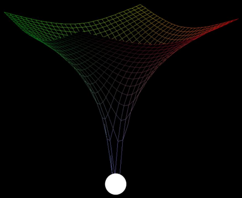
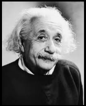
Introduction à l'espace-temps de la relativité générale par son versant mathématique

Denis Gialis

Astrophysicien



La géométrie de Gauss à Einstein...

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle...

▷ 1827 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Théorie des surfaces.

▷ 1854 - Bernhard Riemann (1826-1866) - Généralisation et fondement de la géométrie riemannienne.

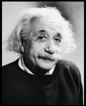
Au XX$^{\text{ème}}$ siècle...

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et Tullio Levi-Civita (1873-1941) - Développement du calcul tensoriel sur les variétés riemanniennes.

▷ 1913 - Hermann Weyl (1885-1955) - Définition moderne d'une variété.

▷ 1915 - Albert Einstein (1879-1955) - Conception de la relativité générale.

La géométrie de Gauss à Einstein...

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle...

▷ 1827 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Théorie des surfaces.

▷ 1854 - Bernhard Riemann (1826-1866) - Généralisation et fondement de la géométrie riemannienne.

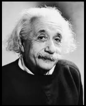
Au XX$^{\text{ème}}$ siècle...

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et Tullio Levi-Civita (1873-1941) - Développement du calcul tensoriel sur les variétés riemanniennes.

▷ 1913 - Hermann Weyl (1885-1955) - Définition moderne d'une variété.

▷ 1915 - Albert Einstein (1879-1955) - Conception de la relativité générale.

La géométrie de Gauss à Einstein...

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle...

▷ 1827 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Théorie des surfaces.

▷ 1854 - Bernhard Riemann (1826-1866) - Généralisation et fondement de la géométrie riemannienne.

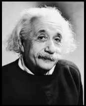
Au XX$^{\text{ème}}$ siècle...

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et Tullio Levi-Civita (1873-1941) - Développement du calcul tensoriel sur les variétés riemanniennes.

▷ 1913 - Hermann Weyl (1885-1955) - Définition moderne d'une variété.

▷ 1915 - Albert Einstein (1879-1955) - Conception de la relativité générale.

La géométrie de Gauss à Einstein...

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle...

▷ 1827 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Théorie des surfaces.

▷ 1854 - Bernhard Riemann (1826-1866) - Généralisation et fondement de la géométrie riemannienne.

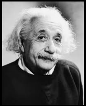
Au XX$^{\text{ème}}$ siècle...

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et Tullio Levi-Civita (1873-1941) - Développement du calcul tensoriel sur les variétés riemanniennes.

▷ 1913 - Hermann Weyl (1885-1955) - Définition moderne d'une variété.

▷ 1915 - Albert Einstein (1879-1955) - Conception de la relativité générale.

La géométrie de Gauss à Einstein...

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle...

▷ 1827 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - Théorie des surfaces.

▷ 1854 - Bernhard Riemann (1826-1866) - Généralisation et fondement de la géométrie riemannienne.

Au XX$^{\text{ème}}$ siècle...

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et Tullio Levi-Civita (1873-1941) - Développement du calcul tensoriel sur les variétés riemanniennes.

▷ 1913 - Hermann Weyl (1885-1955) - Définition moderne d'une variété.

▷ 1915 - Albert Einstein (1879-1955) - Conception de la relativité générale.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

"La notion générale variété est assez difficile à définir avec précision.", Elie Cartan.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

Une variété de dimension 4 est un espace topologique séparé, à base dénombrable, dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.

- ▷ Ensemble muni d'une topologie à base dénombrable.
  - ▷▷ Il contient des parties remarquables : les ouverts !
- ▷ Deux points distincts admettent deux voisinages distincts.
  - ▷▷ Unicité des limites, continuité, . . .
- ▷ Localement, la variété est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.
  - ▷▷ Utilisation de systèmes de coordonnées.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

Une variété de dimension 4 est un espace topologique séparé, à base dénombrable, dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.

- ▷ Ensemble muni d'une topologie à base dénombrable.
  - ▷▷ Il contient des parties remarquables : les ouverts !
- ▷ Deux points distincts admettent deux voisinages distincts.
  - ▷▷ Unicité des limites, continuité, ...
- ▷ Localement, la variété est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.
  - ▷▷ Utilisation de systèmes de coordonnées.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

Une variété de dimension 4 est un espace topologique séparé, à base dénombrable, dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.

- ▷ Ensemble muni d'une topologie à base dénombrable.
  - ▷▷ Il contient des parties remarquables : les ouverts !
- ▷ Deux points distincts admettent deux voisinages distincts.
  - ▷▷ Unicité des limites, continuité, ...
- ▷ Localement, la variété est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.
  - ▷▷ Utilisation de systèmes de coordonnées.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

Une variété de dimension 4 est un espace topologique séparé, à base dénombrable, dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.

▷ Ensemble muni d'une topologie à base dénombrable.
 ▷▷ Il contient des parties remarquables : les ouverts !

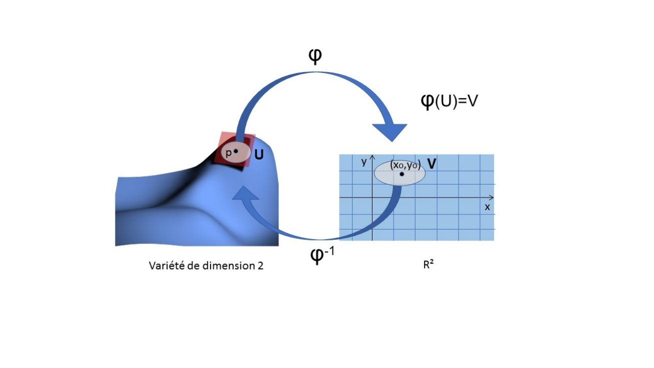
▷ Deux points distincts admettent deux voisinages distincts.
 ▷▷ Unicité des limites, continuité, ...

▷ Localement, la variété est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^4$.
 ▷▷ Utilisation de systèmes de coordonnées.

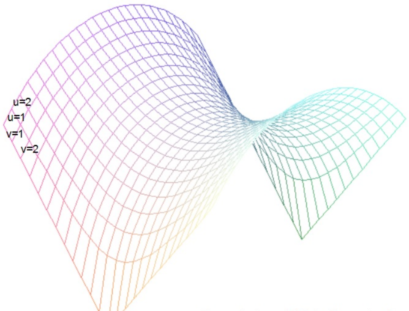
Homéomorphisme ? Une application *bicontinue*

$$\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^4 \; ; \; p \mapsto (x_i)_{i=1,\dots,4}$$

▷▷ Système de coordonnées locales.



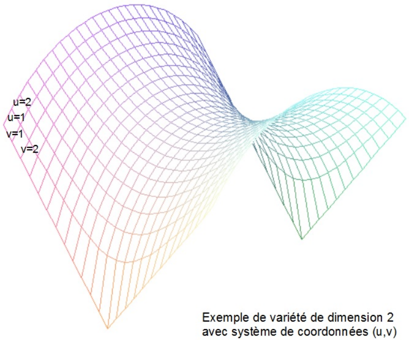
Autre représentation...



Exemple de variété de dimension 2
avec système de coordonnées (u,v)

▷ Pour l'espace-temps, il faut 4 coordonnées : 1 pour le temps et 3 pour l'espace.

Autre représentation...



▷ Pour l'espace-temps, il faut 4 coordonnées : 1 pour le temps et 3 pour l'espace.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

▷ Une **carte** de **domaine** U est un couple (U, φ).

▷ Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont **compatibles** lorsque l'application changement de carte

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

est un **difféomorphisme de classe** $\mathcal{C}^\infty$.

▷ Un **atlas** d'une variété $\mathcal{M}$ est un ensemble de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que $\cap_{k \in I} U_k = \mathcal{M}$ et, pour tous $i, j \in I$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

▷ Un atlas est **complet** lorsque toute carte compatible avec celles de l'atlas appartient à l'atlas.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

▷ Une carte de domaine U est un couple (U, φ).

▷ Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles lorsque l'application changement de carte

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$.

▷ Un atlas d'une variété $\mathcal{M}$ est un ensemble de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que $\cap_{k \in I} U_k = \mathcal{M}$ et, pour tous $i, j \in I$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

▷ Un atlas est complet lorsque toute carte compatible avec celles de l'atlas appartient à l'atlas.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

▷ Une carte de domaine U est un couple (U, φ).

▷ Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles lorsque l'application changement de carte

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$.

▷ Un atlas d'une variété $\mathcal{M}$ est un ensemble de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que $\cap_{k \in I} U_k = \mathcal{M}$ et, pour tous $i, j \in I$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

▷ Un atlas est complet lorsque toute carte compatible avec celles de l'atlas appartient à l'atlas.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

▷ Une carte de domaine U est un couple (U, φ).

▷ Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles lorsque l'application changement de carte

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$.

▷ Un atlas d'une variété $\mathcal{M}$ est un ensemble de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que $\cap_{k \in I} U_k = \mathcal{M}$ et, pour tous $i, j \in I$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

▷ Un atlas est complet lorsque toute carte compatible avec celles de l'atlas appartient à l'atlas.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

▷ Une carte de domaine U est un couple (U, φ).

▷ Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles lorsque l'application changement de carte

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$.

▷ Un atlas d'une variété $\mathcal{M}$ est un ensemble de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que $\cap_{k\in I} U_k = \mathcal{M}$ et, pour tous $i, j \in I$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

▷ Un atlas est complet lorsque toute carte compatible avec celles de l'atlas appartient à l'atlas.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

▷ Une variété lisse de dimension 4 est une variété munie d'un atlas complet.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

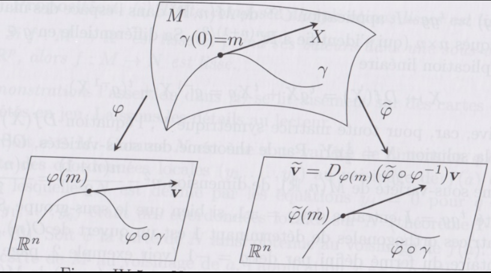
▷ Une variété lisse de dimension 4 est une variété munie d'un atlas complet.

ÉTAPE 1 - Une définition de l'espace-temps

Postulat - L'espace-temps est une variété connexe lisse de dimension 4 munie d'une métrique lorentzienne.

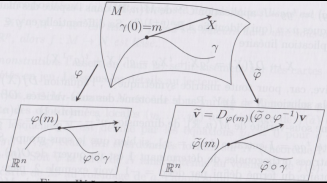
Une métrique ? ? Attendons encore un peu...

ÉTAPE 2 - Espaces tangents et changements de coordonnées



(D'après F. Rouvière, *Initiation à la géométrie de Riemann*, 2016, Éd. Calvage & Mounet.)

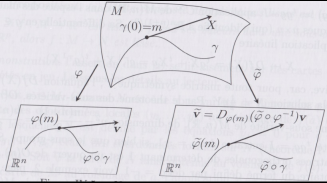
ÉTAPE 2 - Espaces tangents et changements de coordonnées



▷ L'espace tangent en m, noté $T_m(\mathcal{M})$, est formé par l'ensemble des vecteurs tangents à toutes les courbes de $\mathcal{M}$ passant par m.

▷ L'espace tangent est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

ÉTAPE 2 - Espaces tangents et changements de coordonnées



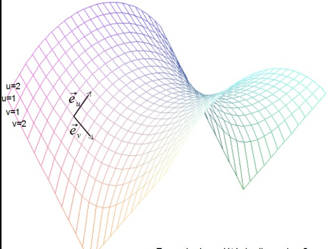
▷ L'espace tangent en m, noté $T_m(\mathcal{M})$, est formé par l'ensemble des vecteurs tangents à toutes les courbes de $\mathcal{M}$ passant par m.

▷ L'espace tangent est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

ÉTAPE 2 - Espaces tangents et changements de coordonnées

Base naturelle de $T_m(\mathcal{M})$ = base formée par les vecteurs tangents aux lignes coordonnées.

Changement de coordonnées $\Leftrightarrow$ Changement de base naturelle



Exemple de variété de dimension 2
avec système de coordonnées (u,v)

Changement de base naturelle -
Soient $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n\}$ deux systèmes de coordonnées, et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ leurs bases naturelles respectives. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\tilde{e}_j = \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_j}\, e_j.$$

Un même vecteur exprimé dans deux bases naturelles différentes - A tout vecteur X de $T_m(\mathcal{M})$, on associe un vecteur $v = (v^1, \ldots, v^n)$ de $\mathbb{R}^n$ qui devient, par un changement de coordonnées $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^n)$ avec, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, v^i.$$

ÉTAPE 3 - La métrique

Une métrique sur une variété $\mathcal{M}$ est une application g qui, à tout point m de $\mathcal{M}$, associe une forme bilinéaire, notée g_m, symétrique et non-dégénérée définie sur $T_m(\mathcal{M})$.
▷▷ C'est un pseudo-produit scalaire.

▷ Munie d'une métrique, $\mathcal{M}$ est une variété pseudo-riemannienne.

▷ Si la métrique est définie positive, alors $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne.

▷ Si la signature de la forme bilinéaire est $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$, alors $\mathcal{M}$ est une variété lorentzienne. ▷▷ C'est le cas de l'espace-temps !

ÉTAPE 3 - La métrique

Une métrique sur une variété $\mathcal{M}$ est une application g qui, à tout point m de $\mathcal{M}$, associe une forme bilinéaire, notée g_m, symétrique et non-dégénérée définie sur $T_m(\mathcal{M})$.
▷▷ C'est un pseudo-produit scalaire.

▷ Munie d'une métrique, $\mathcal{M}$ est une variété pseudo-riemannienne.

▷ Si la métrique est définie positive, alors $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne.

▷ Si la signature de la forme bilinéaire est $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$, alors $\mathcal{M}$ est une variété lorentzienne. ▷▷ C'est le cas de l'espace-temps !

ÉTAPE 3 - La métrique

Une métrique sur une variété $\mathcal{M}$ est une application g qui, à tout point m de $\mathcal{M}$, associe une forme bilinéaire, notée g_m, symétrique et non-dégénérée définie sur $T_m(\mathcal{M})$.
▷▷ C'est un pseudo-produit scalaire.

▷ Munie d'une métrique, $\mathcal{M}$ est une variété pseudo-riemannienne.

▷ Si la métrique est définie positive, alors $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne.

▷ Si la signature de la forme bilinéaire est $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$, alors $\mathcal{M}$ est une variété lorentzienne. ▷▷ C'est le cas de l'espace-temps !

ÉTAPE 3 - La métrique

Une métrique sur une variété $\mathcal{M}$ est une application g qui, à tout point m de $\mathcal{M}$, associe une forme bilinéaire, notée g_m, symétrique et non-dégénérée définie sur $T_m(\mathcal{M})$.
▷▷ C'est un pseudo-produit scalaire.

▷ Munie d'une métrique, $\mathcal{M}$ est une variété pseudo-riemannienne.

▷ Si la métrique est définie positive, alors $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne.

▷ Si la signature de la forme bilinéaire est $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$, alors $\mathcal{M}$ est une variété lorentzienne. ▷▷ C'est le cas de l'espace-temps !

ÉTAPE 3 - La métrique

Une métrique sur une variété $\mathcal{M}$ est une application g qui, à tout point m de $\mathcal{M}$, associe une forme bilinéaire, notée g_m, symétrique et non-dégénérée définie sur $T_m(\mathcal{M})$.
▷▷ C'est un pseudo-produit scalaire.

▷ Munie d'une métrique, $\mathcal{M}$ est une variété pseudo-riemannienne.

▷ Si la métrique est définie positive, alors $\mathcal{M}$ est une variété riemannienne.

▷ Si la signature de la forme bilinéaire est $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$, alors $\mathcal{M}$ est une variété lorentzienne. ▷▷ C'est le cas de l'espace-temps !

ÉTAPE 3 - La métrique

Expression de la métrique - Soient une métrique g_m et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base naturelle en un point m. Pour tous $u = u^i\, e_i$, $v = v^i\, e_i$ de $T_m(\mathcal{M})$;

$$g_m(u, v) = g_{ij}\, u^i\, v^j,$$

avec les composantes du tenseur métrique définies par

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

A la métrique g_m, on associe la forme quadratique $u \mapsto g_m(u, u)$.

▷ Carré de la distance entre deux points P et Q infiniment proches de $\mathcal{M}$ autour de m ;

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

avec $\overrightarrow{PQ} = (\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n)$. ▷▷ C'est un invariant par changement de coordonnées.

ÉTAPE 3 - La métrique

Expression de la métrique - Soient une métrique g_m et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base naturelle en un point m. Pour tous $u = u^i\, e_i$, $v = v^i\, e_i$ de $T_m(\mathcal{M})$;

$$g_m(u, v) = g_{ij}\, u^i\, v^j,$$

avec les composantes du tenseur métrique définies par

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

A la métrique g_m, on associe la forme quadratique $u \mapsto g_m(u, u)$.

▷ Carré de la distance entre deux points P et Q infiniment proches de $\mathcal{M}$ autour de m ;

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

avec $\overrightarrow{PQ} = (\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n)$. ▷▷ C'est un invariant par changement de coordonnées.

ÉTAPE 3 - La métrique

Expression de la métrique - Soient une métrique g_m et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base naturelle en un point m. Pour tous $u = u^i\, e_i$, $v = v^i\, e_i$ de $T_m(\mathcal{M})$;

$$g_m(u, v) = g_{ij}\, u^i\, v^j,$$

avec les composantes du tenseur métrique définies par

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

A la métrique g_m, on associe la forme quadratique $u \mapsto g_m(u, u)$.

▷ Carré de la distance entre deux points P et Q infiniment proches de $\mathcal{M}$ autour de m ;

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

avec $\overrightarrow{PQ} = (\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n)$. ▷▷ C'est un invariant par changement de coordonnées.

ÉTAPE 3 - La métrique

Expression de la métrique - Soient une métrique g_m et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base naturelle en un point m. Pour tous $u = u^i\, e_i$, $v = v^i\, e_i$ de $T_m(\mathcal{M})$;

$$g_m(u, v) = g_{ij}\, u^i\, v^j,$$

avec les composantes du tenseur métrique définies par

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

A la métrique g_m, on associe la forme quadratique $u \mapsto g_m(u, u)$.

▷ Carré de la distance entre deux points P et Q infiniment proches de $\mathcal{M}$ autour de m ;

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

avec $\overrightarrow{PQ} = (\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n)$. ▷▷ C'est un invariant par changement de coordonnées.

ÉTAPE 3 - La métrique

▷ Théorème de diagonalisation -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$. Il existe une base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$ orthonormée pour g_m.

▷▷ Il existe un système de coordonnées $\{x^1, \dots x^n\}$ dans un voisinage de m tel que

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij}\,(\mathrm{d}x^i)^2, \qquad \text{avec } (\eta_{ij}) = diag(\pm 1, \dots, \pm 1).$$

▷ Théorème d'inertie de Sylvester -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$ de dimension n. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que, dans toute base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$, orthogonale pour g_m, la matrice diagonale de g_m est formée de p réels strictement positifs, q réels strictement négatifs, et $n - p - q$ zéros.

▷▷ Le couple (p, q) est la signature de la métrique .

▷▷ La signature est invariante par changement de bases.

ÉTAPE 3 - La métrique

▷ Théorème de diagonalisation -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$. Il existe une base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$ orthonormée pour g_m.

▷▷ Il existe un système de coordonnées $\{x^1, \ldots x^n\}$ dans un voisinage de m tel que

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij}\,(\mathrm{d}x^i)^2\,, \qquad \text{avec } (\eta_{ij}) = diag(\pm 1, \ldots, \pm 1).$$

▷ Théorème d'inertie de Sylvester -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$ de dimension n. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que, dans toute base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$, orthogonale pour g_m, la matrice diagonale de g_m est formée de p réels strictement positifs, q réels strictement négatifs, et $n - p - q$ zéros.

▷▷ Le couple (p, q) est la signature de la métrique .

▷▷ La signature est invariante par changement de bases.

ÉTAPE 3 - La métrique

▷ Théorème de diagonalisation -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$. Il existe une base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$ orthonormée pour g_m.

▷▷ Il existe un système de coordonnées $\{x^1, \dots x^n\}$ dans un voisinage de m tel que

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij}\,(\mathrm{d}x^i)^2\,, \qquad \text{avec } (\eta_{ij}) = diag(\pm 1, \dots, \pm 1).$$

▷ Théorème d'inertie de Sylvester -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$ de dimension n. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que, dans toute base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$, orthogonale pour g_m, la matrice diagonale de g_m est formée de p réels strictement positifs, q réels strictement négatifs, et $n - p - q$ zéros.

▷▷ Le couple (p, q) est la signature de la métrique .

▷▷ La signature est invariante par changement de bases.

ÉTAPE 3 - La métrique

▷ Théorème de diagonalisation -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$. Il existe une base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$ orthonormée pour g_m.

▷▷ Il existe un système de coordonnées $\{x^1, \dots x^n\}$ dans un voisinage de m tel que

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij}\,(\mathrm{d}x^i)^2\,, \qquad \text{avec } (\eta_{ij}) = diag(\pm 1, \dots, \pm 1).$$

▷ Théorème d'inertie de Sylvester -
Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$ de dimension n. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que, dans toute base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$, orthogonale pour g_m, la matrice diagonale de g_m est formée de p réels strictement positifs, q réels strictement négatifs, et $n - p - q$ zéros.

▷▷ Le couple (p, q) est la signature de la métrique .

▷▷ La signature est invariante par changement de bases.

ÉTAPE 3 - La métrique

▷ Théorème de diagonalisation -

Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$. Il existe une base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$ orthonormée pour g_m.

▷▷ Il existe un système de coordonnées $\{x^1, \ldots x^n\}$ dans un voisinage de m tel que

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ij}\,(\mathrm{d}x^i)^2\,, \qquad \text{avec } (\eta_{ij}) = diag(\pm 1, \ldots, \pm 1).$$

▷ Théorème d'inertie de Sylvester -

Soit une métrique g_m en un point m de $\mathcal{M}$ de dimension n. Il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que, dans toute base de vecteurs de $T_m(\mathcal{M})$, orthogonale pour g_m, la matrice diagonale de g_m est formée de p réels strictement positifs, q réels strictement négatifs, et $n - p - q$ zéros.

▷▷ Le couple (p, q) est la signature de la métrique .

▷▷ La signature est invariante par changement de bases.

ÉTAPE 3 - La métrique

L'espace-temps est muni d'une métrique dont la signature est $(+,-,-,-)$. ▷ C'est une métrique lorentzienne.

Nature de l'espace tangent - En tout point de l'espace-temps, l'espace tangent est un espace de Minkowski : il existe $\{t, x, y, z\}$ tel que

$$\mathrm{d}s^2 = (c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.$$

Trois types de vecteurs -

Un (quadri-)vecteur u de l'espace-temps est

▷ du genre temps lorsque $g(u,u) > 0$,

▷ du genre espace lorsque $g(u,u) < 0$,

▷ du genre lumière ou nul lorsque $g(u,u) = 0$.

ÉTAPE 3 - La métrique

L'espace-temps est muni d'une métrique dont la signature est $(+,-,-,-)$. ▷ C'est une métrique lorentzienne.

Nature de l'espace tangent - En tout point de l'espace-temps, l'espace tangent est un espace de Minkowski : il existe $\{t, x, y, z\}$ tel que

$$\mathrm{d}s^2 = (c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.$$

Trois types de vecteurs -

Un (quadri-)vecteur u de l'espace-temps est

▷ du genre temps lorsque $g(u,u) > 0$,

▷ du genre espace lorsque $g(u,u) < 0$,

▷ du genre lumière ou nul lorsque $g(u,u) = 0$.

ÉTAPE 3 - La métrique

L'espace-temps est muni d'une métrique dont la signature est $(+,-,-,-)$. $\triangleright$ C'est une métrique lorentzienne.

Nature de l'espace tangent - En tout point de l'espace-temps, l'espace tangent est un espace de Minkowski : il existe $\{t, x, y, z\}$ tel que

$$\mathrm{d}s^2 = (c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.$$

Trois types de vecteurs -

Un (quadri-)vecteur u de l'espace-temps est

$\triangleright$ du genre temps lorsque $g(u,u) > 0$,

$\triangleright$ du genre espace lorsque $g(u,u) < 0$,

$\triangleright$ du genre lumière ou nul lorsque $g(u,u) = 0$.

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Comment comparer des vecteurs qui n'appartiennent pas au même espace tangent ?

▷ On a besoin d'une connexion !

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

$$\nabla_X Y \Leftrightarrow \text{Dérivée de } Y \text{ selon la direction de } X.$$

En dimension n, une connexion est définie par n^3 fonctions Γ^k_{ij}, les **symboles de Christoffel** tels que, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij}\, e_k .$$

et

$$\nabla_X Y = X^j \left[\frac{\mathrm{d} Y^k}{\mathrm{d} x^j} + \Gamma^k_{ij}\, Y^i \right] e_k$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Comment comparer des vecteurs qui n'appartiennent pas au même espace tangent ?

▷ On a besoin d'une connexion !

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

$$\nabla_X Y \Leftrightarrow \text{Dérivée de } Y \text{ selon la direction de } X.$$

En dimension n, une connexion est définie par n^3 fonctions Γ^k_{ij}, les **symboles de Christoffel** tels que, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij}\, e_k\,.$$

et

$$\nabla_X Y = X^j \left[\frac{\mathrm{d}Y^k}{\mathrm{d}x^j} + \Gamma^k_{ij}\, Y^i \right] e_k$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Comment comparer des vecteurs qui n'appartiennent pas au même espace tangent ?

▷ On a besoin d'une connexion !

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

$\nabla_X Y \Leftrightarrow$ Dérivée de Y selon la direction de X.

En dimension n, une connexion est définie par n^3 fonctions Γ^k_{ij}, les symboles de Christoffel tels que, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij}\, e_k\,.$$

et

$$\nabla_X Y = X^j \left[\frac{\mathrm{d}Y^k}{\mathrm{d}x^j} + \Gamma^k_{ij}\, Y^i \right] e_k$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Comment comparer des vecteurs qui n'appartiennent pas au même espace tangent ?

▷ On a besoin d'une connexion !

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

$$\nabla_X Y \Leftrightarrow \text{Dérivée de } Y \text{ selon la direction de } X.$$

En dimension n, une connexion est définie par n^3 fonctions Γ^k_{ij}, les symboles de Christoffel tels que, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij}\, e_k.$$

et

$$\nabla_X Y = X^j \left[\frac{\mathrm{d} Y^k}{\mathrm{d} x^j} + \Gamma^k_{ij}\, Y^i \right] e_k$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Le transport parallèle - Si $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = m$ est un chemin lisse de M et si $X = \gamma'(\lambda)$ alors la dérivée covariante le long de γ est l'unique application $Y \mapsto \nabla Y / \mathrm{d}\lambda$ telle que

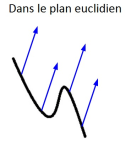
$$\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'(\lambda)} Y(m).$$

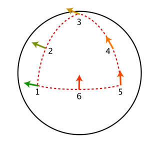
Le champ Y est parallèle le long de γ si $\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} \equiv 0$.

Si Y_0 est tangent à M au point $\gamma(\lambda_0)$ d'un chemin lisse de M, alors il existe un unique champ de vecteur Y parallèle le long de γ tel que $Y(\lambda_0) = Y_0$.

▷ L'application $Y_0 \mapsto Y(\lambda)$ est le transport parallèle le long de γ.

▷▷ C'est un isomorphisme entre $T_{\gamma(\lambda_0)}(M)$ sur $T_{\gamma(\lambda)}(M)$.





▷▷ Manifestation de la courbure !

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Le transport parallèle - Si $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = m$ est un chemin lisse de M et si $X = \gamma'(\lambda)$ alors la dérivée covariante le long de γ est l'unique application $Y \mapsto \nabla Y / \mathrm{d}\lambda$ telle que

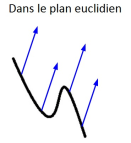
$$\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'(\lambda)} Y(m).$$

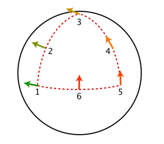
Le champ Y est parallèle le long de γ si $\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} \equiv 0$.

Si Y_0 est tangent à M au point $\gamma(\lambda_0)$ d'un chemin lisse de M, alors il existe un unique champ de vecteur Y parallèle le long de γ tel que $Y(\lambda_0) = Y_0$.

▷ L'application $Y_0 \mapsto Y(\lambda)$ est le transport parallèle le long de γ.

▷▷ C'est un isomorphisme entre $T_{\gamma(\lambda_0)}(M)$ sur $T_{\gamma(\lambda)}(M)$.





▷▷ Manifestation de la courbure !

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Le transport parallèle - Si $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = m$ est un chemin lisse de M et si $X = \gamma'(\lambda)$ alors la dérivée covariante le long de γ est l'unique application $Y \mapsto \nabla Y / \mathrm{d}\lambda$ telle que

$$\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'(\lambda)} Y(m).$$

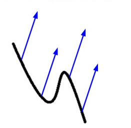
Le champ Y est parallèle le long de γ si $\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} \equiv 0$.

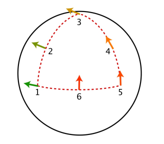
Si Y_0 est tangent à M au point $\gamma(\lambda_0)$ d'un chemin lisse de M, alors il existe un unique champ de vecteur Y parallèle le long de γ tel que $Y(\lambda_0) = Y_0$.

▷ L'application $Y_0 \mapsto Y(\lambda)$ est le transport parallèle le long de γ.

▷▷ C'est un isomorphisme entre $T_{\gamma(\lambda_0)}(M)$ sur $T_{\gamma(\lambda)}(M)$.

Dans le plan euclidien





▷▷ Manifestation de la courbure !

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

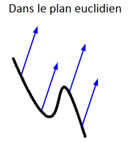
Le transport parallèle - Si $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = m$ est un chemin lisse de M et si $X = \gamma'(\lambda)$ alors la dérivée covariante le long de γ est l'unique application $Y \mapsto \nabla Y / \mathrm{d}\lambda$ telle que

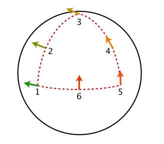
$$\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'(\lambda)} Y(m).$$

Le champ Y est parallèle le long de γ si $\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} \equiv 0$.

Si Y_0 est tangent à M au point $\gamma(\lambda_0)$ d'un chemin lisse de M, alors il existe un unique champ de vecteur Y parallèle le long de γ tel que $Y(\lambda_0) = Y_0$.

- ▷ L'application $Y_0 \mapsto Y(\lambda)$ est le transport parallèle le long de γ.
  - ▷▷ C'est un isomorphisme entre $T_{\gamma(\lambda_0)}(M)$ sur $T_{\gamma(\lambda)}(M)$.





▷▷ Manifestation de la courbure !

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

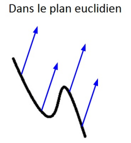
Le transport parallèle - Si $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = m$ est un chemin lisse de M et si $X = \gamma'(\lambda)$ alors la dérivée covariante le long de γ est l'unique application $Y \mapsto \nabla Y / \mathrm{d}\lambda$ telle que

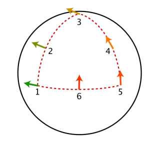
$$\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'(\lambda)} Y(m).$$

Le champ Y est parallèle le long de γ si $\frac{\nabla Y}{\mathrm{d}\lambda} \equiv 0$.

Si Y_0 est tangent à M au point $\gamma(\lambda_0)$ d'un chemin lisse de M, alors il existe un unique champ de vecteur Y parallèle le long de γ tel que $Y(\lambda_0) = Y_0$.

- ▷ L'application $Y_0 \mapsto Y(\lambda)$ est le transport parallèle le long de γ.
  - ▷▷ C'est un isomorphisme entre $T_{\gamma(\lambda_0)}(M)$ sur $T_{\gamma(\lambda)}(M)$.





▷▷ Manifestation de la courbure !

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Lien entre la connexion et la métrique -

(1) Une connexion ∇ et une métrique g sont compatibles lorsque pour tout chemin γ et tous champs de vecteurs X et Y sur M, on a

$$g_{\gamma(\lambda)}(X, Y) = \text{constante}, \quad \forall \lambda.$$

(2) Une connexion ∇ est symétrique si, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i.$$

Théorème d'unicité - Sur (M, g), il existe une unique connexion symétrique et compatible avec g, c'est la connexion de Levi-Civita.

Pour cette connexion,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}\right).$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Lien entre la connexion et la métrique -

(1) Une connexion ∇ et une métrique g sont compatibles lorsque pour tout chemin γ et tous champs de vecteurs X et Y sur M, on a

$$g_{\gamma(\lambda)}(X, Y) = \text{constante}, \quad \forall \lambda.$$

(2) Une connexion ∇ est symétrique si, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i.$$

Théorème d'unicité - Sur (M, g), il existe une unique connexion symétrique et compatible avec g, c'est la connexion de Levi-Civita.

Pour cette connexion,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij} \right).$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Lien entre la connexion et la métrique -

(1) Une connexion ∇ et une métrique g sont compatibles lorsque pour tout chemin γ et tous champs de vecteurs X et Y sur M, on a

$$g_{\gamma(\lambda)}(X, Y) = \text{constante}, \quad \forall \lambda.$$

(2) Une connexion ∇ est symétrique si, pour tous vecteurs e_i et e_j de la base naturelle,

$$\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i.$$

Théorème d'unicité - Sur (M, g), il existe une unique connexion symétrique et compatible avec g, c'est la connexion de Levi-Civita.

Pour cette connexion,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{k\ell}\,(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Qu'est-ce qu'une géodésique ?

Un arc lisse $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ sur M est une géodésique lorsque $\gamma'(\lambda) \neq 0$ pour tout λ et que

$$\frac{\nabla \gamma'}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0.$$

▷ Localement, c'est le chemin le plus court entre deux points !

Si $\gamma(\lambda) = (x^i(\lambda))$ alors l'équation des géodésiques s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Qu'est-ce qu'une géodésique ?

Un arc lisse $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ sur M est une géodésique lorsque $\gamma'(\lambda) \neq 0$ pour tout λ et que

$$\frac{\nabla \gamma'}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

▷ Localement, c'est le chemin le plus court entre deux points !

Si $\gamma(\lambda) = (x^i(\lambda))$ alors l'équation des géodésiques s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

ÉTAPE 4 - De la connexion aux géodésiques

Qu'est-ce qu'une géodésique ?

Un arc lisse $\gamma : \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ sur M est une géodésique lorsque $\gamma'(\lambda) \neq 0$ pour tout λ et que

$$\frac{\nabla \gamma'}{\mathrm{d}\lambda} = \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0.$$

▷ Localement, c'est le chemin le plus court entre deux points !

Si $\gamma(\lambda) = (x^i(\lambda))$ alors l'équation des géodésiques s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

Conclusion - Retour à la physique (1/2)

(1) Un point de la variété espace-temps $\mathcal{E}$ est appelé événement.

(2) Les vecteurs, et plus généralement les tenseurs, agissent dans les espaces tangents à $\mathcal{E}$.

(3) Les particules suivent des arcs lisses de $\mathcal{E}$ appelées lignes d'univers. Elles sont du genre temps si $m \neq 0$, et du genre lumière si $m = 0$ (photon).

(4) Un observateur (autre qu'un photon !) paramètre sa ligne d'univers par son temps propre noté τ. Entre deux points P et P' infiniment voisins de sa ligne d'univers,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'}).$$

Entre deux points A et B, le durée propre mesurée sera

$$\Delta\tau(A, B) = \frac{1}{c} \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{g(u, u)}\, \mathrm{d}\tau,$$

avec $u = (u^i) = \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right)$ la vitesse propre de l'observateur.

Conclusion - Retour à la physique (1/2)

(1) Un point de la variété espace-temps $\mathcal{E}$ est appelé événement.

(2) Les vecteurs, et plus généralement les tenseurs, agissent dans les espaces tangents à $\mathcal{E}$.

(3) Les particules suivent des arcs lisses de $\mathcal{E}$ appelées lignes d'univers. Elles sont du genre temps si $m \neq 0$, et du genre lumière si $m = 0$ (photon).

(4) Un observateur (autre qu'un photon !) paramètre sa ligne d'univers par son temps propre noté τ. Entre deux points P et P' infiniment voisins de sa ligne d'univers,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'}).$$

Entre deux points A et B, le durée propre mesurée sera

$$\Delta\tau(A, B) = \frac{1}{c} \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{g(u, u)}\, \mathrm{d}\tau,$$

avec $u = (u^i) = \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right)$ la vitesse propre de l'observateur.

Conclusion - Retour à la physique (1/2)

(1) Un point de la variété espace-temps $\mathcal{E}$ est appelé événement.

(2) Les vecteurs, et plus généralement les tenseurs, agissent dans les espaces tangents à $\mathcal{E}$.

(3) Les particules suivent des arcs lisses de $\mathcal{E}$ appelées lignes d'univers. Elles sont du genre temps si $m \neq 0$, et du genre lumière si $m = 0$ (photon).

(4) Un observateur (autre qu'un photon !) paramètre sa ligne d'univers par son temps propre noté τ. Entre deux points P et P' infiniment voisins de sa ligne d'univers,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'}).$$

Entre deux points A et B, le durée propre mesurée sera

$$\Delta\tau(A, B) = \frac{1}{c} \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{g(u, u)}\, \mathrm{d}\tau,$$

avec $u = (u^i) = \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \right)$ la vitesse propre de l'observateur.

Conclusion - Retour à la physique (1/2)

(1) Un point de la variété espace-temps $\mathcal{E}$ est appelé événement.

(2) Les vecteurs, et plus généralement les tenseurs, agissent dans les espaces tangents à $\mathcal{E}$.

(3) Les particules suivent des arcs lisses de $\mathcal{E}$ appelées lignes d'univers. Elles sont du genre temps si $m \neq 0$, et du genre lumière si $m = 0$ (photon).

(4) Un observateur (autre qu'un photon !) paramètre sa ligne d'univers par son temps propre noté τ. Entre deux points P et P' infiniment voisins de sa ligne d'univers,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'}).$$

Entre deux points A et B, le durée propre mesurée sera

$$\Delta\tau(A,B) = \frac{1}{c}\int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{g(u,u)}\,\mathrm{d}\tau,$$

avec $u = (u^i) = \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right)$ la vitesse propre de l'observateur.

Conclusion - Retour à la physique (1/2)

(1) Un point de la variété espace-temps $\mathcal{E}$ est appelé événement.

(2) Les vecteurs, et plus généralement les tenseurs, agissent dans les espaces tangents à $\mathcal{E}$.

(3) Les particules suivent des arcs lisses de $\mathcal{E}$ appelées lignes d'univers. Elles sont du genre temps si $m \neq 0$, et du genre lumière si $m = 0$ (photon).

(4) Un observateur (autre qu'un photon !) paramètre sa ligne d'univers par son temps propre noté τ. Entre deux points P et P' infiniment voisins de sa ligne d'univers,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'}).$$

Entre deux points A et B, le durée propre mesurée sera

$$\Delta\tau(A, B) = \frac{1}{c} \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{g(u, u)}\, \mathrm{d}\tau,$$

avec $u = (u^i) = \left(\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \right)$ la vitesse propre de l'observateur.

Conclusion - Retour à la physique (2/2)

(5) Un photon suit toujours une géodésique de genre lumière (et ne peut être paramétrée par son temps propre) :

$$\mathrm{d}s^2 = 0.$$

▷ La longueur spatio-temporelle de la géodésique est nulle.

(6) L'ensemble des géodésiques nulles passant par un point de l'espace-temps forment le cône isotrope associé à la métrique ou cône de lumière.

Pour aller plus loin, il faut...

(1) caractériser la courbure ▷ les tenseurs de Riemann et d'Einstein,

(2) connaître la métrique en la reliant au contenu énergétique de l'espace-temps !

▷ C'est l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}$

Conclusion - Retour à la physique (2/2)

(5) Un photon suit toujours une géodésique de genre lumière (et ne peut être paramétrée par son temps propre) :

$$\mathrm{d}s^2 = 0.$$

▷ La longueur spatio-temporelle de la géodésique est nulle.

(6) L'ensemble des géodésiques nulles passant par un point de l'espace-temps forment le cône isotrope associé à la métrique ou cône de lumière.

Pour aller plus loin, il faut...

(1) caractériser la courbure ▷ les tenseurs de Riemann et d'Einstein,

(2) connaître la métrique en la reliant au contenu énergétique de l'espace-temps !

▷ C'est l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}$

Conclusion - Retour à la physique (2/2)

(5) Un photon suit toujours une géodésique de genre lumière (et ne peut être paramétrée par son temps propre) :

$$\mathrm{d}s^2 = 0.$$

▷ La longueur spatio-temporelle de la géodésique est nulle.

(6) L'ensemble des géodésiques nulles passant par un point de l'espace-temps forment le cône isotrope associé à la métrique ou cône de lumière.

Pour aller plus loin, il faut...

(1) caractériser la courbure ▷ les tenseurs de Riemann et d'Einstein,

(2) connaître la métrique en la reliant au contenu énergétique de l'espace-temps !

▷ C'est l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}$

Conclusion - Retour à la physique (2/2)

(5) Un photon suit toujours une géodésique de genre lumière (et ne peut être paramétrée par son temps propre) :

$$\mathrm{d}s^2 = 0.$$

▷ La longueur spatio-temporelle de la géodésique est nulle.

(6) L'ensemble des géodésiques nulles passant par un point de l'espace-temps forment le cône isotrope associé à la métrique ou cône de lumière.

Pour aller plus loin, il faut...

(1) caractériser la courbure ▷ les tenseurs de Riemann et d'Einstein,

(2) connaître la métrique en la reliant au contenu énergétique de l'espace-temps !

▷ C'est l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}$

Conclusion - Retour à la physique (2/2)

(5) Un photon suit toujours une géodésique de genre lumière (et ne peut être paramétrée par son temps propre) :

$$\mathrm{d}s^2 = 0.$$

▷ La longueur spatio-temporelle de la géodésique est nulle.

(6) L'ensemble des géodésiques nulles passant par un point de l'espace-temps forment le cône isotrope associé à la métrique ou cône de lumière.

Pour aller plus loin, il faut...

(1) caractériser la courbure ▷ les tenseurs de Riemann et d'Einstein,

(2) connaître la métrique en la reliant au contenu énergétique de l'espace-temps !

▷ C'est l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}$

Conclusion - Retour à la physique (2/2)

(5) Un photon suit toujours une géodésique de genre lumière (et ne peut être paramétrée par son temps propre) :

$$\mathrm{d}s^2 = 0.$$

▷ La longueur spatio-temporelle de la géodésique est nulle.

(6) L'ensemble des géodésiques nulles passant par un point de l'espace-temps forment le cône isotrope associé à la métrique ou cône de lumière.

Pour aller plus loin, il faut...

(1) caractériser la courbure ▷ les tenseurs de Riemann et d'Einstein,

(2) connaître la métrique en la reliant au contenu énergétique de l'espace-temps !

▷ C'est l'équation d'Einstein : $G_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}\,T_{\mu\,\nu}$