

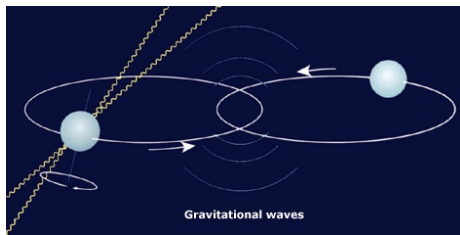
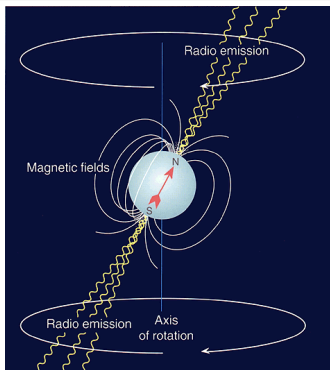
THÉORIE ET DÉTECTION DU RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL

Luc Blanchet

Gravitation et Cosmologie ($\mathcal{GR}\epsilon\mathcal{CO}$)
Institut d'Astrophysique de Paris

17 janvier 2009

Le pulsar binaire PSR 1913+16



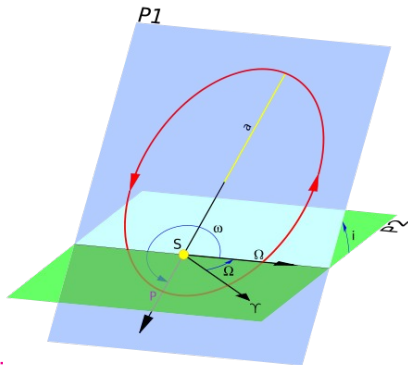
- Le pulsar binaire est une étoile à neutrons en rotation rapide sur elle-même et émettant des signaux radio comme un phare en direction de la Terre.

Paramètres non-orbitaux

- 1 $P_{\text{pulsar}} = 59 \text{ ms}$ période du pulsar
 - 2 $\dot{P}_{\text{pulsar}} < 10^{-12}$ ralentissement du pulsar
- Ce pulsar tourne sur une orbite (quasi-)keplérienne autour d'un compagnon invisible, probablement une autre étoile à neutrons

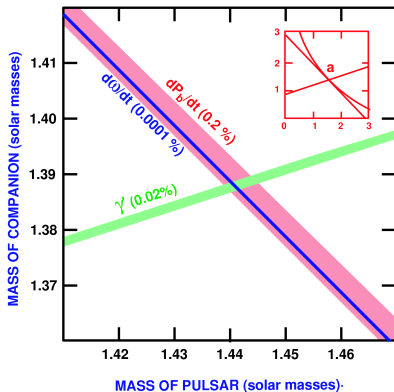
L'orbite keplerienne du pulsar binaire

L'analyse des instants d'arrivée successifs des pulses radio sur Terre permet de reconstituer très précisément l'orbite keplerienne



Paramètres kepleriens

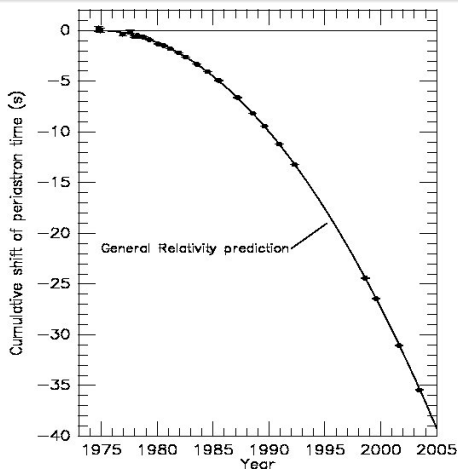
- 1 $a \sin i = 700\,000 \text{ km}$ demi-grand axe projeté
- 2 $e = 0.617$ excentricité
- 3 $P = 7.75 \text{ h}$ période orbitale



Paramètres post-kepleriens

- 1 $\dot{\omega} = 4.2^\circ/\text{yr}$ précession relativiste du périastre
- 2 $\gamma = 4.3 \text{ ms}$ décalage vers le rouge gravitationnel et effet Doppler du 2^d ordre
- 3 $\dot{P} = -2.4 \cdot 10^{-12} \text{ s/s}$ décroissance séculaire de la période orbitale

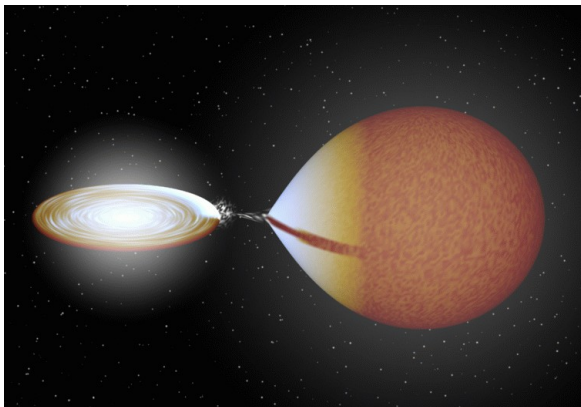
La décroissance orbitale du pulsar binaire



Prediction de la théorie de la relativité générale

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{5c^5} \frac{\mu}{M} \left(\frac{2\pi G M}{P} \right)^{5/3} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}} \approx -2.4 \cdot 10^{-12}$$

Les binaires cataclysmiques



- Une étoile évoluée — la **secondaire**, de masse M_2 — remplit son lobe de Roche et transfère de la masse vers un compagnon plus massif — la **primaire**, de masse $M_1 > M_2$ — qui est une naine blanche
- Un disque d'accrétion de matière chaude se forme autour de la primaire et des rayons UV et X sont émis à cause des hautes températures

Perte de moment cinétique dans les binaires cataclysmiques

- ① Le moment cinétique orbital est $J = GM_1M_2(a/GM)^{1/2}$ d'où l'on déduit

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2\dot{J}}{J} + \frac{2(-\dot{M}_2)}{M_2} \left(1 - \frac{M_2}{M_1}\right)$$

où $-\dot{M}_2$ est le transfert de masse de M_2 vers M_1

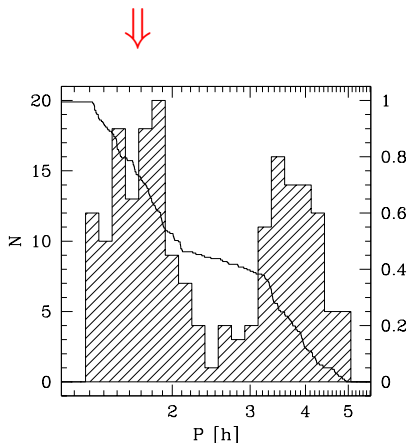
- ② Le transfert de masse tend à **augmenter la distance a** entre les deux étoiles (car $M_2 < M_1$) donc pour expliquer l'existence durable des binaires cataclysmiques il faut invoquer un mécanisme de perte de moment cinétique
- ③ Quand $P \lesssim 2$ heures il n'y a qu'un seul mécanisme possible: **les ondes gravitationnelles**

$$\left(\frac{\dot{J}}{J}\right)^{\text{OG}} = -\frac{32G^3}{5c^5} \frac{M_1M_2M}{a^4}$$

- ④ Avec $\dot{a} \approx 0$ on obtient une estimation pour $-\dot{M}_2$ et le résultat est en bon accord avec le transfert de masse déduit des observations en rayons X

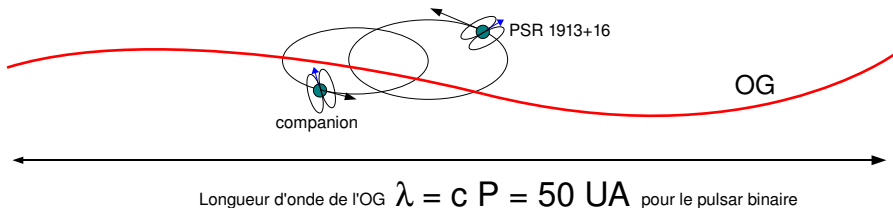
Histogramme des binaires cataclysmiques

La présence de ce pic (correspondant à des périodes orbitales $P \lesssim 2$ heures) est expliqué uniquement par le rayonnement gravitationnel



Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle?

- Une onde gravitationnelle (OG) est une déformation de la courbure de l'espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière
- Les OG sont engendrées par la dynamique et le mouvement de la source
- Elles sont plus analogues à des **ondes sonores** qu'à des ondes lumineuses

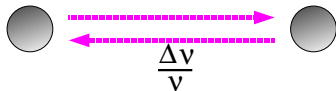


Le principe d'équivalence d'Einstein

- Dans un voisinage de tout évènement \mathcal{P} dans l'espace-temps on peut construire un **système de coordonnées localement inertielles** $\{X^\alpha\}$ tel que
 - 1 Les lois de la relativité restreinte sont valables en \mathcal{P}
 - 2 La déviation à la relativité restreinte autour de \mathcal{P} est du second ordre dans la distance

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \underbrace{R_{\alpha\mu\beta\nu}}_{\text{tenseur de courbure}} X^\mu X^\nu + \mathcal{O}(X^3)$$

- Conséquence pour la détection des OG: seulement les modifications de la **distance relative** sont mesurables, par exemple en mesurant le décalage de fréquence d'un signal lumineux échangé entre deux masses



Les équations de champ d'Einstein

- ① Elles sont basées sur le lagrangien de Einstein-Hilbert

$$L = \underbrace{\frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{-g} R}_{\text{champ gravitationnel}} + \underbrace{L_\phi[g, \phi]}_{\text{champs de matière}}$$

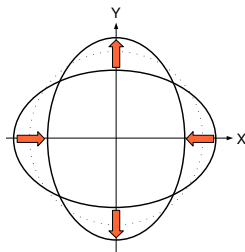
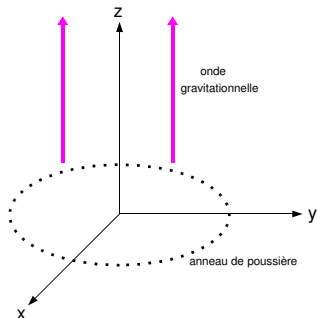
- ② Elles forment un système de dix équations différentielles du second ordre pour les dix coefficients métriques $g_{\mu\nu}(x^\rho)$

$$\underbrace{G^{\mu\nu}[g, \partial g, \partial^2 g]}_{\text{tenseur d'Einstein}} + \underbrace{\Lambda g^{\mu\nu}}_{\text{terme cosmologique}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T^{\mu\nu}[g, \phi]}_{\text{tenseur énergie-impulsion}}$$

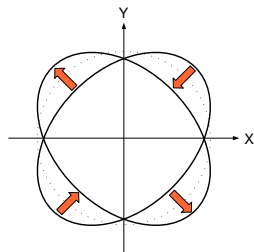
- ③ Les équations de champ impliquent, par les identités de Bianchi contractée et de Ricci, les équations du mouvement de la matière

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0 \\ \nabla_\nu g^{\mu\nu} \equiv 0 \end{array} \right\} \implies \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

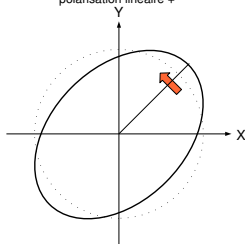
Modes de polarisations des ondes gravitationnelles



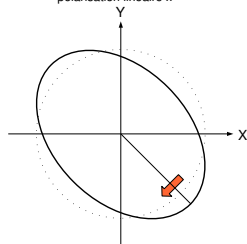
polarisation linéaire +



polarisation linéaire x



polarisation circulaire droite



polarisation circulaire gauche

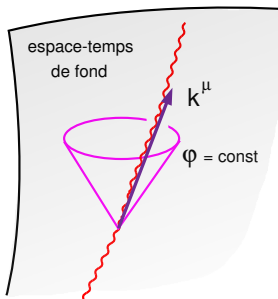
- 1 La propagation d'un signal d'une source à un détecteur signifie que la théorie doit admettre des solutions avec des discontinuités
- 2 La métrique de l'espace-temps doit être
 - C^1 partout
 - C^3 par morceaux
- 3 L'espace-temps admet des surfaces de discontinuités (appelées **surfaces caractéristiques** par les mathématiciens) qui correspondent à des fronts d'OG pures se propageant à la vitesse de la lumière

Ondes gravitationnelles pour le Physicien

C'est une petite déformation de la surface de l'espace-temps

$$g_{\mu\nu} = \underbrace{g_{\mu\nu}^0}_{\text{métrique de fond}} + \underbrace{h_{\mu\nu} e^{i\omega\varphi(x)}}_{\text{perturbation}}$$

dans la limite des hautes fréquences $\omega \rightarrow +\infty$



- 1 Le vecteur d'onde $k_\mu = \partial_\mu\varphi$ est tangent au cône de lumière

$$k^\mu k_\mu = 0$$

- 2 Le mouvement est géodésique

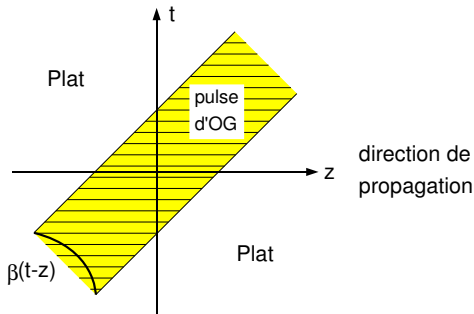
$$k^\nu \nabla_\nu k_\mu = 0$$

Ondes gravitationnelles pour le Relativiste

Une onde plane est une **solution exacte des équations de champ d'Einstein**

$$ds^2 = -dt^2 + L^2 (e^{2\beta} dx^2 + e^{-2\beta} dy^2) + dz^2$$

où $\beta = \beta(t - z)$ est le profil de l'onde et $L = L(t - z)$ est le facteur de fond qui est déterminé par les équations de champ



Ondes gravitationnelles pour l'Astrophysicien

- 1 L'amplitude de l'OG est donnée par la première formule du quadrupôle

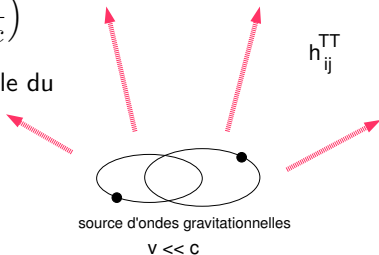
$$h_{ij}^{\text{TT}}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{c^4 r} P_{ijkl}(\mathbf{n}) \frac{d^2 Q_{kl}}{dt^2} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

- 2 Le flux total d'énergie est donné par la formule du quadrupôle d'Einstein

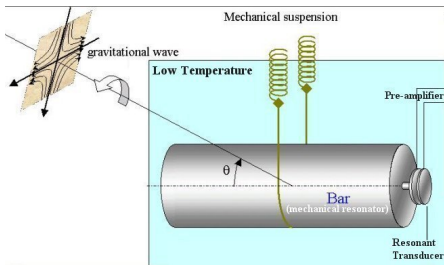
$$\left(\frac{dE}{dt} \right)^{\text{GW}} = \frac{G}{5c^5} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3}$$

- 3 La force de réaction de rayonnement est donnée par la troisième formule du quadrupôle

$$\mathcal{F}_i^{\text{RR}} = \frac{2G}{5c^5} \rho x^j \frac{d^5 Q_{ij}}{dt^5}$$



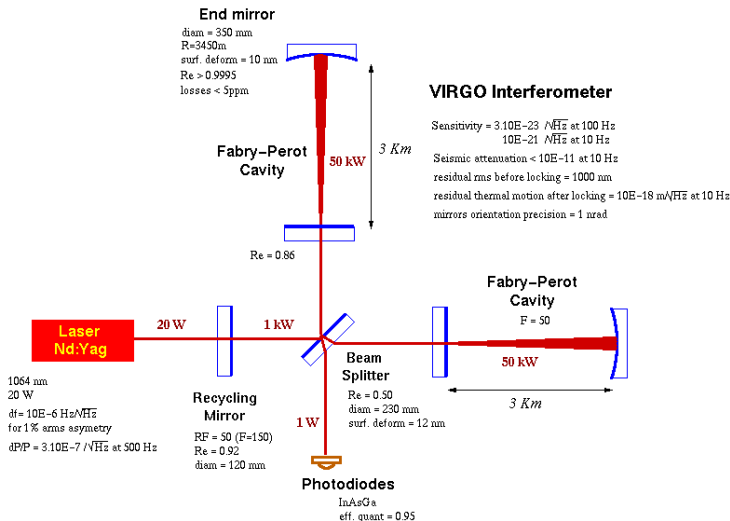
Barre pour la détection des ondes gravitationnelles



Les vibrations mécaniques sont amplifiées quand la fréquence de l'onde gravitationnelle ω est proche de la fréquence fondamentale de la barre Ω

$$\delta\ddot{L} + \Omega^2\delta L = \frac{L}{2}\ddot{h} \quad \Longrightarrow \quad \delta L_0 = \frac{Lh_0}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Interféromètre à laser pour la détection des OG



Detecter un signal d'onde gravitationnelle très faible

- Le déplacement des miroirs par rapport à la séparatrice est

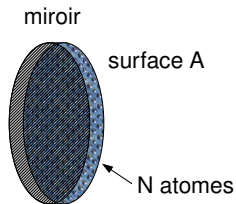
$$\frac{\delta L}{L} \sim \frac{h}{2}$$

avec $L = 3 \text{ km}$ pour l'expérience VIRGO

- Pour un système binaire à une distance de $\sim 100 \text{ Mpc}$ on a $h \sim 10^{-22}$

$$\delta L \sim 10^{-19} \text{ m} = 10^{-4} \text{ fermi !}$$

Comment peut-on détecter un déplacement aussi faible?



- On mesure le **déplacement collectif de N atomes** d'une couche atomique sur la surface A du miroir

$$N \sim 10^{18} \implies \delta L_{\text{eff}} \sim \sqrt{N} \delta L \sim 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$$

de l'ordre de grandeur des distances inter-atomiques

Détecteurs interféromètres au sol

LIGO



GEO



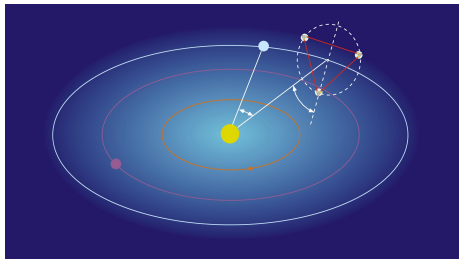
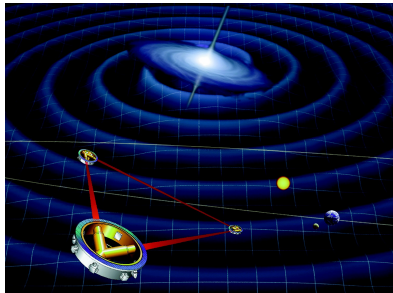
LIGO/VIRGO/GEO observent les OG
dans la gamme des hautes fréquences

$$10 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 10^3 \text{ Hz}$$



VIRGO

LISA

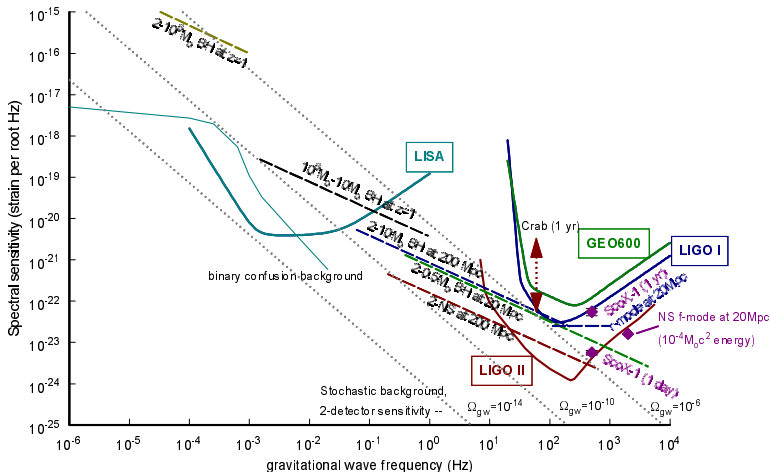


LISA va observer les OG dans la gamme des basses fréquences

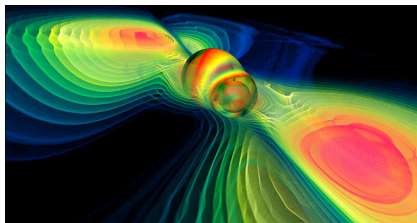
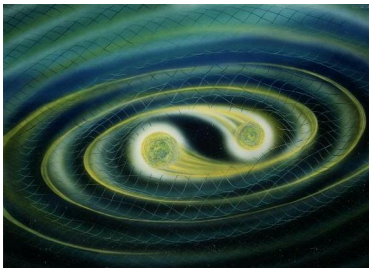
$$10^{-4} \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 10^{-1} \text{ Hz}$$

Sources d'OG pour LISA et pour LIGO/VIRGO

Sensitivity of Gravitational Wave Interferometers



Le spiralement et la fusion d'objets compacts



Des étoiles à neutrons et des trous noirs spiralent et fusionnent

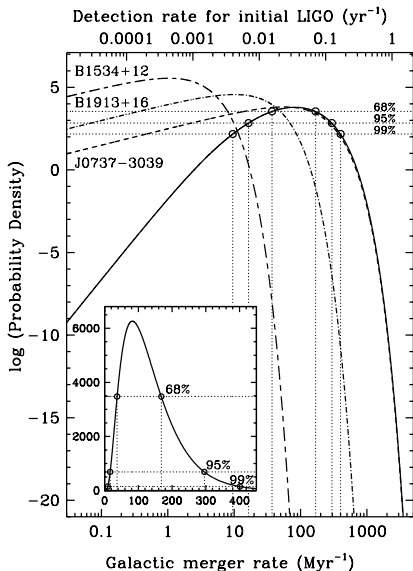
- 1 Les évènements d'étoiles à neutrons ($M = 1.4 M_{\odot}$) vont être détectés par les détecteurs au sol LIGO/VIRGO
- 2 Les trous noirs de taille stellaire ($5 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 20 M_{\odot}$) vont aussi être détectés par les détecteurs au sol
- 3 Les trous noirs supermassifs ($10^5 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^8 M_{\odot}$) vont être détectés par le détecteur dans l'espace LISA

Coalescences de trous noirs supermassifs détectés par LISA

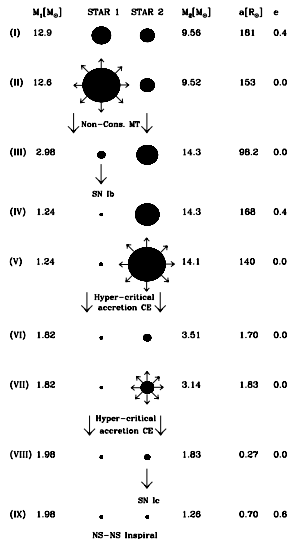


Quand deux galaxies entrent en collision les trous noirs supermassifs devraient former un système binaire lié par les forces gravitationnelles et qui va spiraler et fusionner. LISA va être capable de détecter les ondes gravitationnelles émises par de tels évènements gigantesques n'importe où dans l'Univers

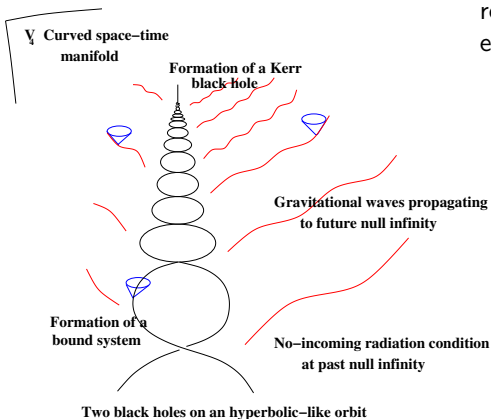
Estimation du nombre de binaires d'étoiles à neutrons



Formation des binaires d'étoiles à neutrons



Le problème à deux corps en relativité générale

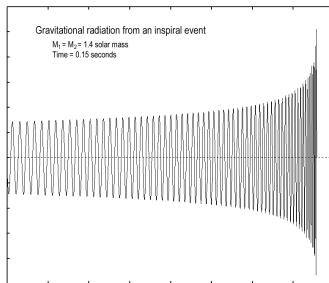


La solution du problème à deux corps en relativité générale consisterait en un espace-temps décrivant

- 1 Deux trous noirs sur une orbite de diffusion initiale quasi-hyperbolique
- 2 La formation d'un système binaire lié par émission d'ondes gravitationnelles
- 3 La longue phase de spiralement pendant laquelle les deux trous noirs se rapprochent l'un de l'autre
- 4 Le processus détaillé de la fusion des deux horizons des trous noirs
- 5 L'émission d'OG par le trou noir final jusqu'à la formation d'un trou noir stationnaire (Kerr)

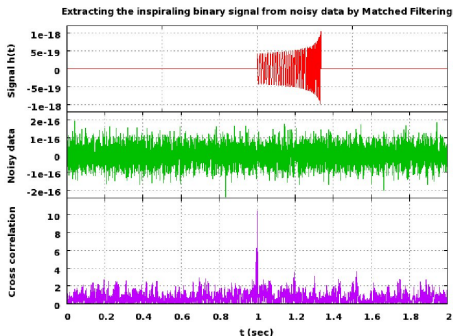
Le spiralement des systèmes binaires compacts

- C'est la source connue d'OG la plus intéressante pour les détecteurs au sol LIGO/VIRGO et dans l'espace LISA
- La dynamique de ces systèmes est entièrement dictée par les **forces de réaction au rayonnement gravitationnel** qui rendent compte des pertes d'énergie par rayonnement gravitationnel
- La prédiction théorique pour la forme d'onde (patron d'onde) doit être extrêmement précise en terme d'un **développement post-newtonien** de la relativité générale
- Les formes d'onde post-newtoniennes pour le spiralement doivent être raccordées à des **calculs numériques** pour les phases de fusion et de vibration



Filtrage optimal du signal de spiralement

Dans la technique du filtrage optimal on corrèle la sortie bruitée du détecteur avec la **forme d'onde prédite par la théorie ou patron d'onde**



Le patron d'onde doit rester **en phase avec la forme d'onde exacte** aussi longtemps que possible. Si le signal et le patron acquièrent un décalage de phase la corrélation sera réduite de façon importante et on pourra perdre le signal

Schéma d'approximation en relativité générale

- L'effet dominant de la réaction de rayonnement gravitationnel apparaît à l'ordre $(v/c)^5$ par rapport à la force newtonienne, où v est la vitesse typique dans la source et c est la vitesse de la lumière

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\mathcal{F}_N}_{\text{force newtonienne}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{c^5} \mathcal{F}_{RR}}_{\text{réaction de rayonnement}} + \dots$$

À l'ordre dominant la force de réaction conduit à la formule du quadrupôle pour l'émission de rayonnement gravitationnel

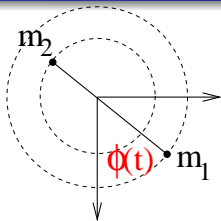
- Pendant la phase spiralante la dynamique évolue lentement

$$T_{RR} \gg T_{\text{orbital}}$$

avec un paramètre adiabatique petit dans un sens **post-newtonien**

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \mathcal{O} \left[\left(\frac{v}{c} \right)^5 \right]$$

Binaires compactes spiralantes: le paradis du théoricien



La phase orbitale $\phi(t)$ doit être prédite pour les détecteurs LIGO/VIRGO avec la précision

$$\delta\phi \sim \pi$$

$$\phi(t) = \phi_0 - \underbrace{\frac{1}{32\nu} \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{-5/3}}_{\text{résultat de la formule du quadrupôle (suffisant pour le pulsar binaire)}} \left\{ \underbrace{1 + \frac{1\text{PN}}{c^2} + \frac{1.5\text{PN}}{c^3} + \dots + \frac{3\text{PN}}{c^6} + \dots}_{\text{doit être calculé avec grande précision PN}} \right\}$$

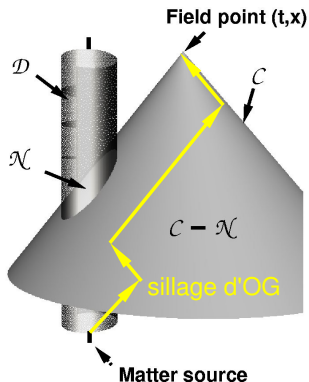
Des analyses du signal détaillées (utilisant la courbe de sensibilité des détecteurs LIGO/VIRGO) montrent que la précision requise est au moins **2PN pour la détection** et **3PN pour l'estimation des paramètres**

Le développement PN de la phase orbitale est donné par

$$\begin{aligned}
 \phi(\omega) = \phi_0 - \frac{1}{32\nu} \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{-5/3} & \left\{ 1 \right. \\
 & \underbrace{\left(\frac{3715}{1008} + \frac{55}{12}\nu \right) \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3}}_{1\text{PN}} \\
 & \underbrace{- 10\pi \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)}_{1.5\text{PN (sillage d'OG)}} \\
 & \left. + \underbrace{\left(\frac{15293365}{1016064} + \frac{27145}{1008}\nu + \frac{3085}{144}\nu^2 \right) \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{4/3}}_{2\text{PN}} + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{12348611926451}{18776862720}$$

Tester la relativité générale avec les signaux d'OG

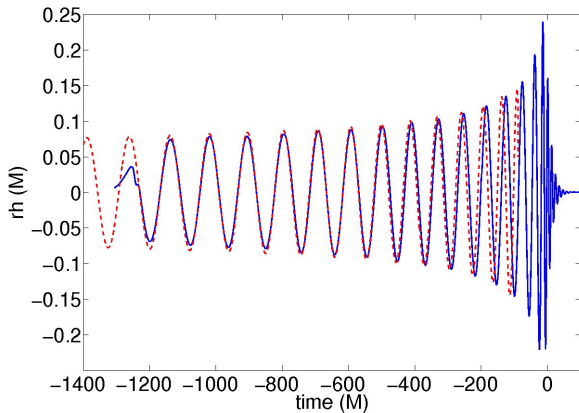


Les sillages sont produits par diffusion des OG sur la courbure de l'espace-temps produit par la masse totale M de la source même des ondes

$$\delta h_{ij}^{\text{tail}} = \frac{4G}{c^4 D} \underbrace{\frac{GM}{c^3} \int_{-\infty}^t dt' Q_{ij}(t') \ln \left(\frac{t - t'}{\tau_0} \right)}_{\text{Le sillage d'onde apparaît à l'ordre 1.5PN}} + \dots$$

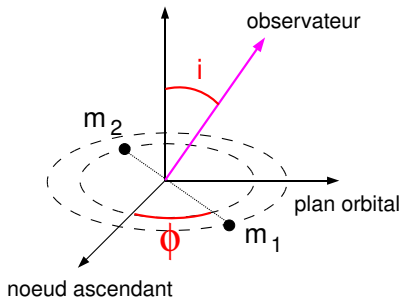
Le sillage d'onde apparaît à l'ordre 1.5PN

Raccorder les formes d'onde PN et numérique



La forme d'onde numérique pour la fusion des trous noirs est raccordée avec précision à la forme d'onde post-newtonienne connue à l'ordre

- 1 3.5PN dans la phase
- 2 3PN dans l'amplitude



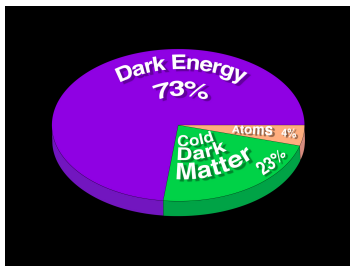
États de polarisation de l'OG d'un système binaire d'objets compacts

$$h_+ = \frac{2G\mu}{c^2 D_L} \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3} (1 + \cos^2 i) \cos(2\phi)$$

$$h_\times = \frac{2G\mu}{c^2 D_L} \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{2/3} (2 \cos i) \sin(2\phi)$$

La distance de la source D_L est mesurable dans le signal d'OG

Trous noirs supermassifs pour mesurer l'énergie noire



Les binaires de trous noirs supermassifs vont être observées par LISA jusqu'à des décalages cosmologiques z importants. Dans le modèle actuel de concordance en cosmologie la distance D_L est reliée à z par

$$D_L(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_M(1+z')^3 + \Omega_{DE}(1+z')^{3(1+w)}}$$

LISA va être capable de contraindre l'équation d'état de l'énergie noire $w = p_{DE}/\rho_{DE}$ à quelques pour-cents près