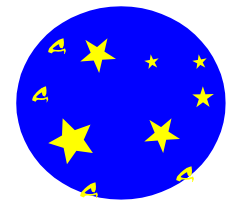


équations fondamentales de la cosmologie

plan



- I. **Principes de la Relativité générale**
 - a. Univers d'Einstein
 - b. Équation de la relativité générale
- II. **Équations de Friedmann**
 - a. Métrique de Robertson Walker
 - b. Équations de Friedmann
- III. **Modèles cosmologiques de l'univers**
 - a. 1917 - Modèle d'Einstein
 - b. 1917 – Modèle statique de De Sitter
 - c. 1922 - Modèles de Friedmann
fermé : $k = 1$ ouvert : $k = -1$
 - d. 1927 - Modèles de Lemaitre – Eddington
courbure $+ 1$
 - e. 1932 - Modèle Euclidien Einstein de Sitter
 - f. Récemment : Modèle anti - de Sitter

IV. **Le fluide cosmique : équation d'état**

v. **Relations : $\Omega_M + \Omega_k + \Omega_\lambda = 1$**

$$q = \frac{1}{2} (\Omega_M + \Omega_p) - \Omega_\lambda$$

Principes de la Cosmologie

On se situe dans l'espace-temps (E.T.)

On ne peut observer que le passé, compte-tenu de la vitesse finie de la lumière.

Observer l'Univers, c'est remonter dans le temps.

- On suppose que l'Univers est :
 - Homogène (uniforme)
 - Isotrope à grande échelle
- Les Lois de la physique sont les mêmes en tout point de l'Univers
 - En a-t-il été ainsi dans toute son histoire ?
- La structure géométrique globale de l'Univers fait appel aux théories de la relativité restreinte (R.R.) et générale (R.G.)

Nécessité de proposer un modèle (Univers statique ou expansion)

I. Principe de la relativité générale

a. Univers statique d'Einstein

Einstein établit l'équation générale qui régit l'Univers tout entier.

Il suppose que la géométrie riemannienne s'applique dans l'Univers à grande échelle

Croyance en un Univers statique (la distance entre 2 points ne varie pas au cours du temps)

- Univers homogène, rempli de matière sans pression, de densité constante dans l'espace et dans le temps

$$\rho_m = C^{te}$$

- Distribution de matière uniforme dans l'espace implique courbure uniforme
- Univers d'Einstein : courbure positive espace à géométrie sphérique (cela signifie que si on envoie un rayon lumineux devant soi, il nous revient dans le dos)

1. Einstein démontre l'efficacité technique de la R.G. pour aborder le problème cosmologique.
2. Il ébranle la croyance en un Univers infini, en proposant un espace fini mais sans limites
3. Il n'a pas osé toucher au temps (défaut fatal de son modèle cosmologique : l'Univers, c'est de la matière sans mouvement)

Si l'Univers est infini dans l'espace et le temps (théorie de Newton) il faut spécifier les conditions aux limites à l'infini

Mais il est d'accord avec Ernst Mach selon lequel une particule unique dans un espace vide de matière n'aurait pas d'inertie ou si la masse environnante est infinie, l'inertie est infinie !

... /

b. L'équation

L'idée est que le caractère courbe de l'espace - temps varie dans le temps en fonction de la distribution de matière.

De façon schématique les équations se réduisent à l'égalité :

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}$$

en fait, $\mathbf{G} = \mathbf{X T}$

où \mathbf{X} est une constante arbitraire dépendant des unités.

$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\mu\nu}$ tenseur géométrique (spatio temporel)

tableau à 16 composantes : matrice de 4 lignes , 4 colonnes

$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mu\nu}$ tenseur matière – énergie, dit d'énergie impulsion

1ère version - 1915

$\mathbf{G}_{\mu\nu}$ se construit à partir d'un autre tenseur $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ dit tenseur de Ricci (informations sur la courbure) matrice 4 lignes , 4 colonnes

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

et le scalaire de Ricci R , contraction du tenseur de Ricci (courbure scalaire)

... /

Le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci sont complètement déterminés par le tenseur métrique $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ que l'on peut calculer à partir de la métrique de Robertson - Walker : $\mathbf{ds}^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{x}^\mu \mathbf{dx}^\nu \frac{1}{2}$ (cf. chapitre II)

d'où $\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{R}_{\mu\nu} - \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{R}$

$\mathbf{g}_{\mu\nu}$: tenseur métrique (représentant la géométrie)
(matrice 4 lignes 4 colonnes) qui vient de $\mathbf{ds}^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{x}^\mu \mathbf{dx}^\nu$

... /

2ème version – 1917

Einstein introduisit la constante cosmologique λ de sorte que :

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\mu\nu} R + \lambda \mathbf{g}_{\mu\nu}$$

Raison : le modèle d'Univers d'Einstein dont la géométrie est celle d'une hypersphère n'a pas un rayon de courbure constante (en fait facteur d'échelle) la force de gravitation tend à la contracter. L'introduction de λ n'a initialement qu'une raison mathématique (autigravité) pour aboutir à un Univers statique.

... /

$T_{\mu\nu}$ tenseur d'énergie – impulsion contient tout l'information sur la distribution et le mouvement des différentes formes d'énergie dans l'univers : matière, rayonnements.

On peut assimiler l'Univers à un fluide (ou gaz) de pression p et de densité $\rho(t)$ dont les molécules, sans interactions mutuelles, sont les galaxies.

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \quad U_\mu, U_\nu : \text{composantes du quadrivecteur vitesse du fluide}$$

Équation définitive de la relativité générale :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\lambda) = \kappa T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\lambda) = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Tenseur spatio - temporel

Tenseur énergie - impulsion

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.}$$

- On ne sait pas résoudre cette équation dans le cas général
- Si on modifie un élément (paramètre) les autres sont modifiés
- Modification de l'E.T \Rightarrow modification $T_{\mu\nu}$
- Les 2 membres de l'équation interagissent réciproquement
- L'équation est une équation locale
elle ne s'applique qu'en un point de l'espace

... /

Important

- C'est une équation locale :
n'est valable qu'en un point de la courbure où on a défini $T_{\mu\nu}$
- En fait des considérations de symétrie entraînent la simplification (diminution du nombre de d° de liberté)

II. Equations de Friedmann

1. Métrie de Robertson – Walker

on rappelle : géodésique = ligne d'Univers décrite par l'objet : planète, galaxie, la particule. Généralisée par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$

Métrie : distance entre deux points voisins

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \textit{intégrale première de la géodésique}$$

Une fois établi le tenseur $g_{\mu\nu}$, on déduit l'équation de la relativité générale. On a tous les paramètres géométriques en jeu.

exemple de tenseurs métriques : espace temps E.T. $n = 4$ sous forme diagonale

Minkowski (dt, dx, dy, dz) $g_{\mu\nu} = -1, 1, 1, 1$

Robertson – Walker ($dt, dr, d\theta, d\phi$)

$$g_{\mu\nu} = -1, R^2/1 - k^2r, R^2r^2, R^2r^2\sin^2\theta$$

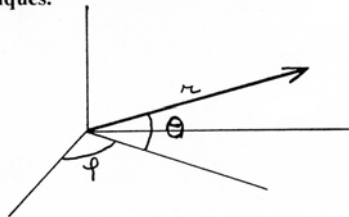
... /

À grande échelle matière homogène, isotrope → espace à courbure constante,
 L'élément de métrique R-W prend la forme :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{1 + \frac{kr^2}{4}} \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

ne pas confondre **R(t)** facteur d'échelle avec **r** distance de la partie de l'Univers concernée

En coordonnées sphériques.



$$k = \begin{cases} +1 & \text{sphérique, fermé} \\ 0 & \text{plat (euclidien)} \\ -1 & \text{concave, hyperbolique ouvert} \end{cases}$$

t = temps cosmologique

En partant de l'équation de la R.G. , une fois déterminée la métrique de Robertson – Walker, et donc $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, **R** et $T_{\mu\nu}$ on obtient les équations de Friedmann.

... /

2. Équations de Friedmann

Univers homogène, isotrope à grande échelle, supposé vrai à petite échelle
Gaz parfait : distribution de matière égale caractérisée par $\rho(t)$


On aboutit aux équations de Friedmann – Lemaitre - Roberston
Il s'attache à des solutions exactes de l'équation d'Einstein

$$(1) \quad \frac{2}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{R^2} \left[\frac{dR}{dt} \right]^2 + \frac{kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = \frac{-8\pi G}{c^2} \rho \quad \text{ou} \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = \frac{-8\pi G \rho}{c^2}$$

$$(2) \quad \frac{3}{R^2} \left[\frac{dR}{dt} \right]^2 + \frac{3kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = 8\pi G \rho \quad \frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = 8\pi G \rho$$

Dont on déduit :

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left[R^3 \rho \right] + \frac{p}{c^2} \frac{d(R^3)}{dt} = 0 \quad \text{qui s'obtient à partir des équations (1) et (2)}$$

 traduit la conservation de l'énergie

III. Modèles Cosmologiques de l'Univers

a. Modèle d'Einstein - 1917

En partant des équations de Friedmann, équations (1) et (2), Einstein suppose que $R(t)$ ne change pas avec le temps (Univers statique) :

Il est égal à une constante R_0

D'autre part, $k = +1$ (Univers fermé à courbure positive)

$p = 0$ La pression est nulle ou négligeable ou plutôt $\frac{p}{c^2}$ négligeable devant ρ

Cela se vérifie si on ne tient pas compte du rayonnement électromagnétique

Hypothèses :

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 \\ k &= 1 \\ p &= 0 \\ \rho(t) &= \text{constante} \end{aligned}$$

Equation (1) donne : $\lambda_E = \frac{1}{R_0^2}$

Car $R = C^{te} = R_0 \quad \ddot{R} = 0 \quad \dot{R} = 0$

- En introduisant la valeur de λ dans l'équation (2), on obtient :
avec $k = 1$

$$\frac{3}{R^2} \dot{R}^2 + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda c^2 = 8\pi G\rho$$

$$\dot{R} = 0 \rightarrow \frac{3c^2}{R^2_0} - \frac{c^2}{R^2_0} = 8\pi G\rho$$

$$\frac{2c^2}{R^2_0} = 8\pi G\rho$$

.../

ou

$$R_0 = \frac{c}{2\sqrt{\pi G \rho}}$$

et

$$\lambda_E = \frac{4\pi G \rho}{c^2}$$

$R_0 = A \rho^{-1/2}$ avec $A = \frac{c}{2\sqrt{\pi G}}$

R_0 est inversement proportionnel à $\sqrt{\rho}$

à la limite, il tend vers l'infini si $\rho \rightarrow 0$

L'observation montre que ρ (en fait ρC) est $10^{-29} \text{ g.cm}^{-3}$

On déduit $R_0 \sim 10^{28} \text{ cm} = 10^{23} \text{ km}$

Modèle abandonné car correspond à un Univers sans expansion

Modèle non dynamique ; cas très particulier des solutions de Friedmann,

car la constante cosmologique est ajustée à une valeur λ_E
de façon à imposer la constance du facteur d'échelle et de ρ

L'Univers d'Einstein est de la matière sans mouvement.

b. Modèle de de Sitter - 1917

$$\begin{array}{llll} \text{on suppose} & \mathbf{k = 1} & & \\ \text{densité} & \mathbf{\rho = 0} & & \\ \text{pression} & \mathbf{p = 0} & & \lambda > 0 \end{array}$$

par opposition à Einstein, de Sitter suppose qu'il n'y a pas de matière :
cas limite d'Univers vide de matière

Les étoiles, particules d'épreuve n'engendrent pas la gravitation.

Par contre Univers dynamique (non statique) équation différentielle du
2ème ordre

$$(1) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda c^2 = 0$$

$$(2) \quad 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda c^2 = 0$$

... /

Équation (2) x $\frac{1}{3}$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} = \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$(1) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\lambda c^2}{3} - \lambda c^2 = 0$$

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{2}{3} \lambda c^2 = 0$$

$$\text{ou } \ddot{R} - \frac{\lambda c^2}{3} R = 0$$

... /

$$R = C \exp \sqrt{\frac{\lambda c^2}{3}} t$$

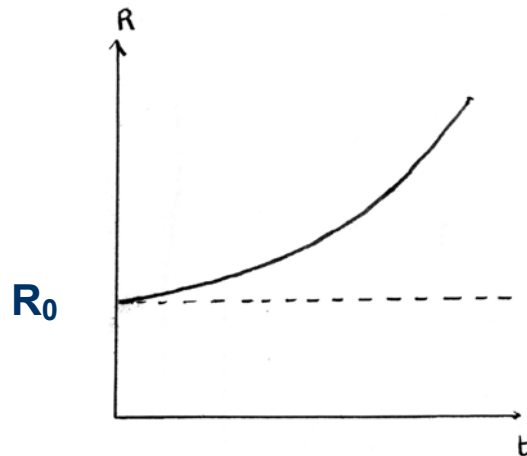
$$t = 0 \quad R = R_0$$

$$R = R_0 \exp \sqrt{\frac{\lambda c^2}{3}} t$$

R est une fonction exponentielle de t , $[0, +\infty[$ quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$ si $\lambda > 0$

si $\lambda < 0$, **R** varie périodiquement avec le temps

si $\lambda = 0$, on retombe sur le modèle Einstein



Puisque $\rho = 0$, ce modèle ne peut représenter l'évolution complète de l'Univers. Mais il présente l'avantage de montrer l'effet de λ sur l'expansion de l'Univers.

L'Univers de de Sitter est « du mouvement sans matière », a été utilisé comme support de la théorie de la création continue, puis récemment pour décrire la phase d'inflation à expansion très rapide (au début du B.B.)

c. Modèle de Friedmann – 1922

Hypothèses de départ : $\rho(t)$ variable

$$p = 0$$

$$\lambda = 0$$

Les équations de Friedmann deviennent :

$$(1) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + k c^2}{R^2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k c^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (\rho R^3) = 0$$

$$\rho R^3 = C^{te} \quad \text{c.à.d.} \quad \rho_0 R_0^3 = \rho R^3 = A$$

... /

1^{er} cas : $k = 0$ $\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho R^2}{3}$

C'est le modèle d'Einstein - de Sitter

$R(t) = (6\pi G\rho_0 R_0^3)^{1/3} t^{2/3}$ avec $R = 0$ pour $t = 0$

[Voir paragraphe e.]

2ème cas : Modèle fermé $k = 1$ avec toujours $\rho = 0$
 $\lambda = 0$

Les équations s'écrivent :

$$(1) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + c^2}{R^2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\dot{R}^2 + c^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (\rho R^3) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_0 R_0^3 = \rho R^3$$

$$\text{d'où (2)'} \quad \rightarrow \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3 R} - c^2$$

$$\text{Remarque : arrêt de l'expansion si } \dot{R} = 0 \quad R = R_{\max} = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2}$$

Introduisons les paramètres (dits cosmologiques) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Paramètre de décélération} \\ \\ \text{Constante de Hubble} \end{array} \right\} \begin{array}{l} q(t) = - \frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2} \\ \\ H(t) = \frac{\dot{R}}{R} \end{array} \quad \frac{\ddot{R}}{R} = - q(t) H(t)^2$$

Valeurs présentes : q_0 ; H_0

Les équations deviennent :

$$(4) - 2 q_0 H_0^2 + H_0^2 + \frac{c^2}{R^2} = 0$$

$$\text{Ou } \frac{c^2}{R_0^2} = (2q_0 - 1) H_0^2 \quad \rightarrow \quad R_0^2 = \frac{c^2}{(2q_0 - 1) H_0^2}$$

$$(5) \quad H_0^2 + \frac{c^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad \text{et} \quad R_0^3 = \frac{c^3}{(2q_0 - 1)^{3/2} H_0^3}$$

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left[H_0^2 + \frac{c^2}{R_0^2} \right] = \frac{3 H_0^2}{4\pi G} q_0$$

... /

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(H_0^2 + (2q_0 - 1) H_0^2 \right)$$

$$\rho_0 = \frac{3 H_0^2}{4\pi G} q_0$$

on pose $\rho_0 = \rho_c \Omega_0$ avec $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ densité critique
 $2 \times 10^{-29} \text{ h}^2 \text{ o g.cm}^{-3}$

et $\Omega_0 = 2q_0$

$$\frac{C^2}{R_0^2} > 0 \quad \rightarrow \quad q_0 > \frac{1}{2} \quad \Omega_0 > 1$$

Modèle fermé de densité $\rho > \rho_c$

ρ_c : valeur de la densité universelle de fermeture, critique, qui doit être dépassé si le modèle décrit un Univers fermé

Remarque : pour $k = -1$ on inverse les inégalités
Univers ouvert

En partant des équations (4) et (5) (cf p.26) éliminons R_0 et ρ_0 de l'équation (2)'

On obtient l'équation différentielle :

$$\dot{R}^2 = c^2 \left[\frac{\alpha}{R} - 1 \right]$$

Avec

$$\alpha = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{c}{H_0} \dots /$$

Intégrons

$$\dot{R} = c \frac{(\alpha - R)^{1/2}}{R^{1/2}}$$

$$\frac{dR}{dt} = c \frac{(\alpha - R)^{1/2}}{R^{1/2}}$$

$$\int_0^R \frac{R^{1/2} dR}{(\alpha - R)^{1/2}} = c \cdot t$$

... /

Posons $R = \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos \theta)$

θ : angle de développement de l'Univers

L'intégrale devient :

$$\int_0^\theta \alpha \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \alpha (\theta - \sin \theta) = c \cdot t$$

$$t = \frac{\alpha}{2c} (\theta - \sin \theta)$$

On prend $R = 0$ pour $t = 0$ ($\theta = 0$)

Donc pour $t = t_0$ $R = R_0$ $\theta = \theta_0$

... /

Résultats :

L'évolution du facteur d'échelle est une cycloïde.

R atteint une valeur maximale à $\theta = \pi$

$$R_{\max} = \alpha = \frac{2 q_0}{(2 q_0 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{c}{H_0}$$

$$R = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 2 \pi$$

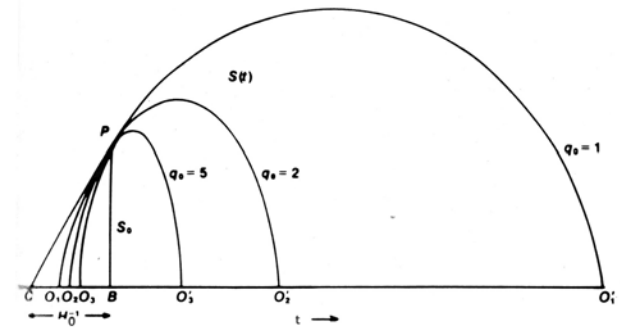
$$\text{Durée} \quad t = t_U = \frac{\pi \alpha}{c} = \frac{2 \pi q_0}{(2 q_0 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{1}{H_0}$$

$$\text{Exemple : } q_0 = 1 \quad t_U = 2 \pi H_0^{-1} = 2 \pi T_0$$

$$T_0 = H_0^{-1} \quad (\text{loi de Hubble})$$

$$H_0 = 72 \text{ S.I.} \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] = 8 \cdot 10^9 \text{ ans}$$

$$\text{max pour } t_{\text{Max}} = \pi = 44 \cdot 10^9 \text{ ans}$$



3^{ème} cas - 1924 : modèle ouvert $k = -1$

$$(1) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 - c^2}{R^2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\dot{R}^2 - c^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3 R^3}$$

En portant q_0 et H_0 :

$$\frac{c^2}{R_0^2} = (1 - 2q_0) H_0^2$$

$$\rho_0 = \frac{3 H_0^2}{4\pi G} q_0$$

... /

$$0 \leq q_0 < \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \Omega_0 < 1$$

$$\dot{R}^2 = c^2 \left[\frac{\alpha}{R} - 1 \right] \rightarrow \dot{R}^2 = c^2 \left[\frac{\beta}{R} - 1 \right]$$

$$\text{avec } \beta = \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \cdot \frac{c}{H_0}$$

... /

On a une solution analogue au cas précédent ($k = 1$) en posant :

$$R = \frac{1}{2} \beta (\cosh \psi - 1) \qquad ct = \frac{1}{2} \beta (\sinh \psi - \psi)$$

Le paramètre ψ est donné par :

$$\cosh \psi_0 = \frac{1 - q_0}{q_0} \qquad \sinh \psi_0 = \frac{(1 - 2q_0)^{1/2}}{q_0}$$

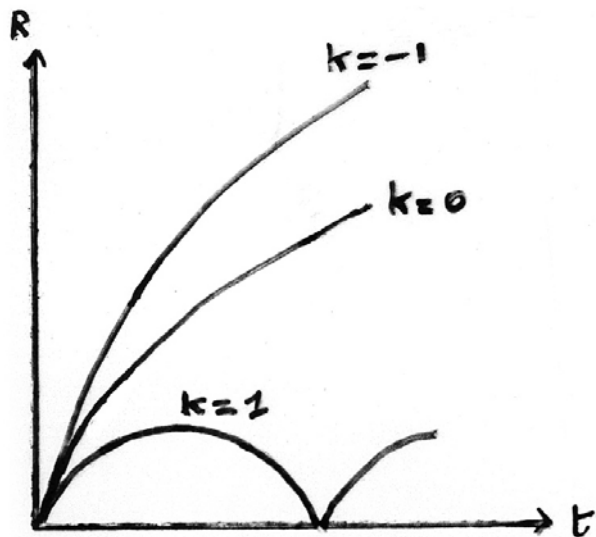
L'âge de l'Univers est donné par :

$$t_0 = \frac{\beta}{2c} (\sinh \psi_0 - \psi_0)$$

$$= \frac{q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \left\{ \frac{(1 - 2q_0)^{1/2}}{q_0} - \ln \left[\frac{1 - q_0 + (1 - 2q_0)^{1/2}}{q_0} \right] \right\} \cdot H_0^{-1}$$

Comme le modèle Einstein – de Sitter, ces modèles continuent leur expansion

âge de l'Univers $\max t = H_0^{-1}$ pour $q_0 = 0$
et $R(t) = ct$ espace plat



$k = -1$ hyperbolique

$k = 0$ euclidien

$k = 1$ elliptique

d. **Modèle de Lemaître - 1927**

1914 : Slipher analyse la lumière de 41 nébuleuses spirales et met en évidence un décalage vers le rouge pouvant s'interpréter comme un mouvement systématique de récession (fuite)

1924 : Hubble identifie des céphéides dans M31 et M33 et suppose la position extragalactique de ces galaxies

1929 : Même chose pour la galaxie d'Andromède

Dès 1912, Vesto Slipher et Harlow Shapley mettent en évidence les vitesses conséquences du décalage spectral

... /

1925 : Lemaître reprend les travaux de de Sitter, et, suite à Weyl, constate qu'il existe une relation linéaire entre la vitesse V et la distance D . Le facteur d'échelle dépend du temps.

Pour la 1ère fois : la constante cosmologique se voit attribuer le rôle d'une force de répulsion cosmique (si $\lambda > 0$) obligeant les lignes d'Univers à se séparer au cours du temps.

Hubble (télescope Mont Wilson) établit la loi
$$H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

où H mesure le taux de variation du facteur d'échelle

C'est le paramètre de Hubble.

- 1^{ère} hypothèse de Lemaître : modèle Lemaître – Eddington - 1927

à partir du modèle d'Einstein,

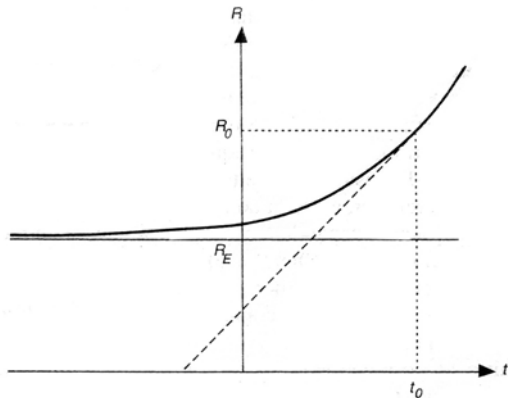
il trouve que R est une fonction du temps $R(t) = \exp \sqrt{\frac{\lambda c^2}{3}} t$

$k = +1$ ce sont les hypothèses d'Einstein

$P(t) \neq 0$; $\lambda = \lambda_E$ mais R varie

Cela permet de tenir compte de l'expansion de l'Univers

$\rho(t) \neq 0$ l'Univers n'est pas vide, contrairement à de Sitter



Dynamique : expansion perpétuelle accélérée
 λ est ajustée de façon que $R(t)$ croisse sans cesse
à partir de l'hypersphère d'Einstein à $t = -\infty$

ni Bing Bang, ni âge de l'Univers

Pourquoi, dans ce cas, le rayon de l'Univers se
serait-il ensuite mis à croître ?

- 2ème hypothèse : plus perfectionnée – 1931

modèle hésitant

L'Univers comporte 3 périodes :

- Une explosion initiale (feu d'artifice) pendant laquelle le rayon augmente rapidement
- Une phase de stabilité : quasi équilibre entre ρ et λ donnant un rayon constant.

La gravitation est prépondérante : fluctuations de densité \rightarrow naissance des grandes structures de l'Univers (étoiles, galaxies, amas de galaxies)

La formation des condensations dérange les conditions d'équilibre
 $\rightarrow \lambda$ l'emporte \rightarrow reprise de l'expansion.

- Une expansion avec $\lambda > \lambda_E$

Dynamique : expansion perpétuelle initialement décélérée puis accélérée.

Ce modèle explique l'âge de l'Univers et la formation des galaxies.

... /

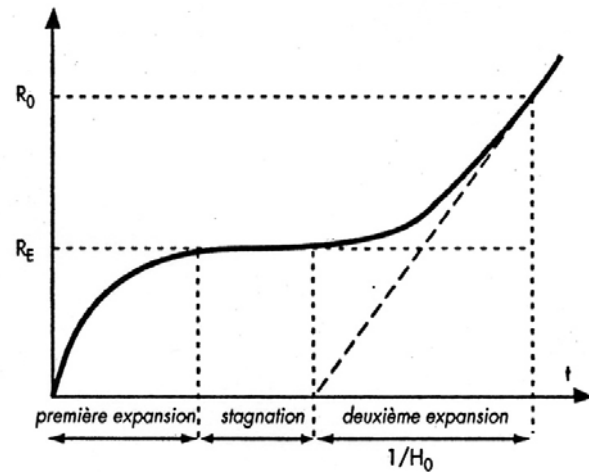
- hypothèses

$$k = + 1$$

□ $\rho(t)$

$$p(t) \neq 0$$

$$\lambda > \lambda_E$$



Lemaître introduit la notion d'atome primitif 1931 (désintégration radioactive d'un atome Univers) précurseur du Big Bang

- Remarque :

- Pour $\lambda = \lambda_E$: la constante cosmologique λ est ajustée de façon que $\mathbf{R}(t)$ croisse sans cesse à partir de l'hypersphère statique d'Einstein $t = -\infty$
 - Si $\lambda > \lambda_E$ la répulsion (λ intervient comme une pression < 0) l'emporte sur la gravitation, expansion continue
 - Si $\lambda < \lambda_E$: la gravitation l'emporte ; arrêt de l'expansion \rightarrow contraction
- Pour $\lambda < 0$:

- $k = 1$ $\dot{R}^2 = -kc^2 + \frac{1}{3}\lambda c^2 R^2 + \frac{8}{3}\pi G\rho R^2$

$\left. \begin{array}{l} -kc^2 \\ 1/3\lambda c^2 R^2 \end{array} \right\}$ même signe \rightarrow arrêt ou halte expansion

- $k = -1$ il se produit la même chose car le terme cosmologique est dominant, peut éventuellement l'emporter sur le terme de courbure.
- $k = 0$ même conclusion ; dans l'équation de la vitesse R ,

\ddot{R} toujours < 0 $\ddot{R} = \frac{-4}{3}\pi G\rho + \frac{1}{3}\lambda c^2 R$

En définitive, on a un Univers qui s'expande et se contracte comme dans le cas :

$$\lambda < \lambda_E \quad \mathbf{k} = 1$$

En résumé :

Pour $\lambda < \lambda_E$ contraction : Univers fermé (cas Friedmann)

$\lambda > \lambda_E$ $\mathbf{R} \nearrow$ (analogue à l'Univers de de Sitter)

Ces modèles sont parfois appelés modèles oscillatoires de 2ème espèce, à distinguer des modèles qui se contractent vers $\mathbf{R} = 0$ et sont appelés modèles oscillatoires de 1ère espèce.

d. **Modèle Einstein – de Sitter 1932**

Échec d'Einstein sur λ , il doit admettre l'expansion

En discussion avec Lemaître : 1932 – 1934

Einstein et de Sitter unissent leurs efforts pour rattraper le coup

Einstein déclare qu'il n'est pas besoin de la constante cosmologique λ

[« cela a été la plus grande erreur de ma vie »]

Univers en expansion sans courbure ni pression ni constante cosmologique

$$\mathbf{k = 0}$$

Robertson a déjà fait en 1929

$$\rho(\mathbf{t})$$

densité fonction du temps

$$\text{mais } \mathbf{p = 0} \quad \lambda = 0$$

Univers dynamique en accélération , expansion perpétuelle décélérée

Les équations de Friedmann deviennent :

$$(1) \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 0$$

$$(2) \quad 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 8\pi G\rho$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} [R^3 \rho] = 0$$

Enfin, l'équation (3) nous montre que $R^3\rho = C^{te}$

$R^3\rho = A$ A étant une constante

D'où l'équation (4) $\Rightarrow 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G A}{R^3}$

$$x R^3 \rightarrow R \dot{R}^2 = \frac{8\pi G A}{3}$$

$$\sqrt{R} dR = \sqrt{\frac{8\pi G A}{3}} dt$$

$$R^{1/2} dR = \sqrt{\frac{8\pi G A}{3}} dt$$

En intégrant (4)

$$\Rightarrow \frac{2}{3} R^{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi GA}{3}} (t - t_0)$$

$$\frac{1}{3} R^{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi GA}{3}} (t - t_0)$$

$$\frac{1}{3} R^{3/2} = \left[\sqrt{\frac{2\pi GA}{3}} \right] (t - t_0)$$

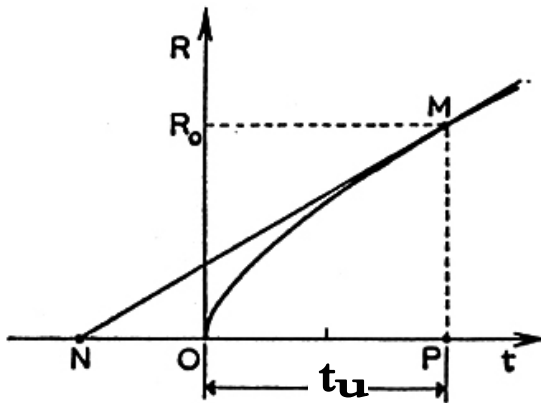
t_0 : constante arbitraire

R varie la puissance $2/3$ du temps

$$R = 0 \text{ pour } t = 0 \quad \rightarrow \quad t_0 = 0 \quad \rightarrow \quad R^3 = 6\pi GA t^2$$

Si on prend $t_0 = 0$ (époque origine) avec $R = 0$

$$R = (6\pi G A)^{1/3} t^{2/3} = C t^{2/3}$$



MN tangente au point M
à la courbe

$$\frac{PM}{NP} = \frac{dR}{dt} = \frac{R}{NP}$$

or loi de Hubble : \dots on a aussi :

$$\frac{dR}{dt} = H \cdot R$$

donc $NP = \frac{1}{H}$

$$R = C t^{2/3}$$

$$\dot{R} = \frac{2}{3} t^{-1/3}$$

On démontre aussi que $NP = \frac{3}{2} OP$

T époque actuelle : $\Rightarrow R = R_0$

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{2}{3} t^{-1}$$

$$\frac{1}{H} = \frac{3}{2} t$$

$$t = \frac{2}{3} \frac{1}{H}$$

On peut donc lier l'âge de l'Univers à la durée de l'expansion

- Si on revient aux équations de Friedmann

avec ρ $\lambda = 0$ mais k quelconque $+1, 0, -1$

On a toujours : $R^3 \rho = A$

$$R \dot{R}^2 = \frac{8}{3} \pi G A - k c^2 R$$

$$k = +1 \quad R \dot{R}^2 = \frac{8}{3} \pi G A - c^2 R$$

$$\frac{8\pi G A}{3} - c^2 R \quad \text{positif si} \quad R < \frac{8}{3} \frac{\pi G A}{c^2}$$

$$k = -1 \quad 8\pi G A - c^2 R \quad \text{toujours} > 0 \quad \forall R$$

$$k = 0 \quad \text{modèle Einstein - de Sitter}$$

e. Modèle anti – de Sitter

$$K = -1$$

$$\rho = 0 \quad p = 0$$

$$\lambda > 0$$

$$R = R_0 \exp(\lambda c^2/3)^{1/2} t$$

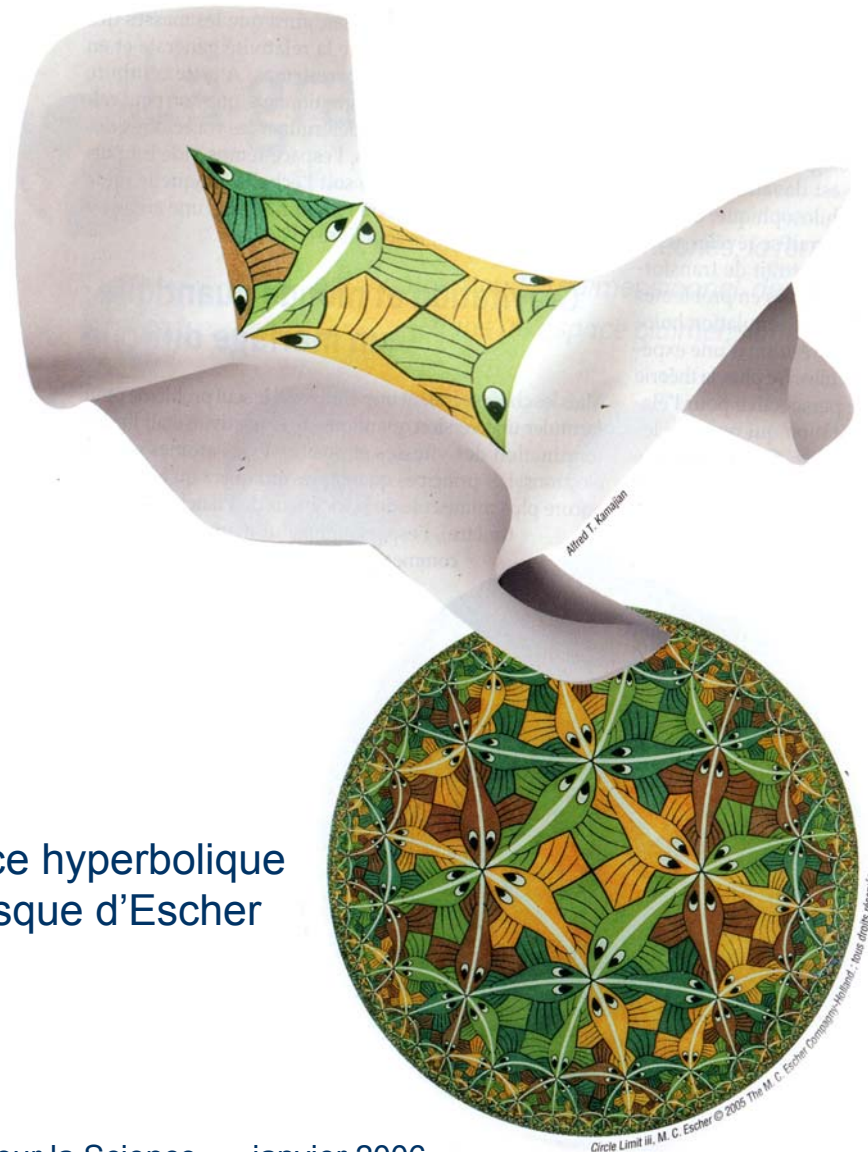
$$\ddot{R} > 0 \text{ (toujours)}$$

$$\dot{R}^2 > 0$$

$$\text{donc } R > 0 \text{ ou } < 0$$

La vitesse croît et décroît

Espace hyperbolique
et disque d'Escher



L'espace – temps le plus simple à courbure négative est nommé « espace anti – de Sitter » :

similaire à l'espace hyperbolique avec une direction de temps,
Il n'est ni en expansion, ni en contraction. Il a le même aspect à tout moment.

Représentation : si l'espace hyperbolique s'imagine comme un disque semblable au disque d'Escher, l'espace anti – de Sitter devient l'empilement de ces disques formant un cylindre solide.

L'espace anti - de Sitter proche au nôtre (3 dimensions d'espace) aurait comme Section du cylindre un disque d'Escher.

... /

Propriétés :

Si on flotte librement dans un espace anti – de Sitter, on a le sentiment d’être au fond d’un puits de potentiel gravitationnel.

Tout objet lancé reviendrait comme un boomerang.

Le temps ne dépend pas de la vitesse de lancement.

Un flash de lumière (vitesse c) va jusqu’à l’infini puis revient en un temps fini. Il y a contraction du temps.

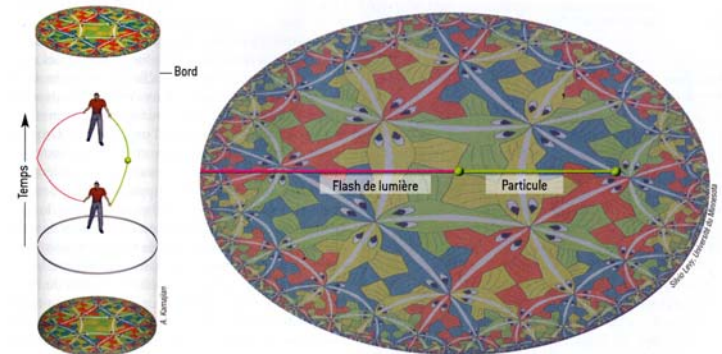
L’espace A.S, infini, a un bord situé à l’ ∞

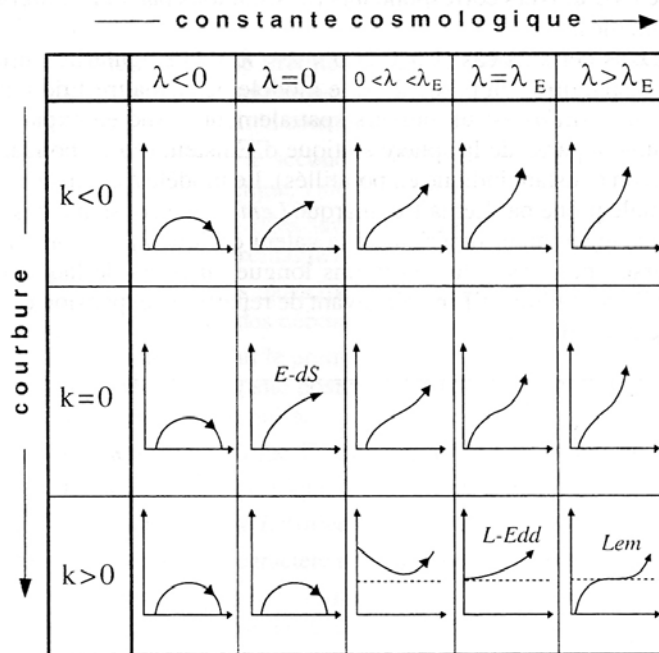
Cas du cylindre : le bord a deux dimensions

- . une d’espace qui fait le tour du cylindre

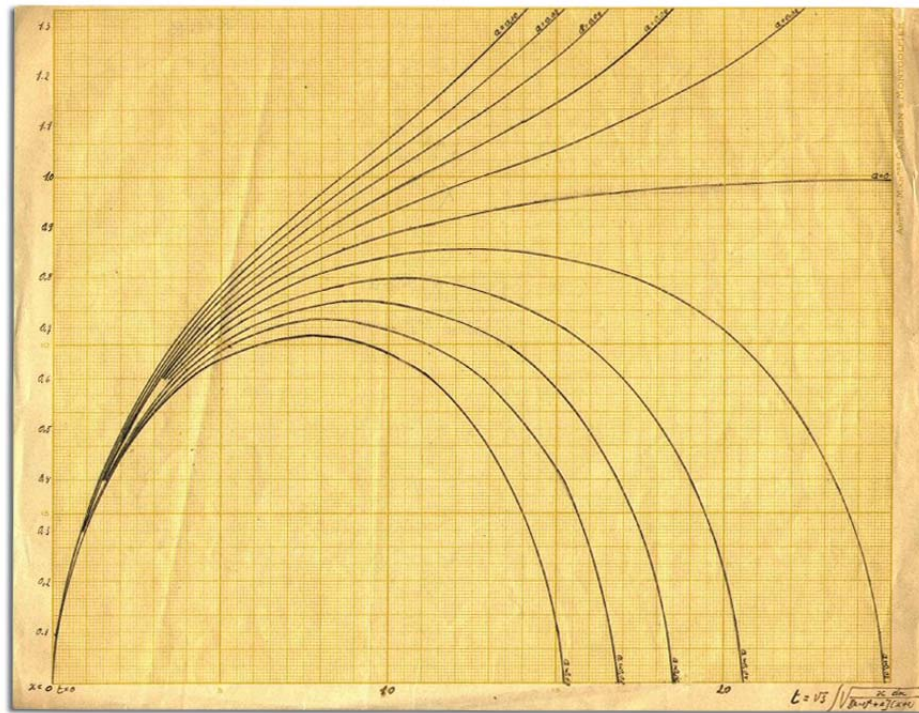
- . une de temps suivant l’axe

Espace à 4 dimensions : le bord a deux dimensions d’espace (une sphère)





Représentation graphique des différents modèles cosmologiques



Influence de λ sur l'évolution de l'Univers (Lemaitre)

IV – Le fluide cosmique

Le fluide cosmique : équation d'état, dilution

On distingue plusieurs composantes du contenu de l'Univers.

Chacune est caractérisée par son équation d'état, grâce à un paramètre w , et la loi de dilution suite à l'expansion cosmique

$$p = w \cdot \rho c^2$$

- o La matière froide ou poussière $w = 0$

Elle est caractérisée par une vitesse d'agitation très faible

$$v_{th} \ll c \quad \rightarrow \quad p = \rho v_{th}^2 \ll \rho c^2 \quad (\text{non relativiste})$$

On peut négliger p devant ρc^2 $p = 0 \rightarrow w = 0$

Composition :

- matière baryonique visible ou invisible (trous noirs)
- Matière non baryonique (matière noire) 10 fois plus

... /

- o Le rayonnement : photons $w = \frac{1}{3}$

La densité ρ_{ray} varie en R^{-4}

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2$$

3 composantes :

- Rayonnement électromagnétique
- Ondes gravitationnelles négligeables
- Neutrinos

... /

- o Énergies exotiques : vide, quintessence $w < -\frac{1}{3}$

Équations d'état différentes, impliquant des pressions négatives

exemple : la théorie quantique des champs suppose que l'énergie associée à l'état fondamental d'un certain champ quantique ait pu exercer une influence dynamique en cosmologie : énergie du vide

État fondamental par opposition à excitations des champs. Cet état posséderait l'énergie de densité ρ_{vide} tel que $p = -\rho_{\text{vide}} c^2 < 0$

Contribution correspondant à une constante cosmologique $\lambda = \frac{8\pi G \rho_{\text{vide}}}{c^2}$

- o Différentes formes de substance :
 nommées quintessence d'équation $p = -\rho c^2$ $w = -1$
 $\rho = C^{te}$ pas de dilution si R varie

... /

- Peut-être que l'accélération cosmique ne relève pas, aux grandes échelles, de la R.G. (propriétés E.T.) mais d'autres théories (théorie des cordes, branes, dimensions supplémentaires)

V - Relations

$$\Omega_M + \Omega_k + \Omega_\lambda = 1$$

$$q = \frac{1}{2} \left[\Omega_M + \Omega_k \right] - \Omega_\lambda$$

a) **Autre forme des équations de Friedmann :**

$$1) \quad \frac{2}{R} \ddot{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = - \frac{8\pi G}{c^2} \rho$$

$$2) \quad \frac{3}{R^2} \cdot \dot{R}^2 - \frac{kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = + 8\pi G \rho$$

Équation (2) →

$$(2)' \quad \left[\frac{\dot{R}}{R} \right]^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2}$$

En portant (2)' dans (1)

$$(1)' \quad 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} - \lambda c^2 = -\frac{8\pi G p}{c}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{-4\pi G \rho}{3} + \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G p}{c^2}$$

Soit (1)'' $\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} R \left[\rho + \frac{3p}{c^2} \right] + \frac{1}{3} \lambda c^2 R$

et (2)'' $\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho R^2}{3} + \frac{1}{3} \lambda c^2 R^2 - kc^2$

b. On établit les paramètres cosmologiques

$$\rho c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\Omega_M = \frac{\rho}{\rho c} = \frac{8\pi G \rho}{3H_0^2} \quad \rightarrow \quad 8\pi G \rho = 3H_0^2 \Omega_M$$

$$\Omega_\lambda = \frac{\lambda c^2}{3H_0^2} \quad \rightarrow \quad \lambda c^2 = 3H_0^2 \Omega_\lambda$$

$$\Omega_k = - \frac{k c^2}{R^2 H_0^2} \quad \rightarrow \quad -k c^2 = R^2 H_0^2 \Omega_k$$

$$\Omega_p = \frac{8\pi G \rho}{c^2 H_0^2} \quad \rightarrow \quad 8\pi G \rho = c^2 H_0^2 \Omega_p$$

Paramètre de décélération

$$q_0 = - \frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2}$$

$$\ddot{R} = -q_0 \cdot \frac{\dot{R}^2}{R}$$

Équation (2)'' \rightarrow

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \Omega_M R^2 + H_0^2 \Omega_\lambda R^2 + H_0^2 \Omega_k R^2$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = H_0^2 \left[\Omega_M + \Omega_\lambda + \Omega_k \right]$$

Or $H_0 = \frac{\dot{R}}{R} \rightarrow$ on déduit

$$\Omega_{\text{tot}} = \Omega_M + \Omega_\lambda + \Omega_k = 1$$

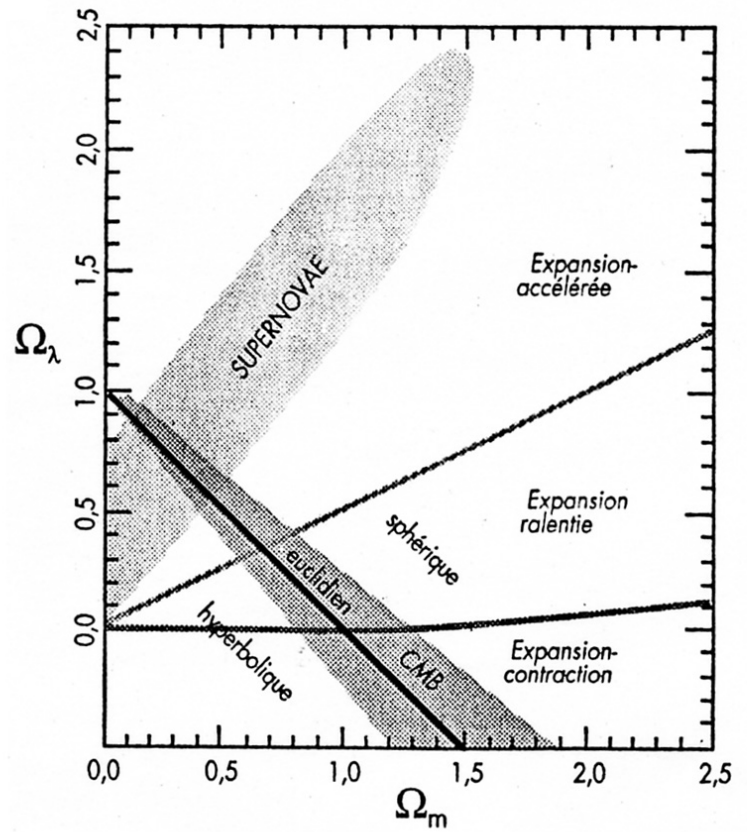
Équation (1)'' →

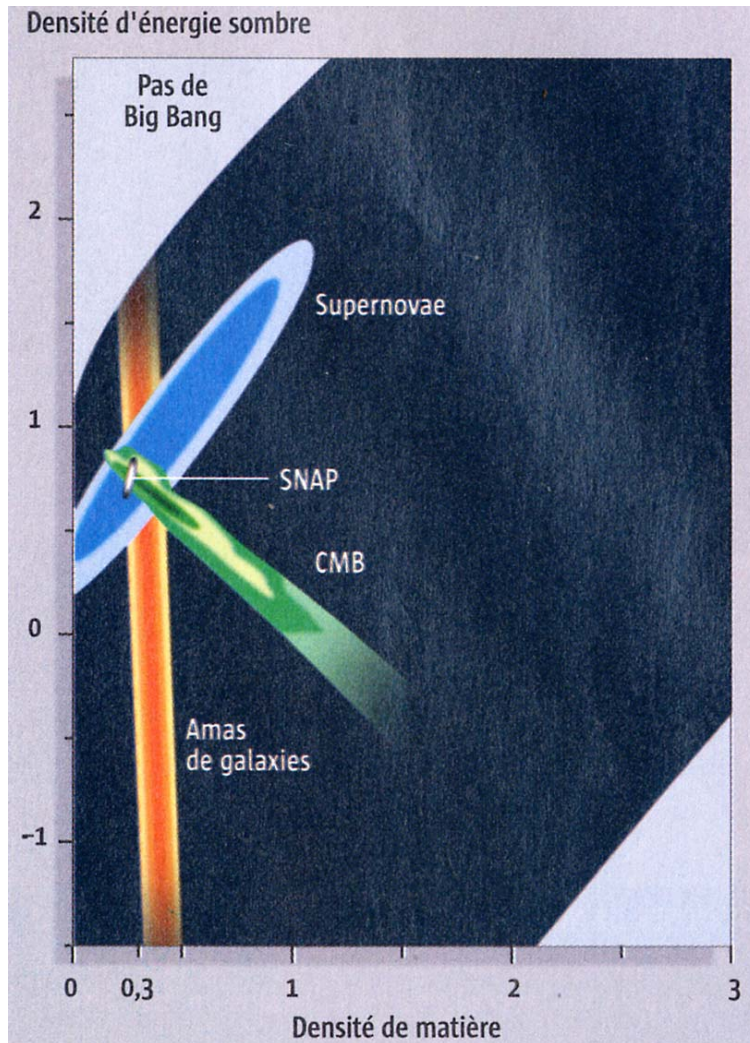
$$-q \cdot \frac{\dot{R}^2}{R} = -\frac{H_0^2}{2} \Omega_M R + H_0^2 \Omega_\lambda R - \frac{H_0^2}{2} \Omega_p R$$

Ou $qH_0^2 = \frac{H_0^2}{2} \left[\Omega_M + \Omega_p \right] - H_0^2 \Omega_\lambda$

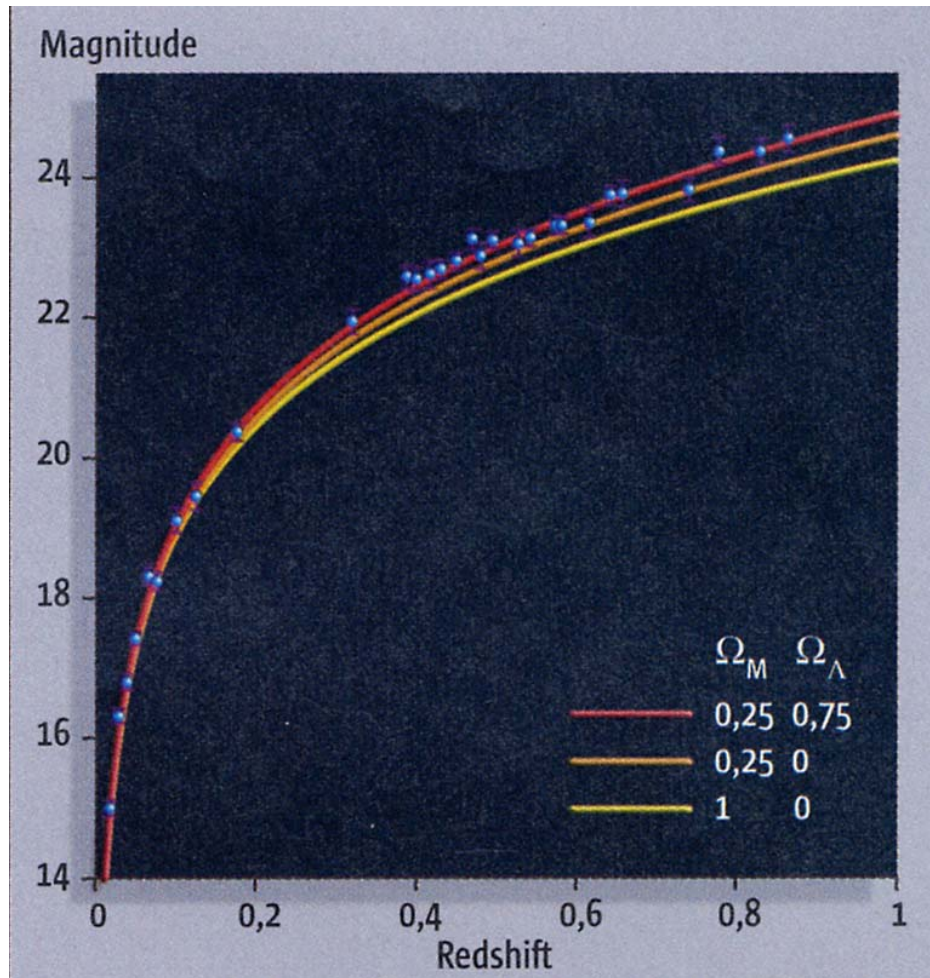
$$q = \frac{1}{2} \left[\Omega_M + \Omega_p \right] - \Omega_\lambda$$

Modèle de concordance





LES DIFFÉRENTS TYPES D'OBSERVATION DONNENT DES RÉSULTATS DIFFÉRENTS mais compatibles quant au contenu énergétique de l'Univers. C'est le modèle de concordance qui donne 70% de densité d'énergie sombre, et 30% de densité de matières ordinaire et exotique. En bleu, sont représentées les valeurs de ces densités compatibles avec les données des supernovae (95% de confiance pour la zone claire et 68% pour la zone foncée). Le même type d'informations peut être déduit des observations du rayonnement de fond cosmologique (CMB) (en vert) et des amas de galaxies (en orange). En gris, figure la zone des paramètres que les cosmologistes attendent du futur satellite SNAP.



Les super novae

- modèle d'Univers expansion ralentie
- expansion accélérée

Résultats

$$\Omega_p = 0 \quad \Omega_k = 0$$

$$\Omega_M = 0,25 \quad \Omega_\lambda = 0,75$$

$$q_0 = -0,625$$

Dernières valeurs de WMAP :

$$\Omega_M = 0,24 \quad \Omega_\lambda = 0,74 \quad (03/06)$$

$$\Omega_k = 0,02$$