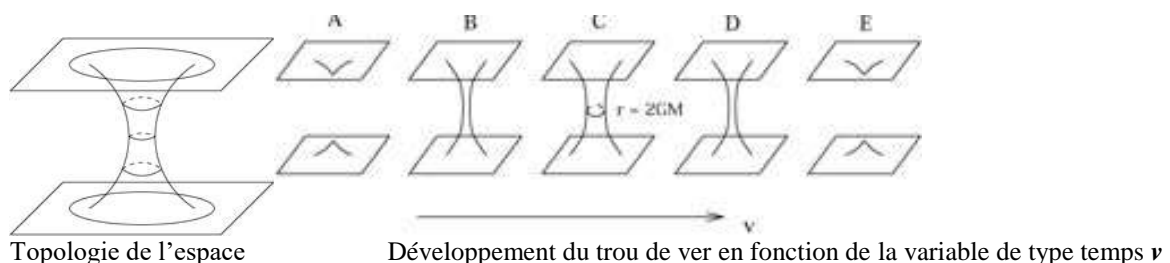
$$[(r/r_s) - 1]^{1/2} \exp(r/2r_s) = u^2 - v^2 \text{ pour } r(u, v)$$

$$t/2r_s = \operatorname{arctanh}(v/u) = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}[2uv/(u^2 + v^2)] \text{ pour } t(u, v)$$

Relations qui sont manifestement invariantes par les transformations directes du fait de la symétrie par rapport à  $u, v$  de la deuxième et de la parité des inversions de signe dans la première, ce qu'on peut vérifier simplement.

Il démontre que cela correspond bien à l'extension maximum, en entendant les géodésiques de tout type (temporelles, nulles, spatiales) dans les deux directions.

Il met en évidence la topologie spatiale de l'extension maximum (deux régions asymptotiquement euclidiennes connectées par un pont de Rosen Einstein ou un trou de ver<sup>50</sup>)



<sup>50</sup> Ce pont résulte du fait que les sections spatiales ne sont pas statiques sous l'horizon (la coordonnée  $r$  est de type temps). Mais ce pont n'est ouvert que pendant un temps si court qu'aucune particule et que même la lumière n'a pas le temps de le traverser, il s'est refermé avant. Voir Gravitation, C. Misner, K. Thorne, A. Wheeler (ed. Freeman) p.837-840.

## Kruskal s'est-il inspiré de Synge entre autres ?

Kruskal cite explicitement Kasner (1921b), Lemaître (1933), Einstein et Rosen (1935) Robertson (1939), **Syngé (1950)**, Ehlers, Finkelstein(1958) et **Fronsdal, (1959)** comme ayant contribué à la démonstration que les singularités à  $r = 0$  et  $r = r_s$  sont de nature différentes.

Pour Fronsdal et Synge, c'est un doux euphémisme, puisque Fronsdal vient juste de mettre en évidence par une approche différente que l'extension maximum comporte bien quatre régions, et que dix ans auparavant de façon moins claire mais toutefois indiscutable Synge est arrivé à la même conclusion.

Il est assez surprenant que Kruskal ne mentionne pas les travaux de Synge de façon plus précise, car les représentations et les transformations utilisées sont très proches.

Ces transformations sont de la forme :

$$\begin{aligned} u &= g(r)\cosh(t/2 r_s), \\ v &= g(r)\sinh(t/2 r_s), \end{aligned}$$

Simplement la fonction  $g(r)$  n'est pas la même, dans les deux représentations, du fait que la forme de la métrique de Synge, qui décrit les mêmes régions, est différente.

Les asymptotes délimitant les régions sont définies par la même relation  $(u^2 - v^2) = 0$  dans les deux systèmes de coordonnées et sont donc les mêmes.

Les courbes à  $t = \text{constante}$  qui donnent  $v/u = \tanh(t/2 r_s) = \text{constante}$  (indépendante de  $g(r)$ ) sont les mêmes droites passant par l'origine dans les deux cas.

Les courbes à  $r = \text{constante}$  correspondant à  $u^2 - v^2 = \text{constante}$  sont des hyperboles dans les deux cas, avec les mêmes asymptotes comme cela a été souligné, valorisées différemment du fait que la fonction  $r(u^2 - v^2)$  est différente dans les deux systèmes de coordonnées.

Comme dans la métrique de Synge les autres régions se déduisent par des transformations dérivées de celles là, en remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs opposés pour la région **IV**,  $u$  par  $\pm v$ ,  $v$  par  $\pm u$  et  $(r/r_s) - 1$  par son opposé pour les quadrants supérieurs et inférieurs.

Devant cette similitude, qui n'aurait pu lui échapper, la contribution de Synge étant particulièrement pertinente dans le cadre de son analyse<sup>51</sup>, on ne peut que se demander s'il avait vraiment lu l'article de Synge (1950).

Syngé avait écrit en 1949 à H.P Robertson en lui présentant modestement son article comme une contribution à l'élimination de la singularité<sup>52</sup> à  $r = r_s$ .

Comme Kruskal travaillait à Princetown University, là où H.P. Robertson<sup>53</sup> avait été professeur jusqu'en 1947, il aurait pu simplement le consulter sur les conseils de A. Wheeler, car il faisait autorité dans le domaine, à qui ce qui expliquerait la modestie de l'apport que Kruskal prête à Synge.

Il est aussi possible que cela fasse partie des références « officielles » sur le sujet que lui avait communiqué A. Wheeler, également en poste à Princetown University et avec qui il était en

<sup>51</sup> L'article de Fronsdal a été remis le 9/06/59 et publié le 1/11/59, Kruskal a remis le sien le 21/12/59. Il a donc eu connaissance de l'article de Fronsdal avant de transmettre le sien. Mais par ailleurs Wheeler avait fait une communication sur les travaux de Kruskal en Juin 59. Quant à Szekeres il a remis le sien le 26/05/59 et il a été publié en 1960. On voit qu'il y a des recouvrements de date, il est difficile de dire qui a profité de qui.

<sup>52</sup> Cité p. 228 dans Earman J. & Eisenstaedt J. (1999). Einstein and Singularities. Stud.Hist.Mod.Phys. Vol 30. N°2 pp185-235. Elsevier Science Ltd GB

<sup>53</sup> En 1959 H.P Robertson était au Caltech, mais il a joué un rôle central dans l'élaboration de ces concepts.

étroite relation, puisque Wheeler, pour le compte de Kruskal, avait par ailleurs fait une présentation<sup>54</sup> abrégée de la solution présentée ici, en Juin 1959 à la conférence de Royaumont, donc antérieurement à la publication de l'article.

S'il l'a lu, alors il semble faire peu de cas de ces travaux antérieurs. On peut tout de même se demander jusqu'à quel point la solution de Synge l'a inspiré. Dans ce cas, le fait de ne pas citer plus avant les contributions de Synge est alors assez peu conforme à la déontologie.

## L'apport de Kruskal

Par rapport à Synge et indépendamment du fait qu'il s'en soit inspiré ou non, Kruskal présente une vision très claire et explicite de l'extension aux quatre régions.<sup>55</sup>

Il prouve qu'elle est maximum, il décrit la connexion par un pont d'Einstein Rosen ou un trou ver entre les deux espaces symétriques asymptotiquement plats, en indiquant que ce pont ou trou de ver, par son caractère dynamique, ne permet pas aux signaux lumineux (et encore moins aux particules matérielles) de le traverser.

### 4-5 1960 Szekeres, indépendamment, fait la même découverte

Szekeres<sup>56</sup> utilise une partie des résultats établis 10 ans plus tôt par Synge à savoir les transformations :

$$u = h(r).cosh(t/2r_s)$$

$$v = h(r).sinh(t/2r_s)$$

Simplement il va choisir une fonction  $h(r)$  différente de  $g(r)$  utilisée de Synge, pour aboutir à la même forme que celle de Kruskal

### 4-6 1963- Forme de Novikov<sup>57</sup>

Elaborée pour représenter clairement le mouvement radial géodésique de particules dans ce champ central, cette forme possède les propriétés suivantes.<sup>58</sup>

- Le référentiel associé à cette forme est synchrone. Il est possible de synchroniser les horloges dans ce référentiel.
- Il est comobile. Les particules en chute libre sont « au repos » dans ce référentiel.
- La forme de la métrique dans le vide comporte une région spatiotemporelle qui se contracte, une autre qui se dilate.

Novikov associe à chaque particule une valeur de coordonnée radiale  $R^*$  quand elle émerge de la singularité (à  $r = 0$ ) et indique que la particule va conserver cette valeur tout au long de sa « vie cycloïdale » de  $r = 0$  à  $r_{max}$  via  $r = r_s$  pour la phase de dilatation puis de  $r_{max}$  à  $r = 0$ , via  $r = r_s$  pour la phase de contraction. A cet effet Novikov attribue pour chaque particule une valeur  $R^*$  qui dépend du  $r_{max}$  de sa trajectoire.

$$R^* = (r_{max}/r_s - 1)^{1/2}.$$

Comme coordonnée de temps, Novikov utilise le temps propre  $\tau$  de la particule de test avec  $\tau = 0$  au sommet de l'orbite pour  $r = r_{max}$  en ajustant les coordonnées entre référentiels de sorte que dans la forme de Schwarzschild on ait aussi  $t = 0$  quand la particule est en ce point.

<sup>54</sup> Présentation faite à « Royaumont Conference on Relativistic Theories of Gravitation, June 1959.

<sup>55</sup> Szekeres fait la même découverte indépendamment. Kruskal n'en a pas eu connaissance pour son article.

<sup>56</sup> Szekeres G. (1960). On the singularities of a Riemannian manifold. Publ. Mat. Debrecen 7, 285-301.

<sup>57</sup> Novikov, I.D. (1963) doctoral dissertation, Shternberg Astronomical Institute, Moscow (§31,4)

<sup>58</sup> Gravitation, C.W Misner, K. Thorne, J.A Wheeler Freeman p. 826-827

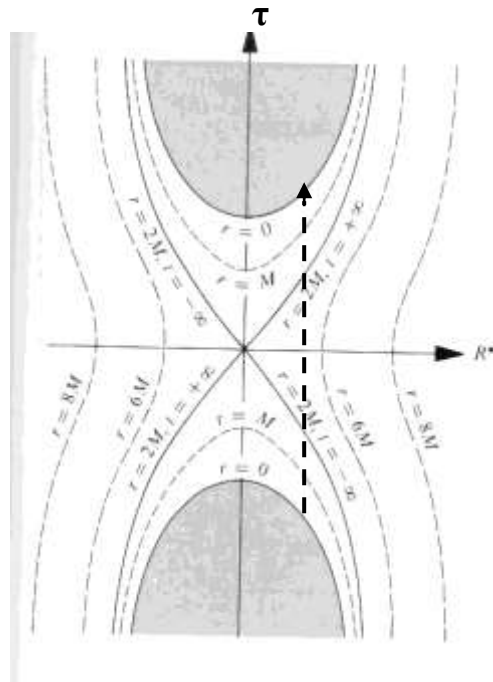
Cette solution est simple conceptuellement et correspond bien au phénomène physique considéré, cependant elle est reliée à la forme de Schwarzschild par des transformations de coordonnées pas évidentes. La forme de Novikov s'écrit :

$$ds^2 = -d\tau^2 + [(R^{*2}+1)/R^{*2}][\partial r/\partial R^*]dR^{*2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Ici  $r$  n'est plus la coordonnée radiale mais une fonction de la métrique  $r(\tau, R^*)$  donnée implicitement par:

$$\tau/r_s = \pm (R^{*2}+1)[(r/r_s) - (r/r_s)^2/(R^{*2}+1)]^{1/2} + (R^{*2}+1)^{3/2} \cos^{-1}[\{(r/r_s)^2/(R^{*2}+1)\}^{1/2}]$$

La figure ci-dessous montre quelques régions caractéristiques de l'espace temps de Schwarzschild, pour des sphères à  $r = \text{constante}$ , représentées dans ces coordonnées.



On constate un petit air de famille avec la représentation en coordonnées de Kruskal.

Les lignes d'univers des particules sont des segments de droite verticaux, comme celui représenté en trait interrompu épais. La particule émerge de  $r = 0$  en bas, elle perce l'horizon (courbe à  $r = 2M$ ) puis s'éloigne dans l'espace extérieur, atteint son maximum  $R^*$  à  $\tau = 0$  et replonge vers l'horizon qu'elle traverse pour aboutir à  $r = 0$  en haut.

#### 4-7 1965 Rindler propose une identification de l'espace et de l'anti espace

Ces deux espaces reliés par un pont représentent une structure assez particulière. Rindler <sup>59</sup>étudie dans cet article la possibilité d'identifier les événements désignés par les points de coordonnées  $(u, v, \theta, \varphi)$  et  $(-u, -v, \theta, \varphi)$  du diagramme de Kruskal de façon à ce qu'ils soient associés aux événements dans les coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  du système de coordonnées de Schwarzschild.

Cette identification se révèle hasardeuse puisqu'elle conduit à une violation de causalité, comme le diagramme ci-dessous le montre.

<sup>59</sup> Rindler W. (1965) Elliptic Kruskal-Schwarzschild space. Phys. Rev. Letters Vol. 15, numb.26. P 1001-1002



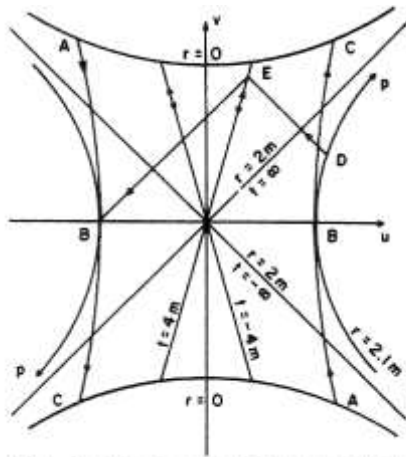


FIG. 1. Kruskal diagram with elliptic identification.

Le diagramme ci-dessus montre qu'un observateur  $p$  à un rayon donné fixe  $r$  (tel que  $u^2-v^2 < I$ ) voit un évènement Intérieur en  $B$ , mais plus tard en  $D$  il peut envoyer le signal en  $E$ , donc affecter  $E$  (en fait il peut même le générer, il y a une boucle temporelle).

Ceci montre bien qu'on n'a pas le droit de procéder à une telle identification. L'espace et l'anti espace sont bien déconnectés causalement.

## 5- Faisons le point sur ces solutions

A l'aube des années 60, on était en droit de se demander pourquoi la première forme donnée par Schwarzschild rapidement étendue par Droste, si elle propose une solution extérieure très générale (théorème de Birkoff)<sup>60</sup> en particulier valable pour les objets célestes classiques comme les étoiles et planètes entre autres, ne révèle pas l'extension maximale de la solution dans le cas d'un trou noir. C'est probablement lié à l'approche formelle adoptée. Une solution à topologie et symétrie spatiale globalement sphérique a été recherchée ce qui n'a permis de que de trouver une partie de la solution. La topologie spatiale globale de l'extension maximale est celle de deux espaces à symétrie sphérique connectés par un pont.

### Les singularités sont bien embarrassantes

Dans le contexte de l'époque, la découverte de cette solution, même partielle, exhibant des singularités mettait dans l'embarras les relativistes les plus éminents (et il n'y en avait pas tant que cela à l'époque). La théorie à peine élaborée, on découvrait qu'elle prédisait des horreurs. Les scientifiques, Einstein en tête se trouvaient face à une situation inconnue et ils craignaient sans doute que cela ne mette en cause la viabilité de la théorie encore naissante.

Face à cela ils ont décrété un embargo intellectuel vis-à-vis des trous noirs, s'appuyant sur le fait qu'il s'agissait de situations extrêmes qui ne pouvaient pas se produire dans la nature, d'ailleurs tous les objets physiques qu'on connaissait qui pourraient relever de cette solution (étoiles, planètes en particulier) étaient très loin de cette situation.

Il y avait donc plus urgent à faire que de chercher à approfondir l'analyse et tenter de résoudre cette énigme sulfureuse, d'autant que l'application de la relativité générale en cosmologie commençait à porter ses fruits.

<sup>60</sup> Le théorème de Birkhoff nous garantit que la métrique de Schwarzschild est la seule solution de la relativité générale, dans le vide, pour une distribution de matière à symétrie sphérique. Ceci ne devrait pas nous surprendre, si nous nous rappelons que la configuration équivalente en électromagnétisme, symétrie sphérique et région sans charges, est un champ de Coulomb.

Cet enthousiasme pour la diversion cosmologique allait tout de même prendre rapidement un petit coup de froid avec la solution de De Sitter (1918)<sup>61</sup> qui présentait également une singularité (l'horizon de masse) à une distance finie, De Sitter sauvant les meubles en déclarant que l'absence de singularité à distance finie postulée par Einstein devait se s'entendre comme un principe philosophique métaphysique et qu'il fallait lire : « Absence de singularité à une distance physiquement accessible ».<sup>62</sup>

Avec un tel handicap pour l'étude des trous noirs, pas étonnant alors que le parcours ait été laborieux, comme le texte qui précède l'a montré. Il n'est pas exagéré de dire que le voile ne s'est soulevé que peu à peu et que compte tenu des horreurs qu'on découvrait on hésitait souvent à le soulever davantage.

D'un point de vue physique, c'était encore plus douloureux car c'était la première fois qu'on se confrontait à un type de situation où on trouvait deux singularités.

Il a fallu déjà comprendre qu'elles n'étaient pas de même nature.

## L'horizon

Celle à  $r = r_s$  peut être effacée par un changement de coordonnées, et ne correspond pas une singularité géométrique de la variété représentant l'espace temps associé à cette solution (elle n'a pas le caractère physique d'une singularité, les grandeurs physiques ne deviennent pas infinies en ce point).

Le fait que l'horizon ne soit pas une singularité a mis du temps à s'imposer. En 1957, Regge et Wheeler<sup>63</sup> considèrent encore dans l'article référencé que l'horizon est une singularité.

Pour autant, même s'il n'est pas une singularité, l'horizon est une caractéristique intrinsèque de la solution.

On a déjà vu que la description des géodésiques « radiales » entrantes dans la solution de Schwarzschild nécessite deux référentiels, qu'il faut bien entendu raccorder « sans couture » avec gestion des recouvrements éventuels.

Même si les coordonnées n'ont en elles mêmes aucun caractère physique et ne servent qu'à cartographier la variété (étiqueter tous ses points), la nécessité de deux référentiels dans la solution de Schwarzschild est symptomatique de la présence de deux régions qui ici sont assez différentes.

En effet si l'horizon n'est pas une singularité vraie telle que nous l'avons définie, pour autant il joue un rôle physique important. A l'extérieur de l'horizon, l'espace temps est statique, sous l'horizon l'espace temps n'est plus statique du tout,<sup>64</sup> ce qui est caractéristique de propriétés

<sup>61</sup> La solution était déroutante d'une part parce que c'était une solution « dans le vide », en contradiction avec le principe de Mach cher à Einstein et d'autre part il y avait une singularité (qui s'est révélée être de coordonnées).

<sup>62</sup> De Sitter W. (1918). Further remarks on the solution of Einstein's theory of gravitation. Proc R. Aad, Amsterdam 20, 1309

<sup>63</sup>. T. Regge et J. A. Wheeler (1957). Stability of a Schwarzschild Singularity. Phys.Rev. Vol 108, N 4 p 1063-1069

<sup>64</sup> En effet, si la région extérieure à un trou noir est bien stationnaire au sens usuel (c'est-à-dire admet un groupe d'invariance de la métrique correspondant à des translations " dans le temps "), la région intérieure, quant à elle, admet (par prolongement) un groupe d'invariance de la métrique, mais ce groupe y correspond maintenant à des translations " dans l'espace " (ce qui veut dire que la région intérieure est homogène mais non stationnaire). Ce changement profond de caractère de la symétrie temporelle de l'espace-temps à la traversée de l'hypersurface  $r=2GM/c^2$  et le fait que cette dernière est une membrane unidirectionnelle que l'on ne peut traverser que dans un sens, a été d'abord clairement reconnu à la fin des années 1950, grâce notamment aux travaux de David Finkelstein, Christian Fronsdal et Martin Kruskal, sur le cas particulier de la métrique dont la forme extérieure a été trouvée par Karl Schwarzschild dès 1916 : Adapté de: T. Damour , relativité, Encycl. Universalis 1990

géométriques intrinsèques de la solution, indépendantes du référentiel utilisé et de la forme de la métrique associée.

On aurait en effet pu objecter, avec raison, que dans d'autres coordonnées (Kruskal par exemple) un seul référentiel est utilisé pour décrire la solution complète, et que l'argument des deux référentiels dans la forme de Schwarzschild qui a révélé cet horizon est mis en défaut, car lié à un système de coordonnées particulier. C'est un point un peu subtil de la théorie qui effectivement définit l'horizon dans un référentiel associé à un observateur à l'infini<sup>65</sup>, horizon qui va toutefois avoir le caractère intrinsèque (indépendant du référentiel) de délimiter deux régions différentes et qui va couper le lien causal vers l'extérieur.

L'horizon (membrane unidirectionnelle) est une frontière causale (unidirectionnelle) entre les deux régions et est associé intimement à la singularité centrale inaccessible de l'extérieur. Il participe à la conjecture de censure cosmique. Il joue le rôle d'une membrane étanche dans une direction qui isole l'espace temps « extérieur » des effets dévastateurs pour la physique de la singularité.

Aujourd'hui, beaucoup s'accordent à penser que la caractéristique essentielle « opérationnelle » des trous noirs n'est pas la singularité centrale, mais son (ou ses) horizon(s)<sup>66</sup>, ceux-ci en étant la frontière étanche avec le monde extérieur et matérialisant la limite de la connaissance qu'on peut avoir de ces objets depuis l'extérieur.

Comme il est en relation avec la singularité centrale (conjecture de censure cosmique) on pourrait penser que l'étude de la vraie singularité et celle de l'horizon associé vont de pair. C'est le cas, la notion de surface piégée étant intimement liée à celle de singularité mais il y a des spécificités importantes à l'étude de chacun de ces cas.

## La singularité centrale

L'autre singularité, en  $r = 0$ , qui correspond à une divergence de la courbure pose un problème de principe, qui a encore mis mal à l'aise les relativistes puisqu'elle semble entacher la Relativité Générale d'un péché originel qui fait qu'elle contiendrait sa propre perte.

Dans le cas du trou noir,  $r = 0$  correspond à la fin du temps. On verra que précisément ce qui caractérise ce type de singularité c'est l'existence de géodésiques incomplètes (qui ne s'étendent pas indéfiniment dans chaque direction).

Cela va nous révéler des propriétés bien étranges.

Au début des années 1960, la structure des trous noirs de Schwarzschild étant mieux comprise, en particulier ses « singularités » ayant été mises en évidence, il était naturel de s'interroger sur leur nature physique et sur la raison de leur présence.

C'est ce qui a été entrepris dans le courant de la décennie qui a suivi.

## Rappel historique : Astres obscurs et trous noirs

Avant de passer à la suite, ouvrons une parenthèse historique. Michell<sup>67</sup> en 1784 puis Laplace<sup>68</sup> en 1791 (reprenant les travaux de Michell) avaient fait remarquer qu'en théorie Newtonienne, pour des corps très denses, la gravitation pouvait être si intense à la surface que

<sup>65</sup> A noter que la masse du trou noir est aussi définie de cette manière par l'intégrale de Komar par exemple, ce qui est cohérent puisque c'est ce seul paramètre qui définit intégralement le trou noir, en particulier la surface de l'horizon qui va être associée à son entropie

<sup>66</sup> Space time and geometry, Sean. M. Carroll, Addison Wesley, p 238-248

<sup>67</sup> Eisenstaedt J. (2003). Einstein et la relativité générale, les chemins de l'espace temps. P 254. CNRS éditions

<sup>68</sup> Ibid

la vitesse de libération pouvait être égale ou supérieure à la vitesse de la lumière. Ces corps avaient été qualifiés d'astres obscurs.

Un calcul simple de la vitesse de libération montre qu'elle vaut  $c$  si  $r = 2GM/c^2$ . C'est la même valeur que celle correspondant à l'horizon du trou noir en relativité générale.

Malgré le parallèle évident, c'est bien la gravitation qui est à l'origine du phénomène, il ne faudrait pas pour autant en déduire que la mécanique Newtonienne décrit correctement les trous noirs de la relativité générale.

En effet cette analogie a ses limites et elle est quelquefois mal interprétée.

Commençons par remarquer qu'à la différence de la relativité générale où la lumière joue un rôle structurel, la lumière ne joue aucun rôle privilégié dans la théorie de la gravitation de Newton.

Rappelons que la vitesse de libération  $c$  est la vitesse initiale minimum que doit avoir un corpuscule (photon) tiré radialement vers l'extérieur depuis la surface, sur une trajectoire inertielle, pour échapper (aller jusqu'à l'infini) à l'attraction de l'astre obscur de masse  $M$  et de rayon  $r = 2GM/c^2$ . Ceci correspond phénoménologiquement à un « horizon » situé à l'infini.

Pour un trou noir relativiste « équivalent » de masse ponctuelle  $M$ , si on tire un photon radialement vers l'extérieur depuis un point situé à la distance  $r = 2GM/c^2$ , il « fait du surplace », il ne s'échappe pas. Il est « satellisé » à la distance  $r$ .

L'horizon est bien situé à  $r = 2GM/c^2$  dans ce cas. La différence est de taille.

Explicitons un peu cela. Lorsqu'on considère la forme moderne de Schwarzschild (celle de Droste), en champ faible, et qu'on la rapproche de la métrique générique de la relativité générale en limite post Newtonienne de la solution aux équations d'Einstein (équation linéarisée), on trouve que cette forme s'y ramène en posant  $r = R + GM/c^2$ .

Voir par exemple le cours de relativité générale (2000) de L. Blanchet (IAP) p 81.

Ceci montre que dans le parallèle avec la théorie Newtonienne de trou noir classique, contrairement à ce qui est généralement admis, ce n'est pas un rayon  $r = 2GM/c^2$ , qui correspond à la vitesse de libération en mécanique Newtonienne, qui est équivalent au rayon de Schwarzschild de la RG, mais  $r = GM/c^2$  ( qui correspond à la satellisation au niveau de la surface), ce qui est d'ailleurs plus conforme du point de vue phénoménologique (la lumière ne s'échappe pas de la surface du corps générant le champ,  $r = GM/c^2$  est bien un horizon).

Un autre argument indépendant conforte la différence de phénoménologie. En effet, rien ne nous empêche de considérer des trajectoires non inertielles (trajectoires de type temps, avec accélération finie par exemple).

A la surface d'un corps de masse  $M$  et de rayon  $r < 2GM/c^2$  (condition encore plus sévère que pour l'astre obscur), une fusée peut très bien s'arracher à l'attraction de l'astre, et accélérer de façon à rester à vitesse constante, même très inférieure à  $c$ , ce qui fait qu'à une certaine distance de l'astre cette vitesse sera supérieure à la vitesse de libération locale permettant d'atteindre l'infini en mécanique Newtonienne.

Ceci est impossible pour un trou noir de la Relativité Générale, car à une distance inférieure à l'horizon toute trajectoire « réelle » de type temps ou lumière ne peut pas s'échapper.

Tous ces arguments montrent que la phénoménologie du trou noir de la relativité générale est fondamentalement différente de celle du corps obscur de la mécanique Newtonienne.

Mais il était utile de rappeler que l'histoire nous apprend que, par contre, l'idée d'un tel phénomène sous l'action de la gravitation n'est pas totalement nouvelle.

## 6- 1965 – 1975 Nature physique et implication des singularités

### 6-1 Rappel de la situation

Les singularités de la forme décrivant la métrique sont apparues dès les premières solutions « exactes » de la Relativité générale (1916). Comme cela a été dit avant, on ne peut pas dire que cela ait réjoui les relativistes de l'époque qui y voyaient là comme une marque d'infamie portée sur cette toute nouvelle théorie.

Pour ce qui concerne la solution de Schwarzschild, Painlevé trouve en 1921 une solution qui élimine une des deux singularités de la métrique, ce qui laissait à penser que ces deux singularités étaient de nature différente, conclusion qu'il n'a pas tirée directement, convaincu qu'il était que c'était une solution différente du problème du corps central à symétrie sphérique, comme sa polémique avec Einstein en témoigne. Lemaître va un peu plus loin en établissant une autre forme, et reconnaissant que la singularité à  $r = r_s$  est bien une singularité fictive, mais tout cela restait assez formel. Ce sont les remarques de Robertson (1938) et la publication de Oppenheimer Snyder<sup>69</sup> (1939) qui vont conférer un caractère physique à cette singularité, le premier en montrant qu'un observateur peut traverser l'horizon et les seconds en montrant (sous des hypothèses simplificatrices, mais qui se sont révélées justifiées) qu'une boule de poussière pouvait s'effondrer « indéfiniment » sous l'action du champ crée par sa propre matière. Les choses devenaient sérieuses.

La deuxième guerre mondiale et la course au nucléaire qui suivit allaient mobiliser le fleuron de la recherche pendant quelque temps et geler cet élan.

### 6-2 Etude des congruences

Le sujet est relancé en 1955, quand on commence à développer d'autres méthodes d'approche des solutions en relativité générale. Jusqu'à présent, on s'intéressait à la description de la Variété représentant l'espace temps par ses points (définis par leurs coordonnées). Il est apparu plus judicieux et structurel de considérer la variété générée par des courbes, en particulier par les géodésiques qui y sont définies.

Est apparu ainsi la notion de congruence. On définit des familles de géodésiques qui « remplissent et génèrent » tout l'espace-temps, ce qui fait que les points précédemment définis par les coordonnées vont se trouver maintenant définies comme appartenant à une géodésique. L'intérêt de cette description c'est que si on regarde ce qui se passe localement en considérant un faisceau de géodésiques voisines d'une géodésique particulière que l'on prend comme référence, cela donne une allure de la structure de l'espace temps local. On prend par exemple une section spatiale (orthogonale) circulaire en un point et on regarde comment évolue cette section quand on progresse dans une direction le long de la géodésique de référence. La section circulaire peut varier en taille, en restant circulaire, elle peut varier en forme (devenir une ellipse par exemple) et elle peut « tourner ».

Pour quantifier cela, on se sert d'un résultat géométrique bien connu qui est l'équation de déviation géodésique, dont on prend la trace. On obtient alors l'équation de Raychaudhuri<sup>70</sup> :

<sup>69</sup> Oppenheimer J.R, Snyder H.(1939). On continued gravitationnal contraction. Phys. Rev. Vol 56, p 455-459

<sup>70</sup> Raychaudhuri, A. K. (1955). "Relativistic cosmology I.". Phys. Rev. D 98: 1123

$$d\theta/d\tau = -\theta^2/3 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \quad (6-2-1)$$

Où

$\theta$  est un scalaire qui représente l'expansion de la congruence,

$\sigma_{\mu\nu}$  est un tenseur qui représente l'anisotropie de la congruence,

$\omega_{\mu\nu}$  est un tenseur qui représente la rotation de la congruence

Appliquons cette équation au cas de la relativité générale (en utilisant l'équation d'Einstein pour évaluer  $R_{\mu\nu}$  en fonction de  $T_{\mu\nu}$ ). On s'aperçoit que pour un univers avec de la matière énergie, satisfaisant certaines conditions « raisonnables<sup>71</sup> », (énergie locale non négative pour le premier théorème de Penrose), ces géodésiques convergent inéluctablement et finissent par se couper. Le point où elles se coupent, qui caractérise la présence d'une singularité<sup>72</sup>, est appelé caustique.

Ceci se révélera un outil essentiel pour démontrer les théorèmes des singularités qui vont suivre.

Lapidairement on peut dire que si dans un univers, il y a de la matière énergie, alors il y a nécessairement au moins une singularité.

Petrov (1954) et Pirani (1957)<sup>73</sup> entreprennent indépendamment de leur côté une classification des espaces temps<sup>74</sup>, en fonction de leur degré de symétrie en considérant le nombre de valeurs propres distinctes<sup>75</sup> qu'on peut attribuer au tenseur de Weyl (considéré comme un opérateur). Cette classification fait correspondre des congruences de géodésiques nulles à chaque classe d'espace temps<sup>76</sup>.

### 6-3 Le débat sur la singularité centrale

C'est vers 1960, comme nous l'avons mentionné, qu'on commence à bien comprendre la structure des trous noirs. Cela va permettre d'aller un peu plus loin dans la compréhension de la nature des singularités. Les quelques outils que nous avons cités vont se révéler essentiels, mais d'autres méthodes<sup>77</sup> complémentaires qui vont permettre d'aller plus loin commencent à voir le jour.

A cette époque deux points de vue se confrontent, celui des physiciens de l'ouest et celui de l'école russe au sujet du résultat au centre de l'effondrement en trou noir.<sup>78</sup>

En effet le mécanisme de destruction de la matière, par les forces de marées (étirement dans le sens radial, compression transversale) qui deviennent infinies à  $r = 0$ , au cours de cet effondrement et son résultat n'est pas clair. En l'absence d'une théorie quantique de la relativité on ne voit pas de limite finie correspondant à un état de la matière particulier qui pourrait l'enrayer.

<sup>71</sup> Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry » p 174-177. Addison Wesley

<sup>72</sup> Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry ». Addison Wesley Appendix F p 459-465 .

<sup>73</sup> Pirani F.A.E (1957) ; Invariant formulation of gravitational radiation theory. Phys. Rev. 105: 1085

<sup>74</sup> Petrov A. Z.(1954). Classification of space defining gravitational fields. Sci. Not. Kazan State Univ.114. 55

<sup>75</sup> On obtient six classes (I,II,D,III,N,O) qui caractérisent différents types d'espace temps. Le tenseur de Weyl associé au type I (4 valeurs propres distinctes) est qualifié d'algbriquement général, les autres d'algbriquement spécial. Landau., Lifchitz .E (1994),Ed. « Class.Petrov“ in Théorie des champs Mir-Ellipses p 343-346

<sup>76</sup> Pour la solution de Kerr, par exemple, le tenseur de Weyl est de type D (2 racines doubles). Il y correspond deux congruences de géodésiques nulles (une entrante une sortante) qui génèrent cet espace temps.

<sup>77</sup> Gravitation, Misner C.W, Thorne K., Wheeler J.A.(1973) Freeman New York, Chap. 34 “ Global techniques, horizons, and singularity theorems” p 916- 940

<sup>78</sup> Thorne K. S (1997) Trous noirs et distorsions du temps, Champ Flammarion (chap 13 « à l'intérieur des trous noirs » p 481-517.

L'école russe I.M Kalatnikov et E.M Lifchitz pensaient que cela était un artéfact de la symétrie parfaite de la solution et qu'une petite asymétrie en se développant pendant l'effondrement devait générer des instabilités et empêcher l'implosion, voire provoquer une explosion. Se posait en fait le problème de la stabilité des singularités en relativité générale. En 1964 la situation était assez confuse.

#### **6-4 Introduction des méthodes globales**

En 1965 Penrose<sup>79</sup> (1965b), en introduisant les méthodes globales<sup>80</sup> utilisant la topologie<sup>81</sup>, démontre que au contraire, ce n'est pas un artéfact de la symétrie. En effet, si certaines conditions sont satisfaites, en particulier l'existence de surfaces piégées et la condition d'énergie faible (énergie locale non négative), cela implique que, indépendamment de la symétrie, le développement de singularités est inéluctable.

A Londres, en été 1965, dans une salle de conférence comble, Kalatnikov expose que selon leurs travaux (avec Lifchitz) les trous noirs n'abritent pas de singularités, du fait de l'instabilité liée à la croissance des déformations par rapport à la symétrie, ce qu'ils pensaient avoir démontré par les méthodes classiques locales que tous les physiciens présents connaissaient bien. A la fin de l'exposé, C. Misner exprime son désaccord en s'appuyant sur le théorème que Penrose venait de démontrer en 1965. La délégation soviétique, prise par surprise, était désorientée du fait que d'une part elle avait eu du mal à suivre l'exposé en anglais assez vif de Misner et d'autre part que le théorème de Penrose reposait sur des arguments topologiques mal connus des experts de la relativité à la différence de leur démonstration qui était fondée sur des méthodes qui avaient fait leurs preuves. Penrose devait donc se tromper. En 1969 Lifchitz devait reconnaître leur erreur. En 1961, ils n'avaient pas trouvé une solution présentant des perturbations parfaitement aléatoires, mais depuis ils avaient fini par en trouver une avec un étudiant en thèse V.Belinsky. Cette nouvelle singularité B.K.L (Belinsky, Kalatnikov, Lifchitz)<sup>82</sup> devait correspondre selon eux à l'état de la singularité centrale résultant de l'effondrement d'une étoile ou du Big crunch éventuel de l'univers.

Penrose (1968a)<sup>83</sup> et Hawking vont poursuivre leurs travaux en utilisant cette nouvelle méthode et aboutir à la démonstration de nouveaux théorèmes (Hawking 1966a<sup>84</sup>, 1966b<sup>85</sup> 1971b<sup>86</sup>, 1972a<sup>87</sup>, 1973<sup>88</sup>, Hawking et Penrose 1969<sup>89</sup>, Hawking et Ellis 1973<sup>90</sup>)

<sup>79</sup> Penrose R. (1965). Gravitational collapse and space time singularities. Phys. Rev. Letters Vol 14, N.3 p 57-59

<sup>80</sup> Par opposition aux méthodes qui s'appuient sur les équations différentielles du champ (qui sont locales).

<sup>81</sup> K. Thorne fait remarquer que ce n'est pas étonnant que les découvertes dans ce domaine aient été trustées par les physiciens théoriciens britanniques, car ils reçoivent une solide formation mathématique à la différence des américains plus pratiques. Quant aux théoriciens physiciens français, encore meilleurs en mathématiques, l'excès de rigorisme les rend improductifs (selon K. Thorne).

<sup>82</sup> Belinskii V.A, Kalatnikov I, Lifchitz E. (1970). Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. Adv. Phys. 19, 523-573.

<sup>83</sup> Penrose R. (1968a). Structure of spacetime in "DeWitt and Wheeler". §34.1-34.4, 41.7-41.11, Boxes 34.1, 34.2, 44.3

<sup>84</sup> Hawking S.W. (1966a). Singularities and the geometry of spacetime. Adam prize essay. Cambridge univers. UK

<sup>85</sup> Hawking S.W. (1966b). The occurrence of singularities. Proc. R. Society. London A 294. 511-521

<sup>86</sup> Hawking S.W. (1971) Gravitational radiation from colliding black holes. Phys. Rev. Letters 26, 1344-1346

<sup>87</sup> Hawking S.W. (1972a). Black holes in general relativity. Commun. Math. Phys. 25, 152-166.

<sup>88</sup> Hawking S.W. (1973). The event horizon. In DeWitt and DeWitt, §34.1-34.5

<sup>89</sup> Hawking S.W. and Penrose R. (1969). The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proc. Roy. Soc. London A 314, 529-548

Hawking S.W. and Penrose R. (1997). La nature de l'espace et du temps. Nrf essais. Galimard (trad. F. Balibar)

<sup>90</sup> Hawking S.W and Ellis G.F.R. (1973). The large scale structure of space time. Cambridge university press, Cambridge.

Avant de poursuivre l'étude de ces nouveaux théorèmes attardons nous un peu sur la caractérisation et la nature des singularités<sup>91</sup>

### **6-5 Critères de caractérisation d'une singularité**

Nous avons vu que la première manifestation est apparue par des divergences dans la forme de la métrique. Le déterminant qui devait être non nul et non infini a fourni un premier critère qui s'est révélé rapidement inadéquat.

La divergence de scalaires de courbure a fourni un critère plus solide.

Cependant l'approche de l'étude des singularités par des méthodes topologiques conduit naturellement à rechercher un critère de ce type. Une définition plutôt bien admise aujourd'hui est de considérer qu'une singularité se caractérise par l'existence dans la variété représentant l'espace temps de géodésiques incomplètes (dont le paramètre affine ne s'étendent pas indéfiniment dans au moins une des deux directions, à partir d'un point de la géodésique).

Pourtant cette définition largement utilisée souffre de quelques contre exemples. Il a été montré par exemple que l'incomplétude des géodésiques temporelles, spatiales ou nulles étaient indépendantes et qu'il existait des espaces temps où les géodésiques nulles étaient incomplètes mais pas les géodésiques temporelles et spatiales.

De plus, dans un espace temps où les géodésiques de tous types sont toutes complètes, il peut exister des lignes d'univers de type temps sur lesquelles l'accélération reste toujours finie qui sont incomplètes, autrement si des particules en chute libre ne rencontrent jamais de singularités, une fusée en accélération peut en rencontrer une, dans un coin de l'espace temps inaccessible aux géodésiques<sup>92</sup>.

Une partie du travail relatif à ces théorèmes de singularités est donc de commencer à définir précisément ce qu'est une singularité<sup>93</sup>.

La tâche n'est pas simple comme Geroch<sup>94</sup> l'a montré en examinant systématiquement les possibilités de pathologies diverses des variétés associées aux espaces temps de la relativité générale.

Cela a donné lieu à de nombreuses recherches, un large consensus ayant été atteint sur la proposition de Schmidt<sup>95</sup>.

La définition très technique de Schmidt a la signification suivante.

Considérons dans une variété représentant un espace temps toutes les géodésiques de type espace (trajectoires des tachyons), les géodésiques nulles (trajectoires de photons), les géodésiques temporelles (trajectoire des observateurs en chute libre) et les lignes d'univers de type temps dont l'accélération reste bornée (trajectoires que des observateurs peuvent en principe décrire).

<sup>91</sup> F. J. Tipler, C. J. S. Clarke, and G. F. R. Ellis, "Singularities and horizons-A review article," In General relativity and gravitation: One hundred years after the birth of Albert Einstein, ed. A. Held (Plenum Press, New York, 1980). S'y référer pour plus de détails sur ce qui est exposé ici.

<sup>92</sup> Ceci est à rapprocher des boucles temporelles (qui sont une alternative aux singularités) dans la solution de Kerr. Ce sont des lignes d'univers de type temps non géodésiques.

<sup>93</sup> Plusieurs définitions ont été proposées la plus utile et utilisable étant la frontière causale développée par Penrose et Carter<sup>93</sup> Hawking S.W and Ellis G.F.R.(1973). The large scale structure of space time. Cambridge university press, Cambridge.

<sup>94</sup> Geroch, R.P.(1967). Singularities in spacetime of general relativity: Their definition, Existence and local characterization. Doctoral dissertation, Princeton university § 32.7-44.1, Epigraph to Chap 41

Geroch, R.P.(1968). What is a singularity in general relativity ?. Ann. Phys. (U.S.A)48, 526-540.

<sup>95</sup> Schmidt,B.G.(1971). A new definition of singular points in general relativity. Gen.Rel. Grav.1,269-280



Supposons qu'une de ces trajectoires ne s'étend pas indéfiniment dans une direction et qu'il soit impossible de surcroît d'étendre la variété au delà du point terminal par exemple parce que la courbure est infinie.

Alors ce point, avec les tous les autres points terminaux adjacents est appelé une singularité.

Il est apparu à l'usage que cette définition, malgré de nombreuses propriétés très satisfaisantes était d'une part difficile à mettre en œuvre et qu'elle souffrait aussi de quelques exceptions. Aucune de ces « constructions » pourtant très élaborées n'avait de portée vraiment universelle, elles avaient eu pourtant eu le mérite de clarifier le problème posé.

Finalement le critère qui s'est révélée être le plus utile jusqu'au aujourd'hui est celui de la frontière causale développée par Penrose et Carter.<sup>96</sup>

Malgré ces difficultés l'élan était donné, et il se concrétisa par cinq publications majeures dans la période 1968-1974, à savoir les minutes de la conférence de Battelle en 1967<sup>97</sup> (Wheeler et DeWitt ) particulièrement l'article de Penrose (1965) déjà cité, l'article de Geroch (1971a) déjà mentionné, une monographie de Penrose (1972a)<sup>98</sup>, le livre de Hawking et Ellis (1973) et les minutes de l'école d'été des Houches (DeWitt et DeWitt 1973)<sup>99</sup> particulièrement les articles de Hawking et Carter.

Cette piste allait se révéler très féconde si on en juge au nombre de théorèmes qui allaient suivre que nous évoquerons succinctement plus loin.

Un autre débat important que nous avons évoqué à propos de la confrontation Ouest-Est est celui de la nature physique de la singularité. La théorie prévoit une courbure infinie.

Pour la géométrie de la variété qui représente l'espace temps cela a un sens mais quel sens physique peut on lui attribuer ?

Qu'advient-il de la matière qui s'est effondrée en trou noir (dans le cadre de la théorie « classique » de la relativité). On peut noter que les forces de marées devenant infinies sur la singularité, aucune forme structurée de matière ne peut subsister.

Toutefois, on perçoit la difficulté intellectuelle de concevoir que tout cela puisse physiquement se réduire à un point, c'est-à-dire disparaître.

## **6-6 Types de solutions pour la singularité**

### **Singularité où la force de marée devient infinie**

Cela correspond à une courbure infinie en un point. Les forces de marées tendant vers l'infini à l'approche de la singularité disloquent toute structure de la matière et la compriment jusqu'à une densité infinie

C'est historiquement la première hypothèse à caractère physique résultant, par exemple de l'effondrement homogène à symétrie sphérique prévu par Oppenheimer Snyder.

Un résultat similaire est obtenu par un effondrement très particulier inhomogène mais à symétrie sphérique décrit par Podurets (1966)<sup>100</sup>

<sup>96</sup> Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry » p 79-82. Addison Wesley

<sup>97</sup> DeWitt C.M.and Wheeler J.A.(1968). Battelle rencontres, 1967. Lectures in Mathematics and Physics. W.A. Benjamin,New York.

<sup>98</sup> Penrose R . (1972a). Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. And Applied Math. Regional Conference Series inApplied Math. N 7,SIAM, Philadelphia, Pen.

<sup>99</sup> DeWitt c. and DeWitt B.(1973). Black holes : Les astres occlus, Les Houches Summer School, 1972, Gordon and Breach, New York.

<sup>100</sup> Podurets M.A.(1966) The character of the singularity in the gravitationnal collapse of a star. Dokl. Akad. Nauk SSSR 167, 275-276. English translation in Sov. Phys. Doklady 11, 275-276

L'hypothèse la plus générale dans ce cadre est celle dite d'écrasement « Mixmaster<sup>101</sup> » (modèle de Kasner généralisé) découverte dans le cas d'espace homogène par Misner (1969b)<sup>102</sup> et par Belinski et Kalatnikov (1969a)<sup>103</sup> et analysé dans le cas inhomogène par Belinski et Kalatnikov (1969b<sup>104</sup>, 1970<sup>105</sup>) et par Kalatnikov et Lifchitz (1970)<sup>106</sup>.

A titre d'exemple on développera un peu plus les singularités BKL (Belinski, Kalatnikov, Lifchitz), qui font partie de cette catégorie, au paragraphe suivant.

Les singularités « Mixmaster » sont les seules parmi toutes les singularités explicitement connues qui apparaissent comme étant la solution générique du fait que si on perturbe légèrement et arbitrairement les conditions initiales d'un espace temps qui évolue vers une singularité « Mixmaster », l'espace temps perturbé va aussi évoluer vers une singularité « Mixmaster ».

Cette hypothèse est donc considérée comme un candidat sérieux à la description de la singularité centrale.

### Singularité sans force de marées infinies

Il existe des configurations très particulières, où une géodésique de type temps ou nulle peut être incomplète, non pas parce qu'on atteint un point où les forces de marées sont infinies mais pour d'autres raisons plutôt subtiles.

Ceci a été étudié par Geroch (1968)<sup>107</sup> dans le cadre de son étude sur les pathologies des espaces temps déjà mentionné. L'espace temps de Taub-NUT<sup>108</sup> est un exemple qui appartient à cette catégorie.

### Singularité associée à une implosion avortée avec rebond

Si l'influence de la singularité est suffisamment limitée, l'essentiel de la matière qui s'effondre peut alors l'éviter. Comme cette matière ne peut pas franchir l'horizon, elle peut atteindre un état de compression maximum élevé, mais fini, et exploser vers une autre région de l'espace temps dans le cas de topologie multiconnexes (trous de ver). Les solutions analytiques de l'effondrement d'une sphère de matière chargée appartiennent à cette catégorie (Novikov 1966<sup>109</sup>, de la Cruz et Israel 1967<sup>110</sup>, Bardeen 1968<sup>111</sup>).

<sup>101</sup> Misner C.W, Thorne K., Wheeler J.A.(1973). The Mixmaster cosmology in Gravitation. Freeman New York 806-814

<sup>102</sup> Misner C.W. (1969b). Mixmaster universes. Phys. Rev. Letters 22, 1071-1074

<sup>103</sup> Belinski V.A., Kalatnikov I.M.(1969a). On the nature of the singularities in the general solution of the gravitation equations. Zh.Eksp.&Teor.Fiz 56,1700-1712. English Trans. In Sov. Phys. JETP 29,911-917.

<sup>104</sup> Belinski V.A., Kalatnikov I.M.(1969b). General solution of the gravitation equations with a physical singularity. Zh.Eksp.&Teor.Fiz 57,2163-2175. English Trans. In Sov. Phys. JETP 30, 1174-1180.

<sup>105</sup> Belinski V.A., Kalatnikov I.M.(1970). The general solution of the gravitation equations with a physical oscillatory singularity. Zh.Eksp.&Teor.Fiz 59, 314-321. English Trans. In Sov. Phys. JETP 32,169-172

<sup>106</sup> Lifchitz E.M, Kalatnikov I.M.(1970). Oscillatory approach to singular point in the open cosmological model. Zh. Eksp. & Teor. Fiz. Pis'ma 11,200-203. English trans. In Sov. Phys.JETP lett. 11, 123-125

<sup>107</sup> Geroch, R.P.(1968). What is a singularity in general relativity?. Ann. Phys. (U.S.A)48, 526-540.

<sup>108</sup> Misner C.W, Taub A.H.(1968). A singularity free empty universe. Zh. Eksp.& Teor. Fiz 55,233. English original in Sov.Phys. JETP 28,122 (1969)

<sup>109</sup> Novikov I.D. (1966a). Change of relativistic collapse into anticollapse and kinematics of a charged sphere. Zh. Eksp. & Teor. Fiz Pis'ma 3,223-227. English trans. In Sov. Phys. JETP Lett. 3, 142-144.

<sup>110</sup> De la Cruz V., Israel W. (1967). Gravitational bounce. Nuovo Cimento A 51, 744-760

<sup>111</sup> Bardeen J.M. (1968). General relativistic collapse of charged dust (abstract). Bull. Am. Phys. Soc. 13, 41.

Un tel phénomène impose que l'extrémité du trou de ver qui « explose » (connecté à l'autre univers) a été formée en même temps que l'univers avec une masse et un moment angulaire (mesurée par les orbites képlériennes à l'infini, et l'entraînement de référentiel) qui est exactement la même que celle qui entre dans l'extrémité connectée au trou noir.

Inutile de dire que cela semble physiquement non plausible et rend cette hypothèse surréaliste.

## Autres hypothèses

Il peut y avoir une combinaison des hypothèses ci-dessus. D'autre part le sujet étant hautement spéculatif, il ne serait pas étonnant que des hypothèses radicalement nouvelles voient le jour dans le futur.

Il est certain qu'une théorie de gravitation quantique apporterait sans doute des éclaircissements, sur la phase ultime de l'effondrement en particulier lorsque la taille du rayon de Schwarzschild s'approche de la longueur de Planck, là où la relativité générale n'est plus vraiment la théorie qui domine les phénomènes, les effets quantiques devant être prédominants.

## 6-7 Singularité BKL

Examinons plus en détail, une solution particulière de singularité mixmaster qui a été plutôt bien étudiée. L'idée d'un effondrement bien symétrique, sans soubresauts paraissant un peu trop idéale, l'école russe avait imaginé une issue un peu plus agitée.

Selon eux, les perturbations par rapport à la symétrie inhérente à la solution génèrent de fortes instabilités qui entraînent des oscillations importantes de l'effet de marée, particulièrement destructrices, en particulier lorsque le trou noir vient de se former.

D'abord développé pour la cosmologie pour proposer un modèle<sup>112</sup> à l'approche de la singularité finale (le Big Crunch comme on l'appellera plus tard) cette description s'appuie sur classification des espace homogènes. Un sujet intéressant est d'étudier les types d'espace temps qu'on obtient en fonction de ses symétries. Ainsi les espaces temps à symétrie maximum sont très peu nombreux<sup>113</sup>.

Si la symétrie s'applique seulement à la section spatiale ce qui est le cas dans les théories modernes en cosmologie, on obtient d'autres types d'espace temps. Si on impose que l'espace soit homogène et isotrope, ce qui correspond à des conditions de symétrie très fortes, la forme de la métrique est unique, c'est la forme de Robertson-Walker (qui dépend du temps, définit une dynamique de l'espace temps).

## Espaces homogènes

Si on n'impose plus l'isotropie, mais seulement l'homogénéité, alors on va trouver d'autres solutions.

Sans rentrer dans les détails du calcul assez technique, le principe et les grandes lignes de la méthode pour trouver ces solutions sont les suivants :

A partir de l'expression générale de la métrique spatiale associée au  $ds^2$  dans un espace Riemannien :

$$dl^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j,$$

Une transformation de coordonnées donne :

$$dl^2 = \gamma'_{ij}(x'^1, x'^2, x'^3) dx'^i dx'^j.$$

<sup>112</sup> Landau., Lifchitz .E (1994), §116-118. in "Théorie des champs " Ed Mir-Ellipses p 491-512

<sup>113</sup> Espace temps de Minkowski, de De Sitter et Anti Sitter

L'espace est dit homogène s'il admet le groupe de transformation permettant de faire coïncider un point donné avec n'importe quel autre point donné. Dans l'espace tridimensionnel les transformations sont déterminées par les valeurs des trois paramètres indépendants (degrés de liberté).

Dans l'espace Euclidien c'est le groupe des translations qui est caractéristique de l'homogénéité. Il laisse invariant les trois éléments différentiels  $dx, dy, dz$ . Dans un espace non Euclidien, le groupe de transformation associé à un espace homogène va également laisser invariant les trois formes différentielles  $dx^i$ , mais qui ne sont pas des différentielles totales dans ce cas<sup>114</sup>.

On va exprimer ces  $dx^i$  sous forme triadique<sup>115</sup>, ce qui va permettre de chercher les constantes de structure du groupe. La classification des espaces homogènes consiste à chercher tous les ensembles non équivalents de constantes de structure. Le résultat (classification de Bianchi - 1918) est donné ci dessous

Type	$a$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII <sub>0</sub>	0	1	1	0
VI <sub>0</sub>	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII <sub>a</sub>	$a$	0	1	1
III ( $a=1$ )	$a$	0	1	-1
VI <sub>a</sub> ( $a \neq 1$ )				

Figure 6-7-1 :  $a$  est un paramètre positif et  $n_1, n_2, n_3$  correspondent aux trois degrés de libertés.

Si on cherche une solution pour laquelle les composantes du tenseur métrique ne dépendent que de  $t^{116}$ , avec un référentiel approprié, on trouve une solution qui satisfait à la condition d'homogénéité pour la métrique spatiale, qui permet de définir la forme de la métrique anisotrope suivante définie par Kasner (1921) :

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1}.dx^2 - t^{2p_2}.dy^2 - t^{2p_3}.dz^2 \quad (6-7-1)$$

Où le calcul a montré que  $p_1, p_2, p_3$  sont des nombres quelconques, avec :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (6-7-2)$$

<sup>114</sup> Et pour cause le «  $dx^i$  » n'est pas une forme différentielle, mais est une base pour le gradient de la fonction de coordonnées sur la variété. cf Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry ». p 72 Addison Wesley.

<sup>115</sup> Landau., Lifchitz .E (1994), Tétrades in "Théorie des champs " Ed Mir-Ellipses p 379-382

<sup>116</sup> On s'intéresse à la dynamique de telles solutions (comme dans la solution FLRW).

<sup>117</sup> Univers vide spatialement homogène de type (Bianchi I) défini par Kasner : Kasner, E (1921a). Geometrical theorems on Einstein's cosmological equation. Am.J.Math. 43, 217-221

La métrique spatiale ainsi définie est homogène et plane mais anisotrope dans lequel les volumes croissent au cours du temps proportionnellement à  $t$  ; le déterminant de la métrique valant :  $(-g)^{1/2} = t$ , et dont les distances linéaires selon les axes  $y, z$  croissent et décroissent selon l'axe des  $x$ .

L'instant  $t = 0$  est singulier (sauf  $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$ ).

Les trois nombres  $p_1, p_2, p_3$  ne peuvent pas être égaux. L'égalité de deux parmi trois se produit pour les permutations de configurations  $(0, 0, 1)$  et  $(-1/3, 2/3, 2/3)$ .

Dans tous les autres cas les nombres  $p_1, p_2, p_3$  sont différents. L'équation (6-7-2) impose que l'un soit négatif et les autres positifs. Si on les range dans l'ordre  $p_1 < p_2 < p_3$  leurs valeurs seront comprises dans les intervalles :

$$-1/3 \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq 2/3, \quad 2/3 \leq p_3 \leq 1$$

### Régime oscillatoire à l'approche de la singularité

La singularité temporelle de caractère oscillatoire de la métrique peut s'obtenir dans le cas de l'espace homogène de type IX, référencé dans le tableau ci-dessus. Rappelons que ces solutions ont été étudiées au départ dans le cadre de la cosmologie pour tenter de décrire la singularité temporelle.

A partir de la métrique générique de Kasner (6-7-1), on va étudier une solution dérivée inhomogène, plus réaliste physiquement. La métrique n'est plus indépendante des coordonnées d'espace, les sections spatiales peuvent avoir une topologie de 3-sphère comme dans les univers de Friedmann, où les exposants  $p_1, p_2, p_3$  vont pouvoir devenir des fonctions du temps.

Ceci va se comporter comme une perturbation de la métrique homogène car à l'approche de la singularité les dérivées spatiales de la métrique sont négligeables devant les dérivées temporelles, cependant cela n'est pas sans conséquences dans ces conditions extrêmes.

Les équations associées ne donnant pas de solution analytique exacte, on va utiliser une méthode approchée pour étudier le comportement lorsqu'on se rapproche de la singularité.

On utilise le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} p_1 &= -u/(1 + u + u^2) \\ p_2 &= (1 + u)/(1 + u + u^2) \\ p_3 &= u(1 + u)/(1 + u + u^2) \end{aligned}$$

Qui satisfait les équations (6-7-2) où chaque  $p_i$  correspond à une valeur de  $u$ .

Dans ce type de solution le comportement de type Kasner pour un  $u$  donné peut persister pendant des décades d'expansion du volume, jusqu'à ce que les dérivées spatiales jouent enfin un rôle. Le rôle joué par la courbure de l'espace est alors décisif et brutal. L'expansion dans une direction qui était pilotée par un type correspondant à un paramètre  $u = u_0$  va être transformée en une expansion pilotée par un paramètre  $u = -u_0$  (ce qui par paramétrage est équivalent à  $u = u_0 - 1$ ). Une nouvelle ère de Kasner va se dérouler avec ce nouveau paramètre  $u$ , jusqu'à ce que le même phénomène se reproduise et ainsi de suite les alternances se précipitant et amplifiant au fur et à mesure qu'on se rapproche de la singularité.

Voilà pour le principe général de la méthode.

L'analyse détaillée assez complexe est faite dans le Landau Lifchitz (§116-118, voir référence).

Les perturbations par rapport au régime de Kasner, liées à l'existence d'un second membre dans les équations vont entraîner des changements d'ères au fur et à mesure qu'on se rapproche de la singularité, l'ordre des transferts prenant de plus en plus un caractère aléatoire.

La figure (6-7-2) montre comment les oscillations dans les différentes dimensions spatiales se développent en fonction du temps. On voit que la solution consiste en une série infinie, convergente en temps, d'ères de type Kasner, qui se succèdent, la direction des axes et les paramètres  $p_i$  changeant à la transition, et l'amplitude des oscillations tendant vers l'infini à l'approche de la singularité. Les trois directions spatiales sont désignées par HB (haut bas), NS (Nord Sud), EO (Est Ouest).

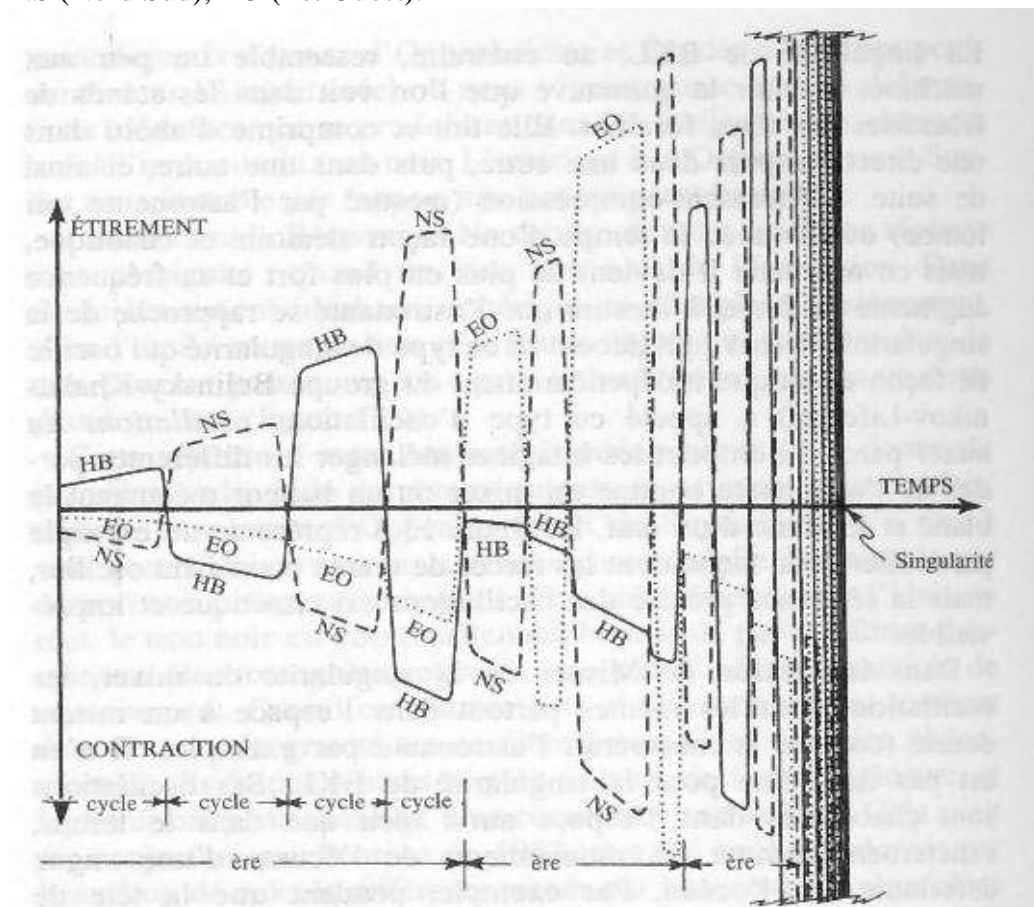


Figure 6-7-2 tiré de « Kip Thorne, Trous noirs, l'héritage sulfureux d'Einstein »

### Singularité BKL dans le cas du trou noir

Ceci est-il applicable au cas du trou noir ?

D'une part, comme nous l'avons indiqué l'espace est homogène sous l'horizon et d'autre part un trou noir correspond à un « big Crunch de l'espace temps de la région sous l'horizon », ce pour quoi le modèle avait été conçu, donc le modèle devrait être applicable.<sup>118</sup>

Comment cet effet se manifeste t'il ?

On considère par exemple qu'un trou noir de quelques milliards de masses solaires qui, en théorie, présente un effet de marée négligeable au franchissement de l'horizon. S'il vient juste de se former il est animé de violentes oscillations chaotiques de ce type s'étendant très loin vers l'horizon faisant subir à des objets l'ayant franchi des stress très importants qui entraînent leur dislocation.

Cet effet s'amenuise assez rapidement avec le temps et ces effets chaotiques dévastateurs ne deviennent sensibles que lorsque on s'approche de la singularité centrale.

## 6-8 Autres théorèmes et conjectures

### Théorème des singularités de Hawking et Penrose

Le théorème des singularités de Hawking et Penrose<sup>119</sup> (le plus important d'une large classe) nous garantit l'ubiquité des singularités dans des espaces non symétriques.

« Un espace temps  $M$ , solution des équations d'Einstein, contient nécessairement des géodésiques ou courbes de type temps incomplètes, (est donc singulier au sens de Schmidt), si les quatre conditions suivantes sont satisfaites.

- 1-  $M$  ne contient pas de boucles temporelles (condition de causalité raisonnable).
- 2- En tout point événement de  $M$ , pour chaque vecteur unitaire de type temps, le tenseur énergie impulsion satisfait la condition :  $(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T)u^\mu u^\nu \geq 0$  (condition d'énergie forte).
- 3- La variété est générique (pas trop symétrique) : Il existe au moins un point événement par lequel passe le vecteur unitaire  $u$  tangent à une géodésique temporelle ou nulle où sa relation avec la courbure locale ne satisfait une relation spécifique. On doit avoir :  $U_{[\alpha} R_{\beta] \gamma \delta] \epsilon} u^{\rho]} u^\delta \neq 0$  au moins en un point de la géodésique
- 4- La variété contient une surface piégée.

Avant l'établissement de ces théorèmes, on pouvait espérer que l'effondrement en une singularité de Schwarzschild était un artefact de la symétrie sphérique et que les géométries typiques resteraient non singulières (comme cela se produit en gravitation Newtonienne).

Mais le théorème de Hawking-Penrose montre que une fois que l'effondrement a atteint un certain point, l'évolution vers la singularité est inévitable.

C'est l'incomplétude des géodésiques qui nous révèle l'existence d'une singularité : il existe des géodésiques qui ne peuvent pas être prolongée dans la variété, et qui néanmoins se

<sup>118</sup> La méthode utilisée, du fait que les équations n'ont pas de solution analytique exacte, repose sur une approximation en développement de puissance à proximité de la singularité. Barrow et Tipler (1979) ont souligné qu'une telle méthode n'est pas totalement fiable. Barrow (1978a) et Barrow and Matzner (1978) suggèrent qu'en général la singularité initiale ne sera pas de type BKL.

<sup>119</sup> Hawking S.W. and Penrose R. (1969). The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proc. Roy. Soc. London A 314,529-548

terminent à une valeur finie du paramètre affine associé. C'est quand une surface piégée apparaît que le point de non retour est atteint. Ceci suggère qu'une singularité est associée à un horizon.

## Conjecture de censure cosmique

Ce credo s'exprime haut et fort à travers la conjecture de censure cosmique<sup>120</sup>.

*Un effondrement gravitationnel depuis un état générique, initialement non singulier, dans un espace asymptotiquement plat soumis à la condition d'énergie dominante, ne peut pas produire de singularité nue.*

Une singularité nue est une singularité qui peut émettre un signal lumineux pouvant se propager jusqu'à l'infini nul  $\mathcal{F}^+$  ; autrement dit qui n'est pas caché derrière un horizon événementiel.

Remarquons que la conjecture se réfère à la formation des singularités nues, pas à leur existence : Il y a des solutions dans lesquelles des singularités nues spatiales existent dans le passé (comme les trous blancs de Schwarzschild) ou des singularités nues temporelles éternelles existent.

La conjecture de censure cosmique n'a pas été prouvée, bien que toutes les tentatives pour trouver des contre exemples aient échouées. La contrainte d'état initial générique est importante, car des modèles numériques ont montré que pour un ajustement très fins des paramètres initiaux on pouvait obtenir, par effondrement, des singularités nues.

Une démonstration d'une certaine forme de la conjecture de censure cosmique reste un des problèmes en suspens de la Relativité Générale classique.

## Théorème des aires

Une conséquence de la conjecture de censure cosmique (ou de certaines assertions équivalentes) est que les trous noirs classiques ne rétrécissent jamais, ils ne peuvent que devenir plus gros.

La taille d'un trou noir est mesurée par la surface de l'horizon des événements, c'est-à-dire l'aire spatiale de l'intersection de l'horizon événementiel avec une tranche de type espace. Nous avons alors le théorème des aires<sup>121</sup> de Hawking<sup>122</sup>:

*En supposant que la condition d'énergie faible et la conjecture de censure sont satisfaites, l'aire de l'horizon événementiel du futur, dans un espace asymptotiquement plat, ne peut jamais décroître.*

Pour un trou noir de Schwarzschild, l'aire est une fonction croissante de la masse, donc ce théorème implique que pour ce type de trous noirs, la masse ne peut pas décroître.

<sup>120</sup> Penrose R. (1969). Gravitational collapse : The role of general relativity. Nuovo Cimento 1, special number 252-276

<sup>121</sup> Bardeen J.M, Carter B., Hawking B.W. (1973). The four laws of black holes mechanics. Commun.Math. Phys. In press

<sup>122</sup> Préalablement citée par Israel. Israel W. (1971). Personal communication. [Box 33.4] in Misner C.W, Thorne K., Wheeler J.A.(1973) Gravitation Freeman New York



Mais pour un trou noir en rotation par exemple, ce n'est plus le cas, l'aire dépend d'une combinaison de la masse et du moment angulaire qu'on peut faire décroître en extrayant de l'énergie de rotation. Le théorème reste cependant valide, l'aire de l'horizon ne décroît pas. Ce théorème est valide dans le contexte de la Relativité générale « classique » car, si on sort de ces hypothèses, la masse peut décroître par le rayonnement quantique de Hawking, ceci peut être attesté par le fait qu'en QFT, en espace courbe, on peut violer la condition d'énergie faible.

## Les trous noirs n'ont pas de poils

Ils sont totalement définis par un maximum de 3 paramètres. La masse, la charge et le moment angulaire. Pour un trou noir de Schwarzschild, sans charge, ni moment angulaire, le seul paramètre est la masse. Les trous noirs sont des objets parfaits, toutes les irrégularités ont été évacuées ou rayonnées lors du processus de formation. Ceci a été démontré conjointement par Penrose, Israel<sup>123</sup>, Carter<sup>124</sup> et Robinson pour les trous noirs stationnaires sans charge. Il a été étendu par Robinson<sup>125</sup> au cas chargé.

## Perte d'information dans les trous noirs

Le théorème d'absence de poils conduit à une situation troublante. Dans la plupart des théories physiques, nous supposons que l'évolution du système dépend des conditions initiales, de sorte que l'information associée à un état, à chaque stade permet de prédire (ou rétro prédire) l'état à un autre moment.

En conséquence deux états quelconques qui sont liés par une solution des équations du mouvement doivent nécessiter qu'on spécifie la même quantité d'information.

Mais en RG, il semble qu'on puisse partir d'une configuration très complexe de matière, le résultat de son effondrement en trou noir va en faire un objet caractérisé par seulement 3 paramètres.

En Relativité Générale classique, ceci n'est pas trop inquiétant, car on peut toujours supposer que ces informations sont toujours présentes mais cachées derrière l'horizon des événements et ne sont ainsi pas vraiment perdues.

Mais si on prend en compte la théorie des champs, nous trouvons que les trous noirs s'évaporent et éventuellement disparaissent, ce qui fait que l'information semble vraiment perdue.

On peut supposer que le rayonnement de Hawking émis, n'est pas totalement thermique et qu'il contient de l'information au sujet de la composition initiale de l'objet qui s'est effondré, mais aucune description satisfaisante pour ce phénomène n'a été proposée à ce jour.

La compréhension de ce « paradoxe de la perte d'information » est considéré généralement comme une clé vers l'élaboration d'une théorie pertinente de gravitation quantique.

Ici, nous resterons dans le cadre de la Relativité Générale classique.

---

<sup>123</sup> Israel.W.(1967a) Event horizons in static vacuum spacetimes. Phys. Rev. 1776-1779.

<sup>124</sup> Carter B. (1973) . Properties of the Kerr metric in Dewitt and Dewitt.

Bardeen J.M, Carter B., Hawking B.W. (1973) The four laws of black holes mechanics. Commun.Math. Phys. In press

<sup>125</sup> Robinson D.C. (1974). Classification of black holes with electromagnetic fields. Phys.Rev. D10, 458-460

## **Théorèmes d'unicité**

En 1967 Israel<sup>126</sup> démontre que la solution de Schwarzschild est la solution unique du champ dans le vide au problème du corps central à symétrie sphérique asymptotiquement plat.

Il a étendu cette démonstration au cas d'un corps central chargé à symétrie sphérique (Reissner Nordström) en 1968<sup>127</sup>.

En 1970 Carter<sup>128</sup> démontre que, sous certaines conditions, la solution de Kerr est la solution unique du champ dans le vide asymptotiquement plat au problème du trou noir en rotation.

En 1975 et 1977, Robinson<sup>129</sup> apporte des compléments à cette démonstration, sans toutefois aboutir à une démonstration complètement générale.

Comme l'indique B. Carter dans un article<sup>130</sup> synthétisant les travaux dans ce domaine, il faudra attendre les travaux de Sudarsky et Wald en 1991<sup>131</sup> et 1993<sup>132</sup> pour obtenir une démonstration vraiment probante.

## **6-9 Caractéristiques particulières des horizons<sup>133</sup>**

La raison pour laquelle nous avons fait grand cas des horizons des événements est qu'ils sont quasiment incontournables en RG.

Cette conclusion découle de deux résultats intéressants.

En résumé, les singularités sont quasiment inévitables, et ces singularités sont cachées derrière des horizons des événements. Bien sûr, ces conclusions se tiennent dans un contexte approprié de condition d'énergie.

Il n'est pas difficile de trouver des espaces temps qui n'ont pas de singularités (celui de Minkowski par exemple) et de même de trouver des singularités sans horizons (comme nous le verrons avec les trous noirs chargés).

Mais nous croyons que les solutions « génériques » auront des singularités cachées derrière des horizons.

Les trous noirs de Schwarzschild sont totalement caractérisés par un seul paramètre ( $M$ ). Cela les désigne comme des objets quasi idéaux en principe très simples<sup>134</sup>. Une autre caractéristique essentielle est le fait qu'on peut y entrer, mais pas en sortir.

<sup>126</sup> Israel.W.(1967a) Event horizons in static vacuum spacetimes. Phys. Rev. 1776-1779.

<sup>127</sup> Israel.W.(1968) Event horizons in static electrovacuum spacetimes. Commun. Math. Phys.8, 245-260

<sup>128</sup> Carter.B. (1970). An axisymmetric Black Hole has only two degrees of freedom. Phys. Rv. Letters 26,331-333

<sup>129</sup> Robinson D.C. (1975). Uniqueness of the kerr black hole. Phys. Rev. Lett. 34, 905-906

Robinson D.C. (1977). A simple proof of the generalisation of Israel's theorem. Gen. Rel. Grav. 8, 695-698

<sup>130</sup> Carter.B. (1997). Has the black hole equilibrium problem been solved? arXiv:gr-qc/9712038 v1 8dec 1997

<sup>131</sup> Sudarsky D., Wald R.M.(1991).Extrema of mass, stationnarity and staticity and solutions to the Einstein Yang Mills equations. Phys. Rev. D46, 1453-74

<sup>132</sup> Sudarsky D., Wald R.M.(1993). Mass formulas for stationnary Einstein Yang Mills black holes and a simple proof of two staticity theorems. Phys. Rev. D47,5209-13

<sup>133</sup> Adapté librement (résumé) et traduit de : Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry ». Addison Wesley p238-248. Ce qui fait la richesse des horizons c'est leur richesse phénoménologique.

<sup>134</sup> On verra que cela pose problème vis-à-vis de la conservation de l'information.

Donc l'horizon des événements à sa frontière apparaît comme une caractéristique très importante. Dans ce paragraphe nous allons préciser quelques notions qui sont couramment utilisées dans ce contexte.

### Définition d'un horizon

Un horizon des événements est une hyper surface séparant les points de l'espace temps reliés à l'infini par des lignes d'univers de type temps de ceux qui ne le sont pas.

Pour comprendre ce que cela signifie concrètement, commençons par nous interroger sur ce que nous appelons « l'infini ».

En RG, la structure globale de l'espace temps peut prendre de nombreuses formes, auxquelles correspondent différentes notions d'infini. Mais si on considère des trous noirs dans un univers physique nous utilisons le terme « infini » comme un raccourci pour dire « bien loin à l'extérieur du trou noir » et nous estimons qu'à cet endroit l'espace temps peut être valablement approximé par l'espace temps de Minkowski.

De cette définition, il est clair que l'horizon des événements est une hyper surface de type lumière (nulle)<sup>135</sup>.

Une hyper surface  $\Sigma$  peut être définie par  $f(x) = \text{constante}$  pour une certaine fonction  $f(x)$ . Le gradient  $\partial_\mu f$  est normal à  $\Sigma$ , si le vecteur normal est nul, l'hyper surface est déclarée de type nul (on dira nulle, pour simplifier), et le vecteur normal est aussi tangent à  $\Sigma$ . Les hyper surfaces nulles peuvent se concevoir comme résultant de l'assemblage de géodésiques nulles (celles qui sont parcourues par la lumière)  $x^\mu(\lambda)$ , appelées génératrices de l'hyper surface.

Pour les horizons du futur des événements, les génératrices peuvent être limités dans le passé (par exemple, quand un trou noir se forme par effondrement d'étoile) mais il va s'étendre indéfiniment vers le futur et de même avec futur et passé interchangé.

Comme l'**horizon des événements est un concept global**, il peut être difficile d'en localiser un quand on utilise une métrique dans des coordonnées arbitraires.

Ici nous nous intéressons à une métrique particulière qui est statique, asymptotiquement plate et contenant des horizons des événements de topologie sphérique.

Dans de tels espaces temps, il y a des coordonnées privilégiées dans lesquelles il est facile d'identifier un horizon des événements. Dans la solution de Schwarzschild, l'horizon des événements est le lieu où les cônes de lumière « basculent » de sorte que  $r = 2GM$  est une surface nulle plutôt qu'une surface de type temps comme celle à  $r = \text{constante}$  pour  $r \gg 2GM$ . Le basculement des cônes de lumière est clairement une notion qui dépend des

---

<sup>135</sup> Horizons des événements et horizons de Killing : Dans la métrique de Schwarzschild, le vecteur de Killing  $K = \partial_t$  de type temps à l'infini devient de type espace lorsqu'il franchit l'horizon des événements (il est de type nul sur l'horizon lui-même). De façon générale, si un champ de vecteurs de Killing  $\chi^\mu$  est nul sur une hypersurface nulle  $\Sigma$ , nous dirons que  $\Sigma$  est un Horizon de Killing de  $\chi^\mu$ . Remarquons que le champ de vecteurs  $\chi^\mu$  va être « normal » à  $\Sigma$ , car une surface nulle ne peut pas avoir deux vecteurs tangents de type nul linéairement indépendants. La notion d'horizon de Killing est logiquement indépendante de celle d'horizon des événements, mais dans les espaces temps invariants par translation dans le temps (espaces temps stationnaires), les deux notions sont intimement liées. Sous certaines conditions raisonnables, nous pouvons définir la classification suivante. Tout horizon des événements  $\Sigma$  dans un espace temps stationnaire asymptotiquement plat est un horizon de Killing pour un certain champ de vecteurs de Killing  $\chi^\mu$ . Si l'espace temps est statique,  $\chi^\mu$  va être le champ de vecteurs de Killing  $K^\mu = (\partial_t)^\mu$  représentant les translations dans le temps à l'infini.

coordonnées (cela ne se produit pas par exemple dans les coordonnées de Kruskal), mais la métrique concernée va nous permettre des constructions analogues.

## Surfaces piégées

C'est quand une surface piégée apparaît que le point de non retour est atteint.

Pour comprendre ce qu'est une surface piégée, commençons par nous représenter une 2-sphère (surface  $2D$  d'une sphère  $3D$  normale), comme ensemble des points à une distance radiale fixée de l'origine, imbriquée dans une tranche de temps constant. Si nous suivons les rayons lumineux émanant de cette surface sphérique dans l'espace temps, un ensemble se dirigeant vers l'intérieur, va décrire une surface sphérique qui diminue au fur et à mesure de la progression tandis que l'autre ensemble pointant vers l'extérieur va définir des sphères de plus en plus grandes au cours de la progression.

Mais cela ne va pas se passer ainsi si la 2-sphère de départ a un rayon  $r < 2GM$  en géométrie de Schwarzschild, à l'intérieur de l'horizon des événements, les deux ensembles de rayon lumineux émanant d'une telle sphère vont évoluer vers des valeurs de  $r$  plus petites (car  $r$  est une coordonnée de type temps), et donc vers des surfaces plus petites ( $4\pi r^2$ ). C'est cela que nous entendons par surface piégée : une sous variété à deux dimensions compacte de type espace dont les rayons lumineux en émanant, dirigés vers le futur, *convergent* dans les deux directions partout dans la sous variété.

La définition formelle de cette *convergence* est que l'expansion  $\theta$  est négative, comme décrit par la congruence des géodésiques. En attendant mieux, on peut s'accrocher à l'idée que ces singularités sont cachées par horizons événementiels, et que cela, à défaut de résoudre le problème, l'éluide.

L'horizon, membrane unidirectionnelle, joue un rôle de « bouclier » contre les « méfaits » potentiels de la singularité vers l'extérieur.

## Gravité de surface

A chaque horizon de Killing nous pouvons associer une grandeur appelée **gravité de surface**. La gravité de surface associée à un horizon de Killing est en principe arbitraire, car nous pouvons toujours multiplier un champ de vecteurs de Killing par une constante réelle et obtenir un autre champ de vecteurs de Killing. Dans un espace temps statique, asymptotiquement plat, le vecteur de Killing, associé à l'invariance vis-à-vis des translations dans le temps,  $K = \partial_t$ , peut être normalisé.

Ceci fixe la valeur de la gravité de surface associée à n'importe quel horizon de Killing. Si l'espace temps est stationnaire, le champ de vecteurs de Killing est défini par une combinaison linéaire de translation dans le temps et de rotation, le fait de normaliser  $K = \partial_t$ , fixe la combinaison linéaire, donc la gravité de surface reste est bien définie.

L'appellation « gravité de surface » pour  $\kappa$  est claire seulement dans le cas d'un espace temps statique. Dans ce cas nous pouvons l'interpréter ainsi :

*Dans un espace temps statique asymptotiquement plat, la gravité de surface est l'accélération subie par un observateur statique près de l'horizon, telle que mesurée par un observateur à l'infini.*

Rappelons que les solutions de trous noirs sont caractérisées par un très petit nombre de paramètres (un seul pour le trou noir de Schwarzschild, le moment d'ordre zéro associé à sa masse), à l'inverse de la multitude caractérisant par exemple une planète.

## Horizon des évènements et horizon apparent.

Dans ce chapitre nous avons traité de l'horizon des évènements qui est relatif à un trou noir statique ou stationnaire (en fait qui existe depuis toujours). Si nous nous intéressons aux trous noirs astrophysiques, il faut introduire la notion d'horizon apparent. En effet, l'horizon des évènements est défini comme le passé causal de l'infini du futur des géodésiques de type lumière.

Par définition, au bout d'un temps fini, cet horizon est « virtuel ». Mais si on peut définir et trouver une surface piégée, celle-ci sera considérée comme un horizon apparent qui est intérieur à l'horizon des évènements.

## 7- Thermodynamique et trous noirs

### 7-1 Analogie thermodynamique

Rappelons le théorème des aires de Hawking :

*En supposant que la condition d'énergie faible et la conjecture de censure sont satisfaites, l'aire de l'horizon événementiel du futur, dans un espace asymptotiquement plat, ne peut jamais décroître.*

Cette propriété rappelle le deuxième principe de la thermodynamique qui stipule que l'entropie ne peut jamais décroître (pour un système isolé). On est donc amené à associer la surface du trou noir à l'entropie.

Pour cela nous sommes amenés à anticiper un peu. Comme nous l'avons signalé au passage, le trou noir stationnaire le plus général est caractérisé par trois paramètres :

La masse  $M$ , la charge  $Q$ , le moment angulaire  $J$ .

Nous avons également défini une gravité de surface  $K$  et une aire du trou noir  $A$ .

Pour les trous noirs en rotation nous serons amenés à définir  $\Omega$  vitesse de rotation de l'horizon du trou noir et  $\Phi$  comme son potentiel électrique, pour les trous noirs chargés

Par ailleurs nous allons être amenés à utiliser la formule établie par Christodoulou et Ruffini<sup>136</sup> citée ci-dessous :

$$M^2 = (M_i + Q^2/4M_i)^2 + J^2/4M_i \quad (6-2-1)$$

Où  $M_i$  est la masse irréductible

Nous pouvons alors faire le parallèle suivant :

#### 1- a Principe zéro de la mécanique des trous noirs.

$K$  (la gravité de surface) est la même partout sur l'horizon d'un trou noir stationnaire.

#### 1- b Principe zéro de la thermodynamique.

$T$  (la température) est partout la même pour un système en équilibre.

<sup>136</sup> Christodoulou D., Ruffini R. (1971). Reversible transformation of a charged black hole. Phys. Rev. D4, 3552-3555

On est amené à associer  $T$  et  $K$  qui seront proportionnels. La gravité de surface va être à un facteur normatif près représentative de la température du trou Noir.

$$T \leftrightarrow K/2 \pi$$

De surcroît il faut ajouter que :

$$\begin{aligned} K > 0 & \quad (\text{un trou noir ne peut pas avoir de gravité de surface nulle})^{137} \quad \text{et} \\ T > 0 & \quad (\text{le zéro absolu n'existe pas}) \end{aligned}$$

Cela complète l'analogie, c'est quelquefois présenté comme un principe différent.

### 2- a Premier principe de la mécanique des trous noirs.

En différentiant la formule de masse (6-2-1) de Christodoulou et Ruffini (1971) définissant la masse du trou noir en fonction de sa masse irréductible, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta M &= K\delta A/8\pi + \Omega\delta J + \Phi\delta Q && \text{dans le cas général} \\ \delta M &= K\delta A/8\pi && \text{pour un trou noir de Schwarzschild} \end{aligned}$$

### 2-b Premier principe de la thermodynamique

$$\delta E = T\delta S + P\delta V$$

On est amené à associer  $E$  à  $M$ ,  $A$  à l'entropie  $S$  et  $(\Omega\delta J + \Phi\delta Q)$  au travail effectué  $P\delta V$ , lorsque on fait varier le moment angulaire ou la charge. On est amené à interpréter  $\Omega$  comme la vitesse angulaire du trou noir (calculée à l'horizon) et  $\Phi$  comme son potentiel électrique.

$$A \leftrightarrow S/4G, \quad E \leftrightarrow M$$

### 3-a Deuxième principe de la mécanique des trous noirs.

$$\delta A \geq 0 \quad \text{Ceci se déduit du théorème des aires de Hawking.}$$

### 3-b Deuxième principe de la thermodynamique.

$$\delta S \geq 0 \quad \text{L'entropie d'un système isolé ne peut pas décroître}$$

### 5- Deuxième principe généralisé de la mécanique des trous noirs.

6-

$$\delta (S + A/4G) \geq 0$$

Ce deuxième principe généralisé a été proposé par Bekenstein. Ceci correspond au fait que la somme de l'entropie de la matière et des trous noirs ne décroît jamais.

De ce qui précède on voit comment est construite l'analogie entre la mécanique des trous noirs et la thermodynamique classique.

---

<sup>137</sup> Il existe une exception (trou noir de Kerr ou Kerr Newmann critique, qui est un ensemble de mesure nulle)

## 7-2 Introduction au rayonnement de Hawking

Cette analogie avec la thermodynamique, qui associait une température à un trou noir, et le considérait comme un corps noir, pour intéressante qu'elle fut, comportait un vice de conception :

Les trous noirs ne rayonnent pas, comment peut-on alors les considérer comme un corps noir et leur attribuer une température ?

L'écueil était de taille

Historiquement c'est Bekenstein qui en 1972 le premier a eu l'idée que les trous noirs pouvaient se comporter en honnêtes corps noirs, avec leur rayonnement dépendant de leur température.

Ceci chagrinait Hawking qui, en voulant prouver que c'était faux, allait étudier un mécanisme hybride (1974), qui au contraire de son a priori, allait permettre de lever cette contradiction.

L'analogie thermodynamique se confirme être plus concrète que jamais, même, si pour être honnête, personne ne sait très bien pourquoi.

## 8- Références

**Antoci S. & Liebscher D.E.** (2001). Reconsidering Schwarzschild's original solution. arXiv:gr-qc/01102084 v2

**Bardeen J.M & Carter B. & Hawking B.W.** (1973). The four laws of black holes mechanics. Commun.Math. Phys. In press

**Bardeen J.M.** (1968). General relativistic collapse of charged dust (abstract).Bull. Am. Phys. Soc. 13, 41.

**Barrow J.D. & Matzner R.** (1978) The homogeneity and isotropy of the universe. Mon. Not.Roy.Ast.Soc. 181, 719-728.

**Barrow J.D. & Tipler F.J** (1979) Analysis of the singularity studies by Belinski, Lifchitz and Kalatnikov. Phys. Rev. ( to be published)

**Barrow J.D.** (1978a). Quiescent cosmology. Nature 272, 211-215

**Becquerel J.** (1923) Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la sphère de Schwarzschild. Paris. Hermann, 32 pages

**Belinski V. A & Kalatnikov I & Lifchitz E.** (1970). Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology.Adv. Phys. 19, 523-573.

**Belinski V .A. & Kalatnikov I.M.**(1969a). On the nature of the singularities in the general solution of the gravitation equations.Zh.Eksp.&Teor.Fiz 56,1700-1712. English Trans. In Sov. Phys. JETP 29,911-917.

**Belinski V. A. & Kalatnikov I.M.**(1969b). General solution of the gravitation equations with a physical singularity.Zh.Eksp.&Teor.Fiz 57,2163-2175. English Trans. In Sov. Phys. JETP 30, 1174-1180.

**Belinski V. A. & Kalatnikov I.M.**(1970). The general solution of the gravitation equations with a physical oscillatory singularity.Zh.Eksp.&Teor.Fiz 59, 314-321. English Trans. In Sov. Phys. JETP 32,169-172

**Bianchi, Luigi** (1918) Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finite di trasformazioni [Lectures on the theory of finite continuous transformation groups (1902-1903)], Pisa, 1918, pp.550-557 §198. The seven types of compositions of integrable  $G_3$ 's, §199. The two types of nonintegrable (simple)  $G_3$ 's[Princeton Fine Hall Math Phys Library SM 81134 .177 .11]

- Birkoff G.D.** (1923). Relativity and modern Physics. Harvard University Press Cambridge Mass.
- Bronstein I.N & Semandiaev K.A** (1982), Eléments d'analyse mathématiques, In « Aide mémoire de mathématiques », 7ème édition p537 (Eyrolles)
- Carroll S. M.** (2004). « Space time and Geometry ». Addison Wesley
- Carter B.** (1973) . Properties of the Kerr metric in Dewitt and Dewitt .
- Carter.B.** (1970). An axisymmetric Black Hole has only two degrees of freedom. Phys. Rev. Letters 26,331-333
- Carter.B.** (1997). Has the black hole equilibrium problem been solved? arXiv:gr-qc/9712038 v1 8dec 1997
- Christodoulou D. & Ruffini R.** (1971). Reversible transformation of a charged black hole. Phys. Rev. D4, 3552-3555
- Damour,T. & Deser.S** (1990) Relativité, Vol 19, 739- 748.Encyclopédie Universalis.
- De la Cruz V. & Israel W.** (1967). Gravitational bounce. Nuovo Cimento A 51, 744-760
- DeWitt C. and DeWitt B.**(1973). Black holes : Les astres occlus, Les Houches Summer School, 1972, Gordon and Breach, New York.
- DeWitt C. M. and Wheeler J. A.**(1968). Battelle rencontres, 1967. Lectures in Mathematics and Physics. W.A. Benjamin, New York.
- Doran C** .(2000) A new form of the Kerr solution, Phys.rev D61,067503-067506
- Droste . J.** (1916) « Het van eenenkel centrum in Einstein's theorie des zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld. Versl. Gewone Vergad Akad.Amst.25,163-180. English translation : the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Proc.Acad. Sci. Amst.,19(i):197-215.
- Earman J. & Eisenstaedt J.** (1999). Einstein and Singularities. Stud.Hist.Mod.Phys. Vol 30.N°2 pp185-235. Elsevier Science Ltd GB
- Earman J. & Glymour C.** (1978) Einstein and Hilbert: Two months in the history of general relativity. Arch. For history of exact sciences. 19 :291-308
- Eddington A.S** 1923. The mathematical theory of gravitation. Cambridge Un. Press 1923, 336p
- Einstein, A.** (1916). "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." Annalen der Physik 49: 769-822.
- Einstein A. & Rosen N.** (1935). The Particle Problem in the General Theory of Relativity. Phys. Rev.V48 p73-77
- Einstein, A.** (1939). Stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. Ann. Math. 40: 922-936.
- Eisenstaedt J.** (1982). « Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild ». Archive for history of exact sciences, Vol 27, Number 2, 157-198
- Eisenstaedt J.** (1987). Trajectoires et impasses de la solution de Schwarzschild. Archives for History of Exact Sciences. Vol 37, Number 4, p 275-357 : Lettre de Synge à Robertson datée du 31/10/1938 citée p 329.
- Eisenstaedt J.** (2003). Einstein et la relativité générale, les chemins de l'espace temps. P 254. CNRS éditions
- Finkelstein D.** (1958) Past-Future asymmetry of a gravitational Field of a point particle. Phys. Rev. 110 : p 965-967
- Fronsdal C.** (1959). Completion and embedding of the Schwarzschild solution. Phys. Rev. 116 p 778-781.
- Geroch, R.P.** (1967). Singularities in spacetime of general relativity: Their definition, Existence and local characterization. Doctoral dissertation, Princeton university § 32.7-44.1, Epigraph to Chap 41



- Geroch, R. P.**(1968). What is a singularity in general relativity?. *Ann. Phys. (U.S.A)*48, 526-540.
- Gullstrand A.** (1922). Allgemeine Lösung des statischen Einkörper-problems in der Einsteinschen Gravitations theorie, *Arkiv.Mat.Astron.Fys.* 16(8), 1-15
- Hawking S.W & Ellis G.F.R.**(1973). *The large scale structure of space time.* Cambridge university press,
- Hawking S.W. & Penrose R.** (1969). The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. London A* 314,529-548
- Hawking S.W. & Penrose R.** (1997). *La nature de l'espace et du temps.* Nrf essais. Galimard (trad. F. Balibar)
- Hawking S.W.** (1966b). The occurrence of singularities. *Proc. R. Society . London A* 294. 511-521
- Hawking S.W.** (1973). The event horizon. In DeWitt and DeWitt , §34.1-34.5
- Hawking S.W.**(1966a). Singularities and the geometry of spacetime. Adam prize essay. Cambridge univers.UK
- Hawking S.W.**(1971b) Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Letters* 26,1344-1346
- Hawking. S.W.**(1972a). Black holes in general relativity. *Commun. Math.Phys.* 25, 152-166.
- Israel W.**(1967a) Event horizons in static vacuum spacetimes. *Phys. Rev.* 1776-1779.
- Israel W.** (1968) Event horizons in static electrovacuum spacetimes. *Commun. Math. Phys.*8, 245-260
- Kasner E** (1921a). Geometrical theorems on Einstein's cosmological equation. *Am.J. Math.* 43, 217-221
- Kasner E** (1921b). Finite representation of the solar gravitational field in a space of six dimensions. *Am.J. Math.* 43, 130-133
- Kasner E** (1921c). The impossibility of Einstein's field immersed in a flat space of five dimensions. *Am.J. Math.* 43, 126-129
- Kruskal M. D.** (1960). Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys.Rev.* 119 : p 1743-1745.
- Lake K.** (1994), arXiv :gr-qc/9407005 v1 5 Jul 94, discuté préalablement par Gautreau et Hoffmann
- Landau L. & Lifchitz E.** (1994). *Théorie des champs*, Ed. Mir –Ellipse
- Lemaître G.** (1933), « l'univers en expansion ». *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, Ser.A, 53 p 51-85, en particulier p.82
- Lifchitz E.M. & Kalatnikov I. M.** (1970). Oscillatory approach to singular point in the open cosmological model. *Zh. Eksp. & Teor Fiz. Pis'ma* 11, 200-203. English trans. In *Sov. Phys.JETP lett.* 11, 123-125
- Martel K. & Poisson E.** (2000) Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes. *ArXiv.gr-qc/0001069 v4* 18 Oct 2000
- Misner C.W. & Taub A.H.** (1968). A singularity free empty universe. *Zh. Eksp.& Teor. Fiz* 55,233. English original in *Sov.Phys. JETP* 28,122 (1969)
- Misner C.W. & Thorne K. & Wheeler J.A .**(1973) *Gravitation.* Freeman New York
- Misner C.W.** (1969b). Mixmaster universes. *Phys. Rev. Letters* 22, 1071-1074
- Novikov I.D.** (1966a). Change of relativistic collapse into anticollapse and kinematics of a charged sphere. *Zh. Eksp. & Teor. Fiz Pis'ma* 3,223-227. English trans. In *Sov. Phys. JETP Lett.* 3, 142-144.
- Novikov. I.D.** (1963) doctoral dissertation, Shternberg Astronomical Institute, Moscow (§31,4)
- Oppenheimer J.R. & Snyder H.** (1939). On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.* 56: 455-459

- Painlevé P.** (1921) La mécanique classique de la théorie de la relativité. C.R Acad. Sci. Paris 173, 677-680, A.
- Penrose R.** (1965). Gravitationnal collapse and space time singularities. Phys. Rev. Letters Vol 14, N.3 p 57-59
- Penrose R.** (1968a). Structure of spacetime in "DeWitt and Wheeler". §34.1-34.4,41.7-41.11.
- Penrose R.** (1969). Gravitationnal collapse : The role of general relativity. Nuevo Cimento 1, special number 252-276
- Penrose R.** (1972a). Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. and Applied Math. Regional
- Podurets M.A.** (1966) The character of the singularity in the gravitationnal collapse of a star. Dokl. Akad. Nauk SSSR 167, 275-276. English translation in Sov. Phys. Doklady 11, 275-27
- Raychaudhuri A. K.** (1955). "Relativistic cosmology I.". *Phys. Rev. D* **98**: 1123
- Regge T. & Wheeler J. A** (1957) .Stability of a Schwarzschild Singularity. Phys.Rev. Vol 108, N 4 p 1063-1069
- Rindler W.** (1965) Elliptic Kruskal-Schwarzschild space. Phys. Rev. Letters Vol. 15, numb.26. P 1001-1002
- Robinson D.C.** (1974). Classification of black holes with electromagnetic fields. Phys.Rev. D10, 458-460
- Robinson D.C.** (1975). Uniqueness of the kerr black hole. Phys. Rev. Lett. 34, 905-906
- Robinson D.C.** (1977). A simple proof of the generalisation of Israel's theorem. Gen. Rel. Grav. 8, 695-698
- Schmidt, B.G.** (1971). A new definition of singular points in general relativity. Gen.Rel. Grav.1,269-280
- Schwarzschild. K.** (1916a) «Uber das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinchen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 189-196.
- Schwarzschild. K.** (1916b) «Uber das Gravitationsfeld einer kügel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinchen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 424-434.
- Senovilla J.M.** (2006) New editorial note on K. Schwarzschild's Golden Oldie. To be published in GRG
- Sudarsky D. & Wald R.M.** (1991).Extrema of mass, stationnarity and staticity and solutions to the Einstein Yang Mills equations. Phys. Rev. D46, 1453-74
- Sudarsky D. & Wald R.M.** (1993). Mass formulas for stationnary Einstein Yang Mills black holes and a simple proof of two staticity theorems. Phys. Rev. D47,5209-13
- Synge J.L.** (1950). « The gravitationnal field of a particle ». Proc. R. Irish Acad. A 53, 83-114
- Szekeres G.** (1960). On the singularities of a Riemannien manifold. Publ. Mat. Debrecen 7, 285-301.
- Thorne K.** (1994). Trous noirs et distorsions du temps. Champs Flammarion (1997-trad.F.)
- Tipler F. J. & Clarke C. J. S. & Ellis G. F. R.** (1980), "Singularities and horizons-A review article," In General relativity and gravitation: One hundred years after the birth of Albert Einstein, ed. A. Held (Plenum Press, New York).
- Zakir. Z.** (1999). New exact Solution of the Einstein Equations as Revised Schwarzschild solution without black holes. arXiv:gr-qc/99005068 v3