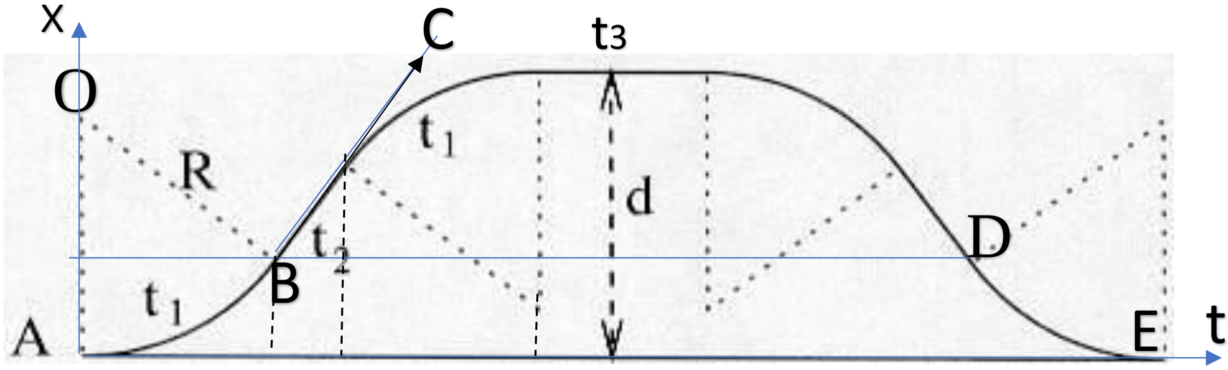
Paradoxe des jumeaux de Langevin : Solution avec rotation de Wick



Construction de la solution en géométrie euclidienne 2D définie par $L^2 = V^2t^2 + X^2$.

Les jumeaux se séparent en A. Celui qui reste sur Terre suit la ligne d'univers AE (axe t) et le voyageur la ligne d'univers ABDE. Le voyage comprend une première phase d'accélération constante $\boldsymbol{g}$ en partant A de durée propre $\boldsymbol{t_1}$**,** puis une phase inertielle de durée propre $\boldsymbol{t_2}$ puis une phase de décélération constante $\boldsymbol{g}$ de durée propre t_1 puis une phase inertielle où la fusée s'est posée à destination, à une distance $\boldsymbol{d}$ du départ, de durée $\boldsymbol{t_3}$, le retour s'effectuant symétriquement. Ceci est représenté sur un diagramme cartésien de coordonnées *t*, *x*. En géométrie euclidienne à 2 dimensions, l'accélération constante est représentée par un arc de cercle et une vitesse constante par un segment de droite, de pente dépendant de la vitesse inertielle acquise à la fin de l'accélération par rapport au référentiel inertiel de départ. Pendant la première phase d'accélération constante $\boldsymbol{g}$, le véhicule parcourt un arc de cercle de longueur $\boldsymbol{t_1}$, (temps du voyageur) en unité de temps ou $\boldsymbol{V.t_l}$ en unité d'espace, d'angle $\boldsymbol{\alpha = t_1.\,g}$ (ce qui donne en radians $\boldsymbol{\alpha V^{-1} = t_l.g.V^{-1}}$) et de rayon (en unité d'espace) $\boldsymbol{R = V^2.\,g^{-1}}$ .Les angles AOB et CBD sont égaux à l'angle *a*. Par des considérations simples sur la figure, on déduit :

$$d = 2R\left(1 - \cos(\frac{\alpha}{V})\right) + V.t_2\ \sin(\frac{\alpha}{V}) = \frac{2.V^2}{g}\left(1 - \cos(\frac{t_1.g}{V})\right) + v.t_2 \sin(\frac{t_1.g}{V})$$

On passe de la géométrie euclidienne $\boldsymbol{L^2 = V^2t^2 + x^2}$ à la minkowskienne $\boldsymbol{S^2 = -c^2T^2 + x^2}$, par exemple, en posant $\boldsymbol{V^2 = -c^2}$ soit $\boldsymbol{V = i.c.}$ [1]**,**

En prenant en compte tous ces éléments on obtient le résultat au problème de relativité :

$$d = \frac{2c^2}{g}(\cosh(\frac{t_1.g}{c}) - 1) + c.t_2 .\sinh(\frac{t_1.g}{c})$$

Même calcul pour la différence de longueur temporelle entre la courbe et la ligne droite

$$\Delta t = 4\left(t_1 - \frac{R}{V}\sin\frac{\alpha}{V}\right) + 2t_2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{V}\right) \to 4\left(t_1 - \frac{c}{g}\sinh\frac{t_1.g}{c}\right) + 2t_2\left(1 - \cosh\frac{t_1.g}{c}\right)$$

Ceci est négatif, car la ligne droite en espace de Minkowski est plus longue que la ligne courbe !

[1] En général on pose $\boldsymbol{T = i.t}$ (rotation de Wick). Dans ce cas, poser $\boldsymbol{V = i.c}$, qui revient au même, est plus pratique. Les fonctions trigonométriques d'arguments imaginaires se transforment en leurs homologues hyperboliques. Ceci est adapté du document : http://spoirier.lautre.net/physique.pdf.