

Chapitre 2: Relativité Restreinte, dynamique Relativiste .....	4
B0: Rappels de la cinématique des collisions de particules 2 →2.....	4
B0-1 Généralités.....	4
B0-2 Quelques processus cinématiques Relativistes.....	4
2.6 Vecteurs et tenseurs électromagnétiques.....	6
Chapitre 6 : Particules et champs .....	8
6.1 Introduction.....	8
6.2 Petite revue de la physique des particules.....	8
6.3 Nombres quantiques.....	9
6.4 Degrés de libertés dans le modèle standard.....	10
6.5 Mésons et Baryons.....	10
6-6 : Champs de jauge (Annexe 1).....	12
Introduction.....	12
Théorie des champs.....	12
Electrodynamique quantique.....	12
Exemple des pions.....	13
Théorie des champs relativistes.....	13
Equation du mouvement.....	13
Choix du Lagrangien.....	14
Invariance globale.....	14
Invariance locale.....	14
Dérivée covariante de jauge.....	14
Diagrammes de Feynman.....	15
6-7 Bosons de jauge massifs et mécanisme de Higgs.....	15
Interaction faible.....	15
Mécanisme de Higgs.....	16
Potentiel associé au champ de Higgs.....	16
Lagrangien associé au champ de Higgs.....	17
Boson de Higgs.....	17
6.8 Gluons et gravitons.....	18
Interaction forte.....	18
Gluons.....	18
Tableau des bosons de jauge.....	19
Etats dans le modèle standard.....	19
6.9 Au delà du modèle standard.....	19
6.9.1 Supersymétrie.....	20
6-10 Un peu de phénoménologie des particules .....	22
6.10.1 Estimation des sections efficaces.....	22
6-11 Exemple de calcul de section efficace.....	26
6-11-1 Définition de la section efficace.....	26
6-11-2 Interaction de neutrinos.....	27
6-11-3 le système $\gamma\gamma e e$ .....	28
6-12 Processus impliquant les Hadrons.....	31
Chapitre 7: Thermodynamique de l'Univers primordial.....	32
7-1 Introduction.....	32
7-2 Equilibre thermodynamique.....	34
7.3 Entropie .....	38
Résumé.....	43
Chapitre 8: Survivances thermiques du Big Bang.....	45
8.1 Recombinaison des photons et découplage.....	45
8.1.1 Asymétrie matière – antimatière.....	45
8.1.2 La fraction ionisée- L'équation de Saha.....	46
8.2 Nucléosynthèse.....	48
8.3 Gel et matière noire.....	52
8.4 Résumé.....	57
Chapitre 9 : Inflation.....	58
9.1 Problèmes avec le modèle standard.....	58
9.2 Le mécanisme de l'inflation.....	60
9.3 Modèle pour l'inflation.....	63

9.4 Résumé.....	64
Chapitre 10: Transitions de phase.....	66
10.1 Introduction.....	66
10.2 Transitions de phase dans la matière compacte.....	66
10.2.1 La description des transitions de phases selon Landau.....	67
10.3 Murs de domaines, cordes et autres défauts.....	70
10.4 Résumé.....	72
Chapitre 11: Le rayonnement de fond cosmologique (RFC).....	74
11.1 La première révolution : Le rayonnement à 2,7 K.....	74
11.1.1 Nature thermique du RFC.....	74
11.2 La deuxième révolution : L'anisotropie.....	78
11.2.1 Fluctuations de température et perturbations de densité.....	78
11.3 La nouvelle génération d'observations.....	80
11.4 Résumé.....	81
.....	81
Chapitre 12: Croissance des structures dans l'univers.....	82
12.1 Introduction.....	82
12.2 La masse de Jeans.....	83
12.3 Croissance des structures en régime linéaire.....	84
12.4 Quel lien avec les fluctuations de température du RFC ?.....	85
12.5 Résumé.....	88
Chapitre 13: Rayons Cosmiques.....	90
13.1 Introduction.....	90
13.2 L'abondance des rayons cosmiques.....	90
13.3 Utra hautes énergies.....	94
13.3.1 Averses de Gerbes de particules.....	94
13.3.2 Interaction avec le RFC.....	96
13.4 Accélération des particules.....	98
13.5 Résumé.....	101
Chapitre 15 Le rôle des neutrinos.....	102
15.6 Oscillation des neutrinos.....	102
15.10 Télescopes à neutrinos : l'effet Cherenkov.....	105
ANNEXE B: Dynamique Relativiste.....	106
B1. Mécanique classique.....	106
Formulation Lagrangienne.....	106
Définition du Hamiltonien.....	106
B.2 Champs Classiques.....	107
B2-1 Etablissement de l'équation de Klein Gordon.....	107
L'équation de Klein Gordon.....	108
B2-2 Quelques rappels généraux sur l'espace de Hilbert et son utilisation en Mécanique quantique.....	109
L'espace de Hilbert.....	109
États et vecteurs, observables et opérateurs.....	109
L'espace de Hilbert est un espace vectoriel de fonctions.....	109
Mesure d'observable.....	110
Opérateurs Hermitiques.....	110
Opérateur Hamiltonien.....	111
Complémentarité et relations de commutation.....	111
B.3 Champs quantiques Relativistes.....	112
B.3.1 Le Champ de Klein Gordon.....	112
Compléments sur l'espace de Fock.....	114
Opérateurs de création et d'annihilation.....	115
B.3.2 Champ électromagnétique.....	115
B.3.3 Champ scalaire chargé.....	116
B.4 Résumé.....	118
Annexe C: Equation de Dirac.....	120
Un peu de phénoménologie ( Cosmology & Particles Astrophysics ).....	120
Approche historique: cf cours INSA 4 <sup>o</sup> année par le professeur F. Davoine.....	120
Problème avec l'équation de Klein Gordon qui a conduit Dirac à établir sa propre équation (Cosmology & Particles Astrophysics ).....	121

<a href="#">Solution de Dirac : Linéarisation de l'équation.....</a>	<a href="#">122</a>
<a href="#">Le spin d'après la théorie de Dirac.....</a>	<a href="#">124</a>
<a href="#">Considérons alors-un électron dans un potentiel électrostatique central <math>U(r)</math>.....</a>	<a href="#">124</a>
<a href="#">Remarque sur les états à énergie négative. théorie des lacunes.....</a>	<a href="#">126</a>
<a href="#">C.2 L'Equation de Dirac suite : ( Cosmology &amp; Particles Astrophysics ).....</a>	<a href="#">127</a>
<a href="#">C.3 Solutions d'ondes planes.....</a>	<a href="#">129</a>
<a href="#">C-4 Couplage à l'électromagnétisme.....</a>	<a href="#">133</a>
<a href="#">C.5 Invariance de Lorentz.....</a>	<a href="#">133</a>
<a href="#">C-6 Formes bilinéaires.....</a>	<a href="#">135</a>

## **Cosmologie et particules astrophysique**

### **Présentation du document**

Ce document s'appuie principalement sur « Cosmology and particles Astrophysics de Lars Bergsröm and Ariel Goodbar » dont j'ai traduit partiellement certains chapitres.

Ceux que je n'ai pas traduits soit s'écartaient trop de la cosmologie, soit étaient redondants (pour la description du modèle standard par exemple) avec des documents que nous possédions soit j'ai eu un coup de fatigue au moment de les traduire.

J'ai également fait appel à d'autres documents quand cela permettait d'éclairer certains points qui ne me paraissaient pas évidents.

Par ailleurs cette traduction est « brute de coffrage », aussi j'implore l'indulgence du lecteur pour les erreurs , lourdeurs de style et autres désagréments que la lecture du document pourrait lui infliger.

Je remercie le lecteur de me faire part des erreurs qu'il ne manquera pas de relever, pour me permettre d'améliorer le document.

## Chapitre 2: Relativité Restreinte, dynamique Relativiste

### B0: Rappels de la cinématique des collisions de particules 2 → 2

#### B0-1 Généralités

On désigne les deux particules par 1 et 2 avant la collision et 3 et 4 après.

Le processus de diffusion doit être déterminé par des quantités invariantes par transformation de Lorentz conformément à la Relativité restreinte.

Partant de quadri impulsions on peut former:

**six produits invariants de Lorentz  $p_i \cdot p_j$  avec  $i \neq j$**

De plus on a :

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

( conservation du moment cinétique), ce qui impose quatre relations ( une par composante).

En fait il n'y a que deux scalaires indépendants qui, pour des raisons historiques, sont habituellement:

$$s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 - p_3)^2$$

On peut montrer que  $c\sqrt{s}$  est l'énergie totale dans le référentiel du centre de moment cinétique (appelé aussi centre d'impulsion et quelquefois improprement centre de masse et qui est défini par le fait que dans ce référentiel  $p_1 = -p_2$ ).

L'énergie qu'on peut recueillir dans le laboratoire est maximum quand ce centre d'impulsion est immobile par rapport à lui (collision frontale de particules d'impulsion égales ) en sens contraire. Sinon une bonne partie de l'énergie est emportée par le mouvement du centre d'impulsion.

#### B0-2 Quelques processus cinématiques Relativistes

Posons  $c = 1$ . Nous pouvons dériver quelques relations utiles pour les processus 2-2. En exercice nous avons calculé "s" dans différents référentiels. L'invariance de Lorentz nous fournit un moyen de comparer les variables cinématiques dans deux référentiels.

Dans le référentiel du laboratoire où la particule 2 est au repos nous avons:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{\text{lab}} m_2 \quad (2.50)$$

tandis que dans le référentiel du centre d'impulsion, nous avons .

$$s = (E_1^{\text{cm}} + E_2^{\text{cm}})^2 \quad (2.51)$$

En égalant les équations (2.50) et (2.51) on obtient après quelques calculs:

$$|\mathbf{p}^{\text{cm}}| = \frac{m_2 |\mathbf{p}^{\text{lab}}|}{\sqrt{s}} \quad (2.52)$$

De l'équation (2.51) on déduit:

$$|\mathbf{p}^{\text{cm}}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (2.53)$$

où  $\lambda$  est la "fonction du triangle"

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \quad (2.54)$$

Il est facile de déduire ou d'intuiter de par la symétrie, l'expression correspondante pour le moment au centre d'impulsion correspondant à l'état final des particules.

$$|\mathbf{p}_3^{\text{cm}}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (2.55)$$

et l'expression

$$E_3^{\text{lab}} = \frac{m_2^2 + m_3^2 - u}{2m_2} \quad (2.56)$$

qui est utile pour déduire la relation entre l'invariant " $t$ " et l'angle de diffusion  $\theta$  dans le laboratoire.

$$\cos \theta_{13}^{\text{lab}} = \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 + m_3^2 - u) + 2m_2^2(t - m_1^2 - m_3^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}\sqrt{\lambda(u, m_2^2, m_3^2)}} \quad (2.57)$$

Pour un processus 2-2, la plage de " $s$ " cinématiquement permise est

$$s > (m_3 + m_4)^2 \quad (2.58)$$

Ce qui est bien conforme à la conservation de l'énergie. Dans le référentiel du centre d'impulsion, nous avons vu que  $c\sqrt{s}$  correspond justement à l'énergie totale, et l'énergie de la masse au repos doit être au minimum fournie.

Les limites cinématiques pour " $t$ " sont un peu plus compliquées et sont obtenues plus facilement de la condition que le cosinus est inférieur ou égal à 1

$$\cos \theta_{13}^{\text{cms}} = \frac{s(t - u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}} \quad (2.59)$$

## 2.6 Vecteurs et tenseurs électromagnétiques

Conformément à la Relativité Restreinte, les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les systèmes inertiels. Nous avons vu que si nous pouvons formuler ces lois en termes de quadri scalaires, quadri vecteurs et tenseurs, la covariance relativiste s'ensuit automatiquement. On dit quelquefois que de telles lois sont manifestement invariantes par transformation de Lorentz.

Pour construire une théorie qui satisfait les exigences de la Relativité Restreinte (RR), nous devons donc tenter d'identifier les scalaires, vecteurs et tenseurs pertinents. En électromagnétisme, un quadri vecteur important est le quadri potentiel.

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad (2.69)$$

où  $\Phi$  est le potentiel électrostatique et  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur (à 3 dimensions spatiales)

Le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  et le vecteur champ magnétique sont des « composantes » d'un tenseur antisymétrique de variance 2,  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$F^{\mu\nu}$  peut être exprimé à partir de  $A^\mu$  par la relation.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.71)$$

Le quadri vecteur courant est donné par :

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (2.72)$$

où  $\rho$  est la densité de charge électrique et  $\mathbf{j}$  est la densité ( spatiale) de courant ( tri dimensionnelle). Les équations de Maxwell, avec ces notations, peuvent alors, se résumer à :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.73)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (2.74)$$

Nous voyons que l'antisymétrie de  $F^{\mu\nu}$ , et l'équation ( 2.73) impliquent  $\partial_\nu j^\nu$  Ceci est l'équation de continuité du courant électrique, qui intégré à l'espace entier exprime la conservation de la charge électrique globale. Donc, la cohérence exige que le champ électromagnétique ne peut être couplé qu'à des courants de type conservatif.

Un tenseur bien particulier est  $\eta_{\mu\nu}$ , qui a la même valeur constante dans tous les référentiels inertiels. Un autre tenseur important est celui obtenu par généralisation à quatre dimensions du tenseur de Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$ , soit  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , qui est antisymétrique pour tous les indices et est tel que  $\epsilon_{0123} = 1$ . En l'utilisant, nous pouvons par exemple, définir  $F^*$ , qu'on appelle le tenseur dual de  $F$ .

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.75)$$

Alors la seconde équation de maxwell ( 2.74) peut s 'écrire simplement

$$\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.76)$$

Exprimé par rapport à  $A^\mu$ , le premier jeu d'équations de Maxwell devient :

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (2.77)$$

Et comme (2.71) est invariant par la transformation de jauge

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f(\mathbf{r}, t) \quad (2.78)$$

nous pouvons utiliser cette liberté pour imposer une jauge sur  $A^\mu$ , par exemple  $\partial_\mu A^\mu = 0$  (jauge

de Lorentz),  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (jauge de Coulomb) ou  $A^0 = \bar{0}$  (jauge axiale).

En l'absence de charges ( dans le vide), on peut imposer à la fois la jauge de Coulomb et la jauge axiale ( jauge de rayonnement). Alors les équations de Maxwell relatives à la libre propagation, dans le vide, du vecteur champ électromagnétique peut s'écrire :

$$\square A^\mu = 0 \quad (2.79)$$

Ce qui est une équation relativiste de propagation d'une onde à la vitesse de la lumière. Les solutions sont de la forme :

$$A^\mu(\mathbf{r}, t) = \epsilon^\mu e^{\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \epsilon^\mu e^{\pm i k \cdot x} \quad (2.80)$$

Ici  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde qui décrit la direction de propagation et où l'index du quadri vecteur est véhiculé par le vecteur constant de polarisation  $\epsilon^\mu$

En insérant cela dans (2.79) on voit que  $k^\mu k_\mu = 0$ , ce qui nous l'avons vu est la condition décrivant un vecteur de type « lumière » associé à une particule de masse nulle, le photon.

On voit donc, que si le photon est de masse nulle, c'est en raison de l'invariance de jauge, la symétrie de jauge de la théorie de Maxwell.

Les conditions de jauge axiales et de Coulomb qui fixent deux degrés de liberté sur les quatre signifient que le quadri vecteur potentiel  $A^\mu$ , ne dispose plus que de deux degrés physiques de

liberté. Nous voyons que  $A^0 = \bar{0}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  se traduisent par  $\epsilon^0 = 0$  et  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ ,

montrant que les deux degrés de libertés sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. Si on prend  $\mathbf{z}$  comme direction de propagation, nous pouvons par exemple utiliser

$\epsilon_1^\mu = (\bar{0}, 1, 0, \bar{0})$  et  $\epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$  comme base dans laquelle on pourra représenter

n'importe quelle polarisation arbitraire. Quelquefois, il est cependant plus pratique d'utiliser ce

qu'on appelle les quadri vecteurs de polarisations circulaires,  $\epsilon_\pm^\mu = (0, 1, \mp i, 0)/\sqrt{2}$ , comme vecteurs de base.

Le fait que  $A^\mu$  est un quadri vecteur signifie qu'il se couple à des sources de type vecteur, par exemple un vecteur associé à un dipôle champ électrique variable.

Dans le chapitre 16 nous utiliserons un raisonnement semblable pour montrer qu'il existe aussi des ondes gravitationnelles. Dans ce cas c'est un champ tensoriel qui se propage, ce qui implique que ce sera un moment quadripolaire, au lieu d'un moment dipolaire qui sera source du champ.



## Chapitre 6 : Particules et champs

### 6.1 Introduction

Un des sujets les plus passionnants de la cosmologie moderne est sa relation avec la physique des particules. C'est peut être paradoxal, que l'étude des objets les plus petits que nous connaissons, les particules élémentaires, puisse avoir des applications sur les plus grandes structures de l'univers. C'est pourtant le cas, et les relations entre ces deux domaines sont l'objet de nombreux développements scientifiques aujourd'hui. On l'appelle quelquefois, la physique des astro-particules, qui inclut habituellement les rayons cosmiques et l'astrophysique relativiste. Il est de bon ton, aujourd'hui que les astrophysiciens se familiarisent avec les modèles de physique des particules.

Une découverte essentielle du 20<sup>ième</sup> siècle, a été l'importance des champs pour la compréhension des interactions fondamentales de la physique. Bien sûr la formulation des théories actuelles est compatible avec la relativité et la mécanique quantique. Dans ce livre nous ne présentons pas la théorie relativiste quantique des champs dans toute sa splendeur.. cependant à partir des connaissances acquises dans les chapitres précédents et si vous étudiez l'annexe B (dynamique relativiste) et l'annexe C (L'équation de Dirac), dans ce livre, vous aurez acquis une bonne base de connaissances pour aborder la physique des particules appliquées à la cosmologie et à l'astrophysique relativiste. D'autre part, si vous admettez certains résultats sans démonstration, vous pouvez vous contenter des résumés faits à la fin de chaque chapitre et annexe. Répétons que certaines notions comme les champs quantifiés en espace courbe ne sont pas traités dans ce livre.

### 6.2 Petite revue de la physique des particules

Commençons notre introduction de la physique des particules, en passant en revue, les bases sur les constituants élémentaires de la matière. Selon le modèle standard de la physique des particules, bien établi aujourd'hui, les briques de base de la matière sont les quarks et les leptons, et on en connaît six (table 6.1 ci dessous).

Charge électrique	Q=0	Q=-1	Q=+2/3	Q=-1/3
Famille 1	$\nu$	e	u	d
Masse	< 5 eV	511 keV	2-8 MeV	5-15 MeV
Famille 2	$\nu_\mu$	$\mu$	c	s
Masse	< 170 keV	106 MeV	1-1.6 GeV	100-300 MeV
Famille 3	$\nu_\tau$	$\tau$	t	b
Masse	< 24 MeV	1,78 GeV	170-190 GeV	4.1-4-5 GeV

Notons que comme les quarks sont confinés, la masse du quark n'est pas un paramètre défini de façon unique.

Comme on peut le voir les quarks et les leptons sont groupés naturellement en 3 familles, chacune comportant un lepton électriquement neutre (comme le neutrino  $\nu_e$ ), un lepton de charge électrique  $-e$  (comme l'électron), un quark de charge  $+2/3 e$  (comme le quark  $u$ ), et un quark de charge  $-1/3 e$  (comme le quark  $d$ ). Petite curiosité, les quarks ne se manifestent pas à l'état libre. Un proton est constitué de 2 quarks  $u$  et d'un quark  $d$ , un neutron d'un quark  $u$  et de 2 quarks  $d$  (vérifiez que cela donne bien la bonne charge électrique). Les forces qui lient ces quarks ensemble sont si fortes qu'un quark ne peut pas être extrait du système lié. On

appelle cela le confinement des quarks. Cependant il existe des méthodes permettant de « secouer » les quarks dans un proton et démontrer ainsi leur existence en tant que constituants individuels des nucléons. Le fait que les quarks fortement liés dans les nucléons ( protons, neutrons) puissent se comporter comme des particules libres pendant des instants très courts comme constaté expérimentalement, est une propriété intrigante des théories modernes appelée liberté asymptotique. La configuration particulière de charges et autres nombres quantiques dans une famille de 2 leptons, et 2 quarks signifie que la théorie va être compatible avec la mécanique quantique. S'il avait manqué une particule, une anomalie aurait été générée et cela aurait eu des conséquences catastrophiques pour la théorie. ( En gros, on n'aurait rien pu calculer, du fait des infinis, qui n'auraient pas pu être renormalisés de façon contrôlée). C'est la raison pour laquelle le quark Top a été prédit , bien avant qu'il n'ait été finalement découvert expérimentalement en 1995.

Dans la table 6.1, nous avons supprimé quelques nombres quantiques, par exemple chaque quark a 3 degrés de liberté appelés couleurs. La théorie de l'interaction forte , la chromodynamique quantique (QCD) décrit comment les quarks colorés interagissent. Les leptons et les quarks ont des spins  $\frac{1}{2}$  ( en unités de  $\hbar$ , la constante de Planck divisée par  $2\pi$  ). Ce sont des fermions qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli. Enfin à chaque particule connue, correspond une antiparticule, de même masse et spin mais de charge électrique opposée. Les neutrinos qui sont neutres, possèdent un autre type de charge, l'hypercharge faible, qui signifie que le neutrino et l'antineutrino sont des particules différentes. Cependant tous les neutrinos semblent avoir un spin « gauche » (ou une hélicité, qui est la projection du spin dans la direction de la quantité de mouvement). Par symétrie, les antineutrinos sont « droitiers ». C'est ainsi que les neutrinos apparaissent dans le modèle standard. Cependant le domaine des neutrinos est très difficile à étudier du fait de leur faible interaction avec la matière. Il est possible que les neutrinos soient en fait leurs propres antiparticules ( voir annexe C), alors appelée particules Majorana.

### 6.3 Nombres quantiques

Le concept de nombre quantique est important en physique des particules. Comme nous le dit la mécanique quantique, le moment angulaire interne  $s$  d'une particule est quantifié par pas de 1 ou  $\frac{1}{2}$  de  $\hbar$  , ce moment angulaire ( spin) est un nombre quantique. D'habitude, l'existence de nombre quantiques conservés reflète l'invariance de la théorie par certaines transformations. Par exemple la conservation du moment angulaire est une conséquence de l'invariance par des rotations de la forme discutée au chapitre 2.3. Un système donné de particules peut avoir un moment angulaire total qui est donné par le spin total de toutes les particules qui le constituent couplé au moment orbital total, conformément aux règles de la mécanique quantique. Une utilisation pratique de cette conservation est une règle générale qui stipule qu'un système qui a un moment angulaire total demi entier ne peut pas dégénérer en système avec un spin total entier.

Il y a d'autres types de transformations, en relation avec les degrés de liberté internes, qui impliquent aussi des conservations de nombres quantiques. Un exemple important est la charge électrique, dont la conservation résulte d'une invariance de jauge. ( 2.78). De plus, il y a d'autres « charges » telles que le nombre baryonique, qui semble être conservé avec une très grande précision ( La durée de vie du proton est au moins de  $10^{34}$  ans, d'après les expériences). Là, l'invariance, source de la conservation du nombre baryonique est moins bien comprise ( en fait selon certaines théories, il n'y aurait pas une conservation exacte de ce nombre) , Mais du point de vue phénoménologique, cela peut être considéré comme une loi empirique qui nous

indique quelles réactions impliquant des baryons sont permises. La normalisation attribue habituellement un nombre baryonique égal à +1 au proton (et donc de -1 pour l'antiproton). Alors un quark a un nombre baryonique de +1/3.

De même pour les leptons, il semble qu'il y a des nombres quantiques qui soient conservés au moins approximativement. On attribue à l'électron et au neutrino électronique un nombre leptonique de +1 et de même pour les autres leptons. Il semble que ce nombre leptonique soit conservé avec une bonne approximation. Leur somme, le nombre leptonique total, semble encore mieux conservé. Cependant, répétons qu'il n'y a pas de raison théorique contraignante associée à cette conservation, à la différence de la charge électrique, conséquence d'une invariance de jauge). Il est possible que la conservation du nombre leptonique soit violée à un certain niveau, bien que cela n'ait pas été constaté expérimentalement. Le nombre leptonique individuel n'est probablement pas conservé comme nous le verrons au chapitre 15.

## 6.4 Degrés de libertés dans le modèle standard

Une manière très utile de considérer les degrés de liberté de spin d'une particule est de considérer qu'un état associé à n'importe laquelle des  $2s+1$  valeurs de  $m_s$ , est une particule différente.

Ceci est justifié, car comme nous le verrons au chapitre 7, chacun de ces états contribue indépendamment, par exemple, à la densité d'énergie. La transformation de Lorentz, n'agit pas seulement sur l'espace temps, mais aussi sur les états internes de spin : ils se mélangent.

Ici  $m_s$  est la projection du spin sur un axe arbitraire mais fixé. D'ordinaire c'est l'axe  $z$ . Cependant, un choix encore meilleur qui permet de mieux traiter les particules sans masse (comme par exemple, peut être les neutrinos) est d'utiliser l'hélicité c'est-à-dire de prendre la direction du mouvement comme axe de projection.

Comptons le nombre  $g_{fam}$  d'états d'hélicité indépendants d'une famille de quark et de leptons. Chaque quark a 3 couleurs et 2 spins, soit 12 états pour les quarks  $u$ ,  $d$  et les antiquarks. Le lepton chargé a 2 états et le neutrino 1. Donc une famille a 15 états, soit 45 pour les trois. Avec les antiparticules cela fait 90 pour les fermions

Au dessus d'une certaine température, de l'ordre de 100-300 MeV, où on suppose que la transition de phase quark-gluon se produit, on subodore que les quarks et les gluons se comportent comme de particules libres.

## 6.5 Mésons et Baryons

En dessous de la température de transition de phase QCD, seuls les systèmes non colorés semblent viables. Une manière de faire pour un quark est de se lier avec un antiquark, formant un système incolore fortement lié, qu'on appelle un méson ; Les plus légers sont les mésons  $\pi$ , ou pions. La masse du pion (énergie au repos) est d'environ 140 MeV. Une particule  $\pi^+$  est constituée d'un quark  $u$  et d'un antiquark  $\bar{d}$ . D'ordinaire, une barre sur le nom de la particule désigne l'antiparticule, donc on écrit  $\pi^+ = u\bar{d}$ . Le  $\pi^-$  qui est l'antiparticule du  $\pi^+$  est évidemment constitué d'un quark  $d$  et d'un antiquark  $\bar{u}$ . Il y a aussi un pion neutre, le  $\pi^0$ , qui est un mélange quantique de  $(u\bar{u})$  et  $(d\bar{d})$ . Une autre façon d'obtenir une particule incolore est de prendre 3 quarks, chacun d'une couleur différente ce qui donne, par exemple, un proton ou un neutron.

Donc les particules constituées de quarks et soumis à l'interaction forte sont de deux types. Soit des baryons constitués de trois quarks comme les nucléons (le proton, le neutron) ou des mésons constitués d'un quark et d'un antiquark comme le pion. On suppose qu'il existe des

particules plus exotiques constituées par exemple de deux quarks et deux antiquarks, mais jusqu'à présent rien n'a été prouvé.

Quand le quark apparut dans les années 60, il offrait une solution à la prolifération des centaines de particules qui avaient été produites dans les accélérateurs. Avec quelques quarks et antiquarks on peut construire un grand nombre d'états de mésons et de baryons, en utilisant les règles de construction de la mécanique quantique. Les plus importants sont ceux montrés sur la fig 6.1, qui représentent les états du niveau de base (qui sont les moins massifs) des mésons et baryons. La classification utilise la symétrie SU(3) de la mécanique quantique qui est fondée sur le principe que les trois quarks légers  $u$ ,  $d$  et  $s$  sont sur un pied d'égalité.

---

Comme la classification en termes d'octets, décuplets et singlets assure une symétrie exacte entre les quarks légers  $u, d$  et  $s$ , et que cette symétrie est brisée en pratique du fait des masses différentes ( le quark  $s$  est plus lourd), il se produit un mélange des états. Par exemple les mésons  $\eta^0$  et  $\eta'$  sont des mélanges états de singlets et de multiplets.

---

Un méson  $K^+$  par exemple, est constitué d'un quark  $u$  et d'un antiquark  $s$ , tandis qu'un méson  $\pi^+$  est constitué d'un quark  $u$  et d'un antiquark  $d$ . Les mésons  $\pi^0$  et  $\eta$  sont constitués de combinaisons linéaire d'états de  $(d\bar{d})$ ,  $(u\bar{u})$  et  $(s\bar{s})$ .

Des états supplémentaires sont produit par les excitations des états fondamentaux des mésons et baryons. Par exemple le proton est l'état fondamental d'un système constitué d'une combinaison de quarks  $uud$ , avec les quarks d'un moment angulaire  $l = 0$  (Onde  $-S$ ) et un spin total  $1/2$ . Alors, il doit aussi exister un état avec les mêmes constituants mais un spin total de  $3/2$ . En fait une telle particule existe. C'est le baryon  $\Delta^+$ , qui joue un rôle important en astrophysique. Comme il est très semblable au proton, il est facile d'exciter cet état par collision d'un proton et d'un photon. Nous verrons plus loin, (chapitre 13.3) que de telles interactions entre des rayons cosmiques (protons) de très haute énergie et le RFC détermine le libre parcours moyen de tels rayons cosmiques.

Pour les mésons et baryons constitués de quarks  $c$ ,  $b$  et  $t$ , la classification en termes de SU(N) n'est pas très utile, car leurs masses au repos sont complètement déterminées par les masses des quarks. Cependant, la spectroscopie des états peut être interprétée par une simple combinatoire, avec des baryons constitués de trois quarks et des mésons constitués d'un quark et d'un antiquark. Aujourd'hui, nous ne savons pas vraiment pourquoi, il ya trois familles de quarks et de leptons dans la nature. La solution de cette énigme, comme d'autres, devra sans doute attendre une théorie plus complète de toutes les particules et interactions de la nature, incluant la gravitation quantique. Cette théorie aujourd'hui n'est pas faite, les spéculations nous poussent vers une théorie sous-jacente appelée M-théorie, qui sous certaines conditions a des solutions qui se présentent sous forme de cordes ou d'objets de dimensions supérieures appelées D-branes. Quand une théorie correcte sera établie, on peut espérer que ce contexte ( comme le nombre de familles), charges, les masses et autres attributs sera expliqué par des propriétés géométriques dans l'espace comportant un grand nombre de dimensions correspondant au cadre naturel et formel de ces théories.

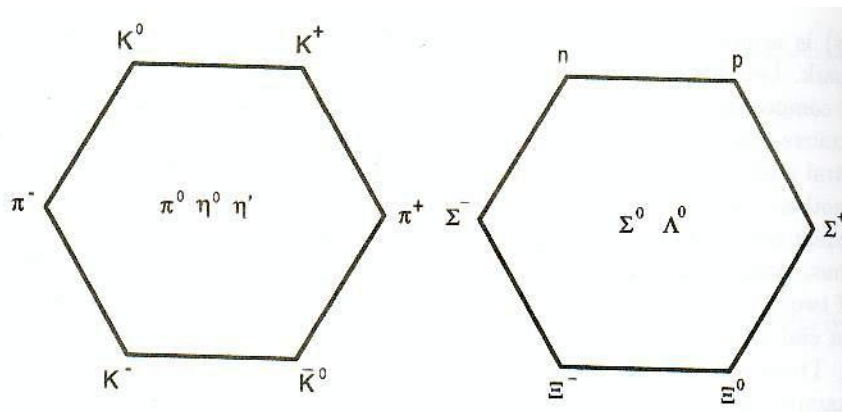


Fig 6.1. L'octet du méson (sur la gauche) et celui du baryon ( sur la droite) obtenu par la classification SU(3) des états liés des trois quarks

## 6-6 : Champs de jauge (Annexe 1)

### *Introduction*

Un Univers qui ne serait constitué que de quarks et de leptons serait ennuyeux et improductif. La dynamique est ce qui décrit leurs interactions, en particulier les états liés dans les hadrons et les atomes. Une conséquence intéressante de la Relativité et de la Mécanique Quantique est que leur interaction peut être décrite en termes d'échange de particules de médiation.

Ce n'est pas difficile à comprendre.

Considérons deux particules chargées, disons un proton et un électron, séparées par une distance finie. Etant chargées elles exercent l'une sur l'autre une action Coulombienne "électronique". Supposons que nous déplaçons légèrement le proton. Le champ environnant va changer, ainsi que son influence sur l'électron. Mais la Relativité Restreinte nous dit que la perturbation ne peut pas se propager plus vite que la lumière ( pas d'action instantanée à distance).

### *Théorie des champs*

La description moderne des forces s'appuie sur la notion de champ, donc la perturbation va moduler le champ entre le proton et l'électron. La mécanique quantique considère ces modulations comme des degrés de liberté dynamiques qui doivent être quantifiés comme les autres. Les excitations minimales (quanta) du champ sont interprétées comme des particules, et l'interaction entre un proton et un électron est décrit en termes d'échange de ces particules.

Comme les équations de Maxwell nous enseignent que le champ électromagnétique a des solutions ondulatoires, dont la lumière est un exemple, nous identifierons ces particules, associées au quanta du champ, aux photons qu'Einstein a introduit pour expliquer l'effet photo-électrique.

### *Electrodynamique quantique*

La théorie quantique décrivant l'interaction entre les photons et les électrons est appelée l'électrodynamique quantique (QED pour Quantum ElectroDynamics). Cette théorie s'est révélée très fructueuse en termes de prédiction et de précision ( $10^{-11}$ ).

Il se trouve qu'on peut déduire l'électromagnétisme classique et la QED de symétries dites de "jauge", introduites dans la théorie des électrons libres. La QED est l'exemple type d'une théorie de jauge.

### ***Exemple des pions***

Regardons comment ça marche sur un exemple simple, qui nous permettra également d'introduire le concept de champ, fonction de l'espace temps dont la quantification des excitations élémentaires seront interprétées comme des particules.

Nous nous en tiendrons à la Relativité restreinte (la Relativité Générale conduisant à un formalisme complexe rarement nécessaire, sauf en cas de conditions extrêmes, à proximité d'un trou noir par exemple). Un traitement plus exhaustif du champ Relativiste est présenté en annexes B et C.

Un pion,  $\pi^+$  par exemple, a un spin de 0 et peut être représenté par un champ scalaire  $\Phi(x)$  où  $x$  représente la coordonnée d'espace temps  $x^\mu$ . Par une transformation de Lorentz  $x \rightarrow x'$  et le champ se transforme comme suit :

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \quad (6.2)$$

### ***Théorie des champs relativistes***

En théorie des champs Relativiste, il nous faut aussi décrire simultanément l'antiparticule  $\pi^-$ . Ceci est nécessaire du fait que dans les réactions énergétiques des paires de pions peuvent émerger ex nihilo. Par exemple dans les collisions proton/proton, la réaction:

$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$  est possible si l'énergie cinétique de la paire de protons incidente au centre de masse est supérieure à l'énergie de masse au repos des deux pions. On pourrait introduire deux champs scalaires  $\Phi_1(x)$  et  $\Phi_2(x)$  pour décrire respectivement le pion et l'antipion. Il est plus élégant de considérer  $\Phi_1(x)$  et  $\Phi_2(x)$  comme la partie réelle et imaginaire d'un champ complexe :

$$\Phi(x) = \rho(x) \cdot e^{i\theta(x)} = (\Phi_1(x) + i \Phi_2(x)) / \sqrt{2}.$$

### ***Équation du mouvement***

Si le champ est sans interactions, il va satisfaire l'équation (Klein-Gordon) relativiste du mouvement :

$$\square \Phi(x) \equiv (\partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2) \Phi(x) = m^2 \Phi(x) \quad (6.3)$$

où  $m$  est la masse du pion (Cette équation s'appliquant aussi pour le champ conjugué  $\Phi^*$  qui associé à  $\Phi$  peut produire deux états indépendants au lieu des deux fonctions  $\Phi_1(x)$  et  $\Phi_2(x)$ ). Cette équation est invariante par transformation de Lorentz, car le d'alembertien  $\square$  et  $m^2$  sont invariants tous les deux. Elle est la transposition, en termes d'opérateurs appliqués à la fonction d'onde, de l'équation de la norme du 4-vecteur  $\mathbf{p}$  donnée par  $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$ , ( $p \rightarrow \partial_\mu$ ).

L'équation (6.3) peut être dérivée de l'équation d'Euler Lagrange (cf B.27)

$$\partial L / \partial \Phi^* - \partial_\mu [\partial L / \partial (\partial_\mu \Phi^*)] = 0 \quad (6.4)$$

## Choix du Lagrangien

Si nous choisissons la densité de Lagrangien invariante par transformation de Lorentz  $L(x)$

$$L(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi(x))^* (\partial^\mu \Phi(x)) + \frac{1}{2} m^2 (\Phi^*(x) \Phi(x)) \quad (6.5)$$

On note la convention d'Einstein de sommation,  $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 + \partial_1 \partial^1 + \partial_2 \partial^2 + \partial_3 \partial^3$ .

### Invariance globale

On voit que (6.5) est invariant par changement de la phase d'une même valeur partout,  $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$  avec  $\alpha$  constant, du fait de la présence des fonctions conjuguées. Ceci est appelé une invariance globale du Lagrangien.

### Invariance locale

Supposons maintenant que nous voulions que le Lagrangien soit aussi invariant par un changement de phase qui pourrait avoir une valeur différente en chaque point,  $\alpha = \alpha(x)$ . Ceci est appelé une invariance locale ou encore invariance de jauge. Tel quel, les dérivées partielles ne permettent pas l'invariance. Nous sommes amenés à ajouter d'autres champs  $A_\mu(x)$  à la dérivée avec les règles suivantes:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu(x) \quad (6.6)$$

et poser

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (6.7)$$

Quand

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi(x)$$

Le champ  $A_\mu$  que nous avons ainsi introduit s'appelle le potentiel électromagnétique.

### Dérivée covariante de jauge

L'équation (6.6) définit  $D_\mu$  la dérivée covariante de jauge, qui est similaire à la dérivée covariante que nous avons introduit en Relativité Générale ( cf 3.36).

L'équation du mouvement devient alors:

$$(D_\mu D^\mu - m^2) \Phi(x) = 0 \quad (6.8)$$

qui décrit les propriétés électromagnétiques d'un champ scalaire chargé.

### Démonstration: de l'invariance du Lagrangien par la dérivée covariante de jauge

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow \partial_\mu \phi(x) - iA_\mu(x) \phi(x) \quad (6.6 \text{ bis})$$

$$D_\mu [e^{i\alpha(x)} \Phi(x)] \rightarrow \partial_\mu \phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} + i \phi(x) \cdot \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)} - i A_\mu(x) \phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} - i \phi(x) \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)} = \partial_\mu \phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} - i A_\mu(x) \phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x)$$

Le deuxième et le quatrième terme s'annulent. On peut alors mettre en facteur  $e^{i\alpha(x)}$ .

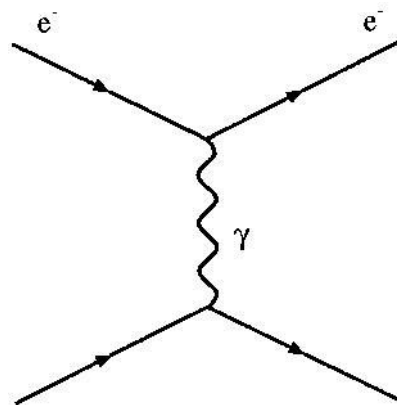
Le terme conjugué où  $\Phi^*(x) \rightarrow \Phi(x)^* e^{-i\alpha(x)}$ , donne  $e^{-i\alpha(x)} [D^\mu \phi(x)]^*$ .

Le produit  $D_\mu D^\mu = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x) e^{-i\alpha(x)} [D^\mu \phi(x)]^* = e^{-i\alpha(x)} e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x) [D^\mu \phi(x)]^* = D_\mu \phi(x) [D^\mu \phi(x)]^*$  vérifie l'invariance.

*Nota : La position de l'indice  $\mu$  dénote la convention de sommation d'Einstein. En espace de Minkowski on peut abaisser ou élever sans que cela change le résultat (ce qui ne serait pas le cas en relativité générale)*

## Diagrammes de Feynman

La manière habituelle de description des couplages par échange de particules utilise les diagrammes de Feynman, un des contributeurs majeurs à la QED. La fig 6.2 montre un tel diagramme correspondant à l'interaction de 2 électrons par échange d'un photon.



**Fig 6.2 : Diagramme de Feynman représentant la diffusion de deux électrons via un échange de photon**

Nous savons de l'étude de la désintégration du neutron, qu'il existe une autre interaction plus faible que l'électromagnétisme. C'est à cette "interaction faible" que les neutrinos sont sensibles, ce qui permet leur détection expérimentale. Cependant un neutrino de 1 Mev interagit si faiblement avec la matière que son trajet moyen d'interaction est d'environ 1 année lumière dans la matière, ce qui rend leur détection difficile.

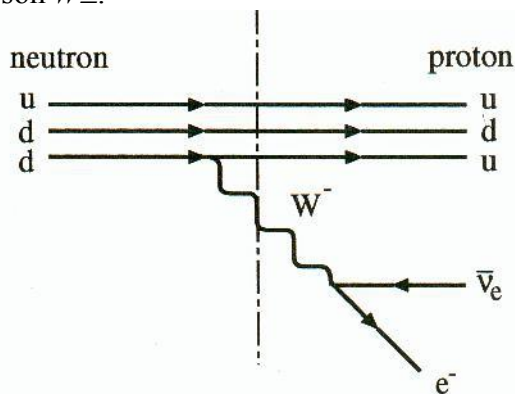
## 6-7 Bosons de jauge massifs et mécanisme de Higgs

### Interaction faible

Du fait du succès de la QED, il a paru naturel de la généraliser aux autres interactions. Dans les années 1970, une théorie de jauge de l'interaction faible a été élaborée, et sa relation avec la QED était si forte, que ces deux interactions ont été unifiées et considérées comme une seule "l'interaction électrofaible". Bien sûr à cette interaction correspond des particules échangées les bosons  $W^\pm$  et  $Z^0$ . En 1982 ces particules ont été détectées au CERN à Genève. La figure 6.3 montre la désintégration  $\beta$  du neutron par échange d'un boson  $W$ . Nous voyons que cela se



traduit par le changement de saveur d'un quark médiatisée par le courant chargé associé au boson  $W_{\pm}$ .



**Fig 6.3 : Désintégration d'un neutron en un proton, un électron et un antineutrino**

La masse de ces particules s'est révélée très élevée ( **80-90 Gev**), par opposition au photon de masse supposée nulle.

### *Mécanisme de Higgs*

Cette asymétrie de masse dans les bosons des deux interactions nécessite pour l'expliquer un mécanisme de " brisure de symétrie, appelé le Mécanisme de Higgs. Cette dernière partie de la théorie électrofaible n'a pas encore été prouvée expérimentalement. Si elle est correcte, elle implique un nouveau champ, le champ de Higgs et sa particule associée le boson de Higgs qui a la propriété de conférer une masse aux bosons  $W$  et  $Z$  ainsi que d'ailleurs aux leptons et aux quarks.

### *Potentiel associé au champ de Higgs*

Dans le modèle standard le champ de Higgs est un champ scalaire, ce qui signifie qu'il a une densité de Lagrangien du type de celle définie par l'équation (6.5) à une différence importante près car il auto interagit , ce qui peut être décrit par un potentiel  $V(\phi)$  de la forme:

$$V(\phi) = b|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 + const \quad (6.9)$$

Où  $\lambda$  doit être positif pour avoir une théorie stable (  $V$  doit être borné inférieurement).

Par contre  $b$  peut être quelconque.

S'il est positif, nous voyons que le minimum est donné par  $\phi = 0$ , ceci donne un état du vide unique et symétrique.

Par contre si  $b$  est négatif nous pouvons écrire:

$$V(\phi) = \lambda (|\phi|^2 - v^2)^2 + const \quad (6.10)$$

avec

$$v = \sqrt{-(b/2\lambda)} \quad (6.11)$$

ce qui signifie que l'état de moindre potentiel, l'état du vide, qui est l'état de moindre énergie, n'est pas donné par un champ nul  $\phi = 0$ , mais par la valeur  $|\phi| = v$ . La forme de l'équation du potentiel de Higgs (6.10) montrée en figure 6.4 est typique d'une brisure spontanée de symétrie et on montre que c'est la valeur supposée non nulle du vide du champ de Higgs qui confère une masse aux fermions et aux bosons  $W$  et  $Z$ .

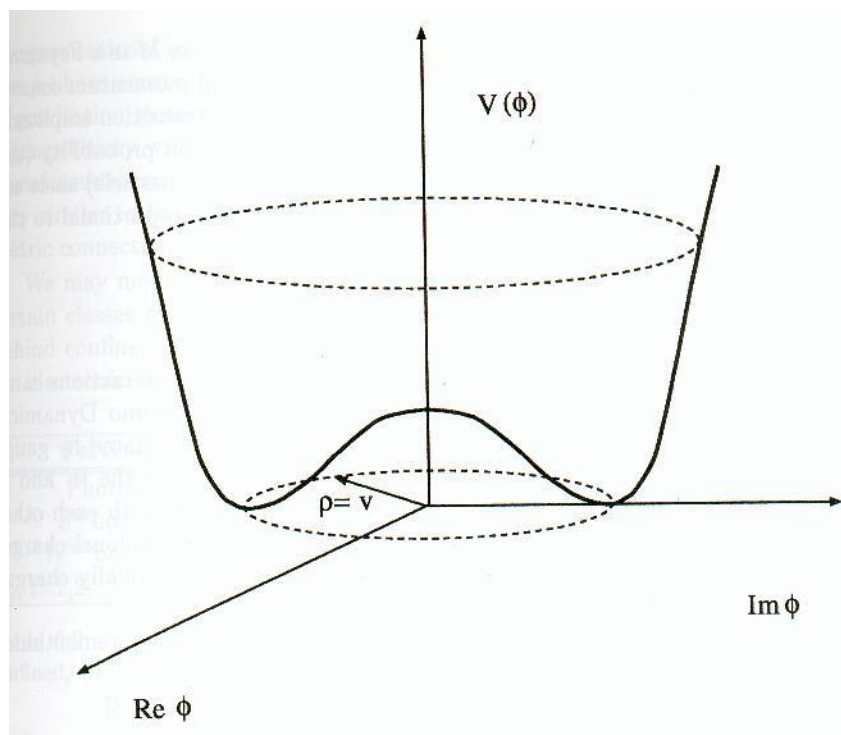


Figure 6.4 : Forme du potentiel de Higgs qui entraîne une brisure spontanée de symétrie

### *Lagrangien associé au champ de Higgs*

Sans rentrer dans les détails de la théorie des champs, il est utile pour les applications cosmologiques de donner la forme du tenseur énergie impulsion d'un champ scalaire décrit par un Lagrangien de la forme

$$L = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (6.12)$$

Le tenseur énergie impulsion associé vaut:

Le tenseur énergie impulsion associé vaut:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - L \cdot g^{\mu\nu} \quad (6.13)$$

C'est cette expression que nous allons utiliser quand nous étudierons le modèle de l'inflation en Cosmologie.

### *Boson de Higgs*

La particule de Higgs est sans doute la particule de la physique, la plus recherchée aujourd'hui. Les expérimentations au LEP du CERN nous indiquent que sa masse est supérieure à 90 Gev. La masse importante des bosons de l'interaction faible expliquent la faiblesse de cette interaction, ce qui est simple à comprendre qualitativement. En examinant, dans la figure 6.3, l'état intermédiaire indiqué par la ligne verticale pointillée, on voit que cela se passe comme si le neutron s'était désintégré en un proton et un boson  $W$ . Comme l'énergie du neutron est de **0,94 Gev** et celle du boson  $W$  de **80 Gev**, on se demande comment c'est possible du point de vue énergétique. Avons nous commis une erreur en traçant ce diagramme? Non ,car en mécanique quantique, rappelons nous que le principe de conservation de l'énergie peut être violé pendant des temps très courts. Conformément au principe d'incertitude d'Heisenberg, nous pouvons "emprunter une énergie  $\Delta E$  pendant un temps  $\Delta t$  sous réserve que  $\Delta E \Delta t < \hbar$  . Comme une fluctuation d'énergie aussi importante est peu probable, cela explique pourquoi l'interaction faible est rare , c'est à dire faible. Une particule de masse  $M$ , dans un diagramme de Feynman, qui **n'existe pas** en tant que particule **réelle**, parce qu'elle **viole** le principe de conservation de l'impulsion énergie ( appelée particule **virtuelle**) **réduit l'amplitude** de transition d'un facteur  $1/M^2$  soit un facteur de  $1/M^4$  pour la probabilité d'interaction ( la section efficace d'un processus de diffusion ou le rythme de désintégration selon le cas) car la mécanique quantique nous indique que cette probabilité est proportionnelle au carré de l'amplitude.

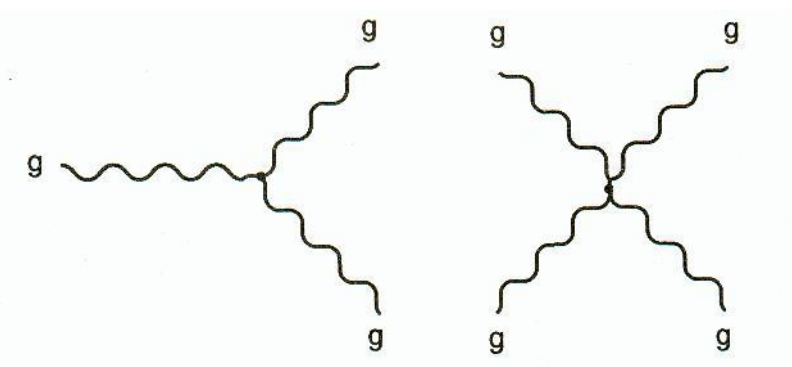
## 6.8 Gluons et gravitons

### *Interaction forte*

La théorie de l'interaction forte, la QCD ( Quantum Chromo Dynamics ) peut être présentée comme l'aboutissement le plus achevé aujourd'hui de l'application de la théorie des champs quantifiés.

### *Gluons*

La QCD nous dit que l'interaction entre les quarks est véhiculée par des bosons de jauge appelés gluons. A la différence des photons en QED ( mais conformément aux bosons de l'interaction faible) les gluons se couplent entre eux ( cf Fig 6.5).



**Figure 6.5 : Diagramme de Feynman montrant l'interaction de gluons**

Ceci est dû au fait que les gluons sont eux mêmes porteurs de la charge de couleur de l'interaction forte. A l'inverse le photon se couple avec les particules chargées, mais est lui même électriquement neutre. En fait il y a **8 gluons** différents correspondant à 8 charges

différentes. La propriété de liberté asymptotique a été vérifiée en **QCD**, qui explique comment pendant des durées très courtes les quarks et les gluons se comportent presque comme s'ils étaient des particules libres, même si cette situation ne perdure pas sur des durées plus longues. De même, on suppose que le confinement est du à l'auto interaction des gluons, bien que cela n'a pas été prouvé rigoureusement compte tenu de la complexité analytique de la théorie. Mais il y a de fortes présomptions que ce soit le cas.

### **Tableau des bosons de jauge**

Les particules de jauge sont synthétisées dans le tableau 6.2. En supplément on suppose l'existence du graviton, médiateur de l'interaction gravitationnelle, mais comme aucune théorie de gravitation quantique digne de ce nom n'existe aujourd'hui son existence reste hypothétique. La théorie de la Relativité Générale d'Einstein a une structure de théorie de jauge ( les transformations de jauge, étant liées à l'invariance par transformation générale de coordonnées). Le tenseur de Riemann en Relativité générale s'identifie à l'intensité du champ d'une théorie de jauge non abélienne comme la QCD, les connexions métriques jouant le rôle du potentiel de jauge.

<b>Particule</b>	<b>Interaction</b>	<b>Masse</b>	<b>Charge électrique</b>	<b>spin</b>
<b>Photon</b>	<b>Electromagnétique</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>Boson <math>Z^0</math></b>	<b>Faible ( courant neutre)</b>	<b>91 Gev</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>Bosons <math>W_{\pm}</math></b>	<b>Faible ( courant chargé)</b>	<b>80 Gev</b>	<b><math>\pm 1</math></b>	<b>1</b>
<b><math>G_i, i=1,2,\dots,8</math> (gluons)</b>	<b>Forte</b>	<b>0*</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>Graviton (hypothétique)</b>	<b>Gravitationnelle</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>
<b>Boson de Higgs</b>	<b>Mécanisme de Higgs</b>	<b>&gt; 90 Gev</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

\* Comme les gluons sont "confinés" leur masse est indéterminée.

Signalons que des développements récents dans certaines théories de jauge, permettraient d'expliquer le mécanisme du confinement ( par des propriétés de dualité).

### **Etats dans le modèle standard**

Si nous continuons de recenser les états d'hélicité dans le modèle standard, au **45 états** déjà trouvés nous devons en ajouter deux pour le photon et pour chacun des huit gluons. Comme ils ont un spin de **1** ( $s = 1$ ), cela signifie qu'ils peuvent avoir  **$2s+1$**  états d'hélicité, soit 3 états, mais étant sans masse seules les **hélicités +1 et -1** sont permises soit deux états seulement. Les bosons  **$W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$**  sont des particules massives de **spin 1**, qui possèdent donc 3 états d'hélicité chacune. Le boson de **Higgs est de spin 0** et électriquement neutre, donc possède un seul état.

Le total vient donc à  **$90 + 18 + 9 + 1 = 118$** .

Expliquer l'existence de ces **118 états**, est une des tâches les plus importantes de la théorie des particules moderne, dont nous pouvons espérer qu'elle nous montrera qu'il existe une structure plus vaste, unifiant ces états comme des degrés de liberté d'un objet plus fondamental

## **6.9 Au delà du modèle standard**

Le modèle standard s'est révélé très efficace, pour expliquer et interpréter toutes les expériences et observations relatives aux trois forces fondamentales : l'électromagnétisme, l'interaction faible, et l'interaction forte. Pourtant, beaucoup de problèmes fondamentaux sont loin d'être résolus, ce qui nous incite à chercher une théorie plus fondamentale.

- Qu'est ce qui détermine les masses et les couplages des particules du modèle standard. Existe t'il un principe unificateur ?

- Nous sommes amenés à supposer que les constantes de couplage des interactions électromagnétiques, faibles et fortes dépendent du niveau d'énergie de telle sorte qu'elles s'unifient à très haute énergie (autour de  $10^{15}$ -  $10^{16}$  GeV). Est ce une coïncidence ou existe il une théorie de grande unification ( TGU), qui unifie toutes les forces à cette échelle.

Pourquoi l'échelle de grande unification et l'échelle de masse de la gravitation, la masse de Planck sont elles énormément plus élevées que les masses qu'on observe dans le modèle standard ?

En particulier si on calcule la contribution à la masse du boson de Higgs, qui viendrait des corrections quantiques (particules virtuelles) à l'échelle de TGU ; les masses du boson de Higgs et aussi des bosons  $Z^0$  et  $W^+$  deviennent énormes. Qu'est ce qui les empêche de devenir énorme.

- Comment décrire la gravitation quantique ? Comment unifier la gravitation quantique avec les trois autres forces fondamentales.

- Pourquoi y a il plus de matière que d'antimatière dans l'univers ? Dans le modèle standard , il y a une différence absolument minuscule entre les particules et antiparticules ( Ce qu'on appelle la violation CP), mais cette différence ne semble pas suffisante pour expliquer l'asymétrie baryonique de l'univers ( voir chapitre 1.3).

Ces questions demeurent sans réponse, mais nous croyons que nous avons de bonnes chances de les trouver dans les théories des supercordes et celles qui en dérivent. Dans l'attente d'une théorie achevée, nous pouvons examiner quelques caractéristiques que ces théories prédisent. En particulier la grande disparité des masses à l'échelle de la TGU et à la notre que nous avons mentionné peut s'expliquer s'il existe un nouveau type de symétrie, appelé supersymétrie dans une nouvelle théorie. Autre point intéressant, la supersymétrie semble nécessaire pour unifier la gravitation avec les autres forces.

### **6.9.1 Supersymétrie**

La supersymétrie est une symétrie entre les bosons et les fermions. Dans une théorie supersymétrique , la première chose, c'est qu'il y ait un nombre égal d'états d'hélicité pour les bosons et les fermions. Donc, a un photon de spin 1 doit correspondre une particule de spin  $\frac{1}{2}$  appelée photino. Au spin  $\frac{1}{2}$  des fermions doivent correspondre des sfermions de spin 0 (squarks et sleptons). Les partenaires supersymétriques des  $Z^0$ ,  $W^+$ , des gluons et des bosons de Higgs sont les zinos, les winos, les gluinos et higgsinos de spin  $\frac{1}{2}$ . Les particules neutres sont des particules de Majorana, qui sont leurs propres antiparticules. De plus si la supersymétrie n'est pas brisée, les particules doivent avoir les mêmes masses que leurs superpartenaires respectifs. Cette dernière propriété n'est manifestement pas satisfaite ( un selectron de 511 KeV de masse est hors de question, il aurait été détecté , la limite pratique de masse obtenue par les grands accélérateurs est de 100 GeV environ !). Il est intéressant de noter que la supersymétrie peut être brisée de sorte à expliquer le problème de masse lié au boson de Higgs et cependant conserver les autres caractéristiques intéressantes de la théorie de grande unification. Pour cela, cependant, il faut que la plus légère des particules supersymétrique ait une masse inférieure à quelques centaines de GeV, ce qui suscite un

intérêt évident pour des programmes de recherche de ces particules, dans les plus grands accélérateurs modernes. Beaucoup de théories supersymétriques font apparaître un nombre quantique conservé multiplicativement (appelé parité-R) qui a la valeur +1 pour les particules ordinaires et -1 pour les particules supersymétriques. Ceci implique que les particules supersymétriques ne peuvent être créées ou annihilées que par paires. Cela implique, de fait, qu'une particule supersymétrique unique, ne peut pas se désintégrer en particule ordinaire. Si elle est lourde, elle peut se désintégrer en une particule supersymétrique plus légère plus des particules ordinaires. De ceci il résulte que la particule supersymétrique la plus légère est stable, car il n'existe pas d'état dans lequel elle puisse se désintégrer.

Si la supersymétrie existe, cela a des conséquences importantes en cosmologie. Dans l'univers primordial, la contribution des champs supersymétriques à l'énergie potentielle effective, a pu être très importante, et déclencher l'inflation, entre autres. Peu après le Big Bang, quand l'énergie thermique était élevée, comparativement à la masse des superparticules, ces particules ont pu être produites par paires en grande quantité. Puis quand l'univers s'est refroidi et étendu, la plupart se sont désintégrées sauf la plus légère qui est stable. Ces particules peuvent exister alors en tant que résidu du Big Bang. Si elles sont électriquement neutres, elles doivent interagir très faiblement avec la matière (comme les neutrinos), mais étant massives elles peuvent contribuer à la matière noire de l'univers. Plus tard nous verrons comment calculer la densité du résidu de telles particules.

Dans les théories supersymétriques, le candidat le plus probable pour la matière noire est une superposition quantique, appelé neutralino  $\chi$  de fermions neutres supersymétriques.

$$\chi = N_1 \tilde{\gamma} + N_2 \tilde{Z}^0 + N_3 \tilde{H}_1^0 + N_4 \tilde{H}_2^0 \quad (6.14)$$

où  $\tilde{\gamma}$  est le photino,  $\tilde{Z}^0$  le Zino, et  $\tilde{H}_1^0$  et  $\tilde{H}_2^0$  sont les superpartenaires des deux particules différentes scalaires neutres de Higgs qui sont imposées par les théories supersymétriques. Les coefficients  $N_i$  sont normalisés de sorte que:

$$\sum_{i=1}^4 |N_i|^2 = 1 \quad (6.15)$$

Quelquefois on définit le paramètre jaugino

$$Z_g = |N_1|^2 + |N_2|^2 \quad (6.16)$$

et le paramètre higgsino

$$Z_h = |N_3|^2 + |N_4|^2 \quad (6.17)$$

La masse et la composition du neutralino le plus léger, dépend de plusieurs paramètres actuellement inconnus de la théorie supersymétrique. L'approche habituelle consiste à balayer une large gamme de valeurs des paramètres, et à calculer les quantités pertinentes pour le jeu de paramètres sélectionné. Dans les modèles cosmologiques intéressants, en général, le neutralino le plus léger est un higgsino, si la masse est élevée (de quelques centaines de GeV à quelques TeV), et un jaugino ou un mélange complet de jaugino et higgsino pour des modèles prédisant des masses plus faibles (la masse la plus faible compatible avec les expérimentations avec les

accélérateurs serait de 20-30 GeV) . Aujourd'hui c'est le neutralino qui tient la corde pour la matière noire, et de nombreuses expériences tentent de le détecter. Nous y reviendrons plus tard..

## 6-10 Un peu de phénoménologie des particules

Dans les chapitres précédents nous avons parlé de particules variées comme les protons, neutrons, pions et leurs constituants, les quarks. Les leptons: électrons, muons et  $\tau$  leptons avec leurs neutrinos respectifs sont pour autant que nous le sachions élémentaires. Tous ont joué un rôle important dans l'Univers primitif quand la température était très haute, et beaucoup jouent un rôle important aujourd'hui dans divers phénomènes astrophysiques.

Bien que les quarks et les leptons sont intégrés dans le modèle standard au même plan, la phénoménologie engendrée par les quarks est bien plus riche que celle des leptons. Ceci est dû au fait que les quarks sont forcés de former des états liés, sous l'emprise de l'interaction forte.

Comme les quarks  $u, d$  et  $s$  sont bien plus légers que les trois autres, les hadrons ( baryons et mésons) qu'ils forment sont les plus faciles à étudier dans les accélérateurs, et ils ont été les premiers à être investigués expérimentalement. Avant 1973, ils étaient les seuls quarks connus.

Comme l'interaction forte (à la différence de l'électrofaible) est la même pour tous les quarks indépendamment de leur saveur, ceci doit se retrouver dans les propriétés des hadrons.

En fait le neutron et le proton sont deux particules assez semblables.

Elles ont le même spin  $\hbar/2$ , un couplage à l'interaction forte très semblable et une masse qui ne diffère que de moins de 1%. La différence principale est la charge électrique, qui peut s'expliquer comme nous l'avons vu par la différence de charge des quarks.

En fait la petite différence de masse pourrait aussi s'expliquer par la différence des masses des quarks  $u$  et  $d$  et une possible contribution électromagnétique liée à la différence des charges.

Alors, il semble que les hadrons devraient refléter une symétrie vis à vis de l'échange des quarks  $u$  et  $d$  qui devrait produire des hadrons très similaires (en particulier la masse ne devrait pas beaucoup changer)

En mécanique quantique, les symétries telles que celle (approximative) liée à l'échange des saveurs de quarks, sont générées par ce que nous appellerons des opérateurs unitaires.

Si nous nous limitons aux quarks  $u$  et  $d$  seulement, il semble que nous pouvons remplacer le doublet  $(u, d)$  par une combinaison linéaire

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

sans changer l'interaction forte. Ceci implique une symétrie appelée "invariance d'isospin" pour l'interaction forte à basse énergie. Cependant les autres quarks sont beaucoup plus massifs et en conséquence leurs symétries de saveur ne sont pas aussi bien respectées.

### 6.10.1 Estimation des sections efficaces

Le calcul des sections efficaces de collision et d'annihilation, et de désintégration des particules est une des tâches importantes de la physique. Nous allons ici faire une brève description de la méthode, et nous concentrer sur une estimation "à la louche" qui peut être très utile en cosmologie et astrophysique.

Pour la microphysique locale dans le modèle FLRW, nous ne considérerons que trois interactions ( électromagnétique, faible et forte). L'interaction gravitationnelle est complètement négligeable entre les particules élémentaires, par exemple la force gravitationnelle entre un proton et un électron dans un atome d'hydrogène est environ  $10^{40}$  fois plus faible que la force électromagnétique.

Par contre la gravitation, du fait de son action à grande distance doit être prise en compte pour son influence sur la métrique. Cela signifie que la dilution des densités numériques liée à la dépendance temporelle du facteur d'échelle  $a(t)$  doit être considéré. Au prochain chapitre nous verrons comment. Commençons par la force des interactions.

La force de l'interaction électromagnétique est régie par la constante de couplage électromagnétique  $g_{em}$  qui est simplement la charge électrique. Comme d'habitude nous prendrons la charge du proton  $e$  comme unité et nous pouvons écrire :

$$g_{em} = Qe \quad (6.19)$$

où  $Q$  est la charge de la particule en unités de charge du proton (pour un quark  $u$ , par exemple,  $Qu = +2/3$ ). Dans notre système d'unités,

$$e^2/4\pi = \alpha_{em} \quad (6.20)$$

où  $\alpha_{em}$  est appelée la constante de structure qui a une valeur d'environ 1/137 à basse énergie<sup>1</sup> (Habituellement on la note simplement  $\alpha$  sans l'indice.) La constante de couplage faible est d'un ordre de grandeur semblable:

$$g_{weak} = e/\sin\theta_w \quad (6.21)$$

avec  $\theta_w$  qui est l'angle d'interaction faible ( de Weinberg) et qui a une valeur numérique donnée par  $\sin^2\theta_w = 0,23$ . Le fait que les constantes de couplage des interactions faibles et électromagnétiques soient du même ordre de grandeur est bien sûr lié au fait qu'elles sont unifiées dans le modèle standard par l'interaction électrofaible.

La constante de couplage de l'interaction forte  $g_s$  est passablement plus élevée. Aussi, elle décroît plus vite en fonction du niveau d'énergie que la constante électromagnétique. A des énergies de quelques Gev on a:

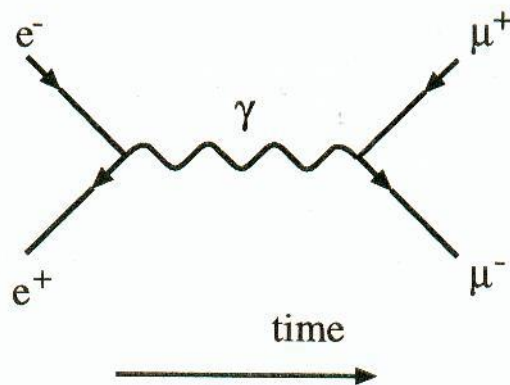
$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi} \sim 0.3 \quad (6.22)$$

Examinons un diagramme de Feynman pour un processus simple tel que  $e+e- \rightarrow \mu+\mu-$  (Fig. (6.6). L'amplitude sera proportionnelle aux constantes de couplage aux deux sommets qui dans ce cas sont toutes les deux égales à  $e$ . La section efficace étant proportionnelle au carré de l'amplitude, est alors proportionnelle à  $e^4 \propto (\alpha/4\pi)^2$

---

<sup>1</sup> Ces constantes de couplage, comme les autres dépendent de l'échelle d'énergie, par exemple, à 100 Gev,  $\alpha_{em} = 1/128$ .





**Figure 6.6:** Un diagramme de Feynman représentant la transmutation d'un électron et d'un positron en une paire de Muons ( via un photon virtuel).

Si nous considérons l'énergie totale de la paire  $e^+e^-$  dans le référentiel associé au centre d'impulsion, nous avons vu qu'on pouvait l'exprimer  $E(e^+) + E(e^-) = \sqrt{s}$ . Comme dans ce référentiel l'Impulsion totale est nulle, la quadri impulsion  $p^\mu = (\sqrt{s}, 0, 0, 0)$  est identique à celle d'une particule massive de masse  $\sqrt{s}$  au repos.

La conservation de l'énergie et de l'impulsion implique que le photon dans l'état intermédiaire doit avoir cette impulsion. Comme un photon se propageant librement est sans masse, cela veut dire que ce photon est virtuel dans une large mesure. Dans la théorie quantique des champs, on montre que l'apparition d'un état intermédiaire de masse virtuelle  $\sqrt{s}$  pour une particule de masse réelle  $M_i$  provoque une réduction de l'amplitude ( de la transition) par un facteur de (appelé facteur de propagation)

$$P(s) = 1/(s - m_i^2) \tag{6.23}$$

Dans ce cas ( $m\gamma = 0$ ) ce qui implique un facteur de correction de  $1/s$ .

Les particules sortantes ( ici les muons ) offrent un grand nombre de possibilités pour l'état final ( par exemple tous les angles de diffusion possibles dans le référentiel du centre d'impulsion). Ceci doit être imputé via le facteur spatial de phase  $\phi$ , qui généralement croît avec  $s$  pour les hautes énergies. Pour une section efficace  $\sigma$ .

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = const \cdot \phi \cdot \left(\frac{\alpha^2}{s^2}\right)$$

Si  $s$  est grand comparé à  $m_e^2$  et  $m_\mu^2$ ,  $\phi \propto s$ , et

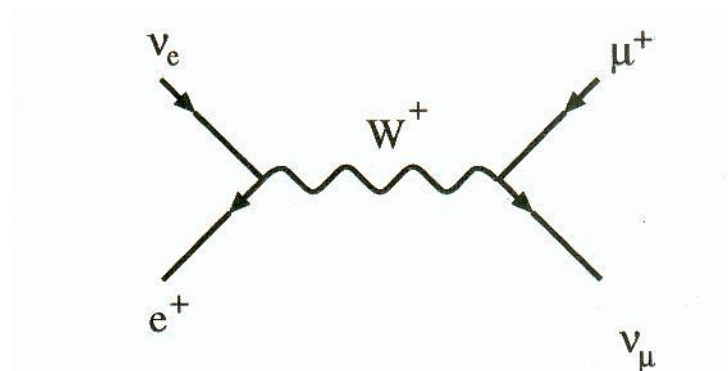
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \sim \frac{\alpha^2}{s}$$

Ce n'est pas une expression exacte. Un calcul rigoureux ( voir § suivant et annexe D.2) donne  $4\pi\alpha^2/3s$ , mais c'est étonnement précis et souvent assez précis pour les estimations dont nous avons besoin dans la cosmologie du big bang.

Comme la valeur de la constante de couplage faible est du même ordre que celle de l'électromagnétisme, la même formule est valide, par exemple  $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$  qui s'opère via l'échange d'un  $W^-$  ( voir fig 6.7). La seule substitution à faire est  $1/s \rightarrow 1/(s - m_w^2)$  pour le propagateur, alors:

$$\sigma(\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-) \sim \frac{\alpha^2 s}{(s - m_w^2)^2}$$

quand  $s \ll m_w^2$ , cela donne  $\sigma_{weak} \approx \alpha^2 s / m_w^4$ , ce qui est une section efficace minuscule, pour par exemple des énergies de l'ordre du Mev ( mais remarquons l'accroissement avec l'énergie lié au facteur s ). C'est la raison historique de la dénomination "interaction faible", qui n'est pas appropriée comme nous le verrons aux hautes énergies ( bien plus hautes que  $m_w$  ), ou deux types de section efficace deviennent de taille semblables.

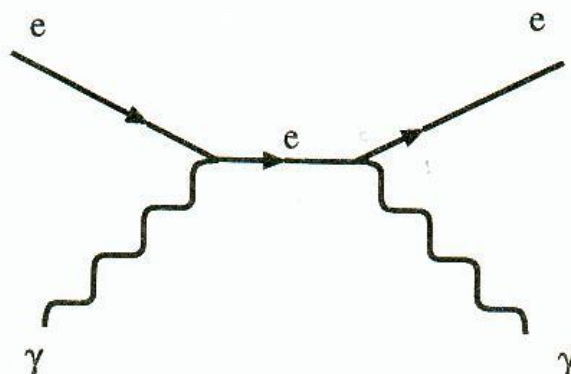


**Figure 6.7 :** Diagramme de Feynman représentant l'annihilation / création d'un positron et d'un neutrino électronique en un muon et un neutrino muonique.

Remarquons qu'une fois qu'on a noté les facteurs des constantes de couplage et les propagateurs, la taille de la section efficace peut souvent être estimée simplement par analyse dimensionnelle. Une section efficace à la dimension d'une surface, ce qui dans nos unités correspond à (masse)<sup>-2</sup>. Il est très utile de vérifier que les expressions (6.25) et (6.26) ont bien les bonnes dimensions.

Un fermion a un propagateur qui se comporte en  $1/m$  au lieu de  $1/m^2$  aux basses énergies. Ceci signifie que la section efficace de Thompson  $\sigma(\gamma_e \rightarrow \gamma_e)$  à basse énergie  $E\gamma \ll m_e$  peut être estimée à ( voir fig 6.8):

$$\sigma_T \equiv \sigma(\gamma e \rightarrow \gamma e) \sim \frac{\alpha^2}{m_e^2}$$



**Fig 6.8** : Diagramme de Feynman représentant un processus  $\gamma_e \rightarrow \gamma_e$  (Diffusion Thompson)

## 6-11 Exemple de calcul de section efficace

Pour les applications cosmologiques et astrophysiques, les estimations suivantes simples seront satisfaisantes. Cependant il y a des cas où il sera nécessaire de faire appel à des formules plus précises ( ou quand il y aura ambiguïté sur l'échelle de masse à considérer for ces estimations). Ici nous allons proposer des estimations pertinentes dans le cadre d'applications décrites dans cet ouvrage. Les calculs détaillés nécessitent de connaître l'équation de Dirac et sont discutées dans l'annexe D. Nous résumons ici le cadre général et les principaux résultats.

### 6-11-1 Définition de la section efficace.

Dans l'annexe D, nous montrons que la différentielle de la section efficace  $d\sigma/dt$  pour un processus de diffusion  $2 \rightarrow 2$ ,  $a+b \rightarrow c+d$ , est donnée par l'expression.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\tilde{T}|^2}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}$$

où ( cf § 2.4.3),  $t = (p_a - p_c)^2$  et  $s = (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2$ . Ici  $|\mathbf{T}|^2$  est l'amplitude polarisée sommée de transition de la mécanique quantique élevée au carré. Les limites d'intégration pour la variable  $t$  sont données en (2.59).

Un calcul typique ( annexe D) implique le calcul de l'élément de matrice en termes de  $s$  et  $t$  et d'opérer l'intégration sur  $t$  pour obtenir la section efficace globale.

Dans l'approximation d'échange d'un photon, la section efficace pour la transition:

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

vaut :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{s} v \left(1 - \frac{v^2}{3}\right) \quad (6.29)$$

Où la seule approximation a été de négliger  $m_e$  ( ceci est justifié du fait que  $m_e^2/m_\mu^2 \ll 1$ . Ici  $v$  est la vitesse d'un des muons sortants dans le référentiel du centre d'impulsion,  $v = \sqrt{1-4m_\mu^2/s}$ . dans la limite relativiste où  $s \gg m_\mu^2$  ( $v \rightarrow 1$ ), ceci devient :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)_{\text{large } s} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (6.30)$$

comme indiqué précédemment.

### 6-11-2 Interaction de neutrinos

Pour le processus  $\nu_e e^- \rightarrow \nu_\mu \mu^-$ , la section efficace vaut:

$$\sigma(\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-)_{m_\mu^2 \ll s \ll m_W^2} = \frac{g_{\text{weak}}^4 s}{96\pi m_W^4} \quad (6.31)$$

Avant que l'on sache que les bosons existent, Fermi avait écrit une théorie phénoménologique pour l'interaction faible avec une constante dimensionnée ( la constante de Fermi)  $G_F$ . La relation est :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_{\text{weak}}^2}{8m_W^2} \simeq 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (6.32)$$

En utilisant la section efficace on peut simplement l'écrire:

$$\sigma(\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-)_{m_\mu^2 \ll s \ll m_W^2} = \frac{G_F s}{3\pi} \quad (6.33)$$

Nous observons que la section efficace s'accroît avec  $s \approx 2 E_\nu m_e$  et donc linéairement avec l'énergie du neutrino.

Quand  $s$  commence à s'approcher de  $m_w$ , le propagateur de  $W$   $1/(s - m_w^2)$  doit être traité avec précaution. Cela peut être amélioré en l'écrivant dans la forme de Breit Wigner.

$$\frac{1}{s - m_W^2} \rightarrow \frac{1}{s - m_w^2 + i\Gamma m_W} \quad (6.34)$$

où  $\Gamma$  est la largeur totale de désintégration ( environ 2 Gev) du  $W$ . Nous voyons donc qu'une amélioration significative de la section efficace est possible pour  $s \approx m_w^2$ . Ceci est un exemple d'effet de résonance dans le canal  $s$ . Pour un électron cible au repos cette résonance se produit à **6,3 PeV** ( appelée résonance de Glashow). S'il existe des sources astrophysiques qui produisent des antineutrinos électroniques de telles énergies, alors les possibilités de les détecter s'en trouveraient grandement améliorées. Juste au dessus de la résonance la section efficace va décroître en  $1/s$ , comme c'était le cas dans le processus

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

Nous pouvons remarquer que ce dernier processus  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ , reçoit aussi une contribution d'un boson intermédiaire  $Z$ . A basse énergie elle est complètement négligeable, mais du fait de l'amplification par la résonance elle va dominer vers  $s = m_z^2$ . L'étude des bosons  $Z$  au LEP du

CERN utilisent cette propriété ( où toutes les autres paires fermions / antifermions sont produites sauf tt, qui n'est cinématiquement pas possible. Un calcul complet doit additionner de façon cohérente les deux contributions qui peuvent interférer de manière intéressante, produisant par exemple une asymétrie avant/arrière entre les deux muons sortants.

### 6-11-3 le système $\gamma\gamma e$ .

En permutant de différentes façons, les particules incidentes et sortantes, l'interaction de base (montrée sur la figure 6.8) peut décrire  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ , et  $\gamma e^+ \rightarrow \gamma e^+$ .

Pour  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  le résultat est

$$\sigma(\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-) = \frac{\pi\alpha^2}{2m_e^2} (1-v^2) \left[ (3-v^4) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) + 2v(v^2-2) \right] \quad (6.35)$$

où  $v$  est maintenant la vitesse d'un des électrons produits dans le centre du moment d'inertie (impulsion)  $v = \sqrt{1-4m_e^2/s}$ . Près du seuil, pour  $v$  petit, l'expression entre crochets peut être développée en série et donner  $2v + \mathcal{O}(v^2)$ , et donc

$$\sigma(\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-)_{\text{small } v} \simeq \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} \quad (6.36)$$

Pour l'autre extrême,  $v \rightarrow 1$  on obtient :

$$\sigma(\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-)_{s \gg 4m_e^2} \simeq \frac{4\pi\alpha^2}{s} \left[ \ln\left(\frac{\sqrt{s}}{m_e}\right) - 1 \right] \quad (6.37)$$

On voit avec satisfaction que nous aurions pu estimer la plupart de ces résultats, avec une bonne approximation par des arguments dimensionnels et application des règles de comptage des vertex. A basse énergie la seule échelle de masse disponible est  $m_e$ , donc on pouvait s'attendre au facteur  $\alpha^2/m_e^2$ . On pouvait s'attendre au facteur  $v$  avec un peu plus de connaissance des amplitudes d'onde partielles. A basse énergie l'amplitude  $l=0$  (onde  $S$ ) doit dominer, et ceci contribue à la section efficace proportionnellement à  $v$ . Une onde partielle  $l$  contribue à la section efficace totale avec un terme proportionnel à  $v^{2l+1}$ . [Nous voyons (6.29) que dans le cas  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  l'onde  $S$  domine à basse énergie, mais que quand  $v \rightarrow 1$ , la contribution de l'onde  $P$  est  $1/3$ ]

A haute énergie, quand  $m_e$  peut être négligé, la dimension est portée par  $s$ . Seul le facteur de correction logarithmique dans (6.37) ne pouvait pas être facilement deviné.

Il ressort de ces formules que la section efficace de  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  croît depuis un seuil jusqu'à un maximum à des énergies intermédiaires et décroît environ en  $1/s$  à plus haute énergie ( voir fig 6.9).

Les résultats de la réaction inverse  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  sont bien sûr très similaires. Maintenant le processus est toujours au dessus du seuil. Pour  $v \rightarrow 0$  ( avec  $v$  qui est maintenant la vitesse d'une particule incidente dans le centre d'impulsion, est toujours donné par la formule

$v = \sqrt{1-4m_e^2/s}$ , le facteur de flux en  $1/v$  dans (D7) diverge. Comme les photons

sortants vont toujours à la vitesse  $v = c = 1$ , il n'y a pas de facteur de suppression d'onde partielle, et on peut s'attendre à ce que la section efficace à basse énergie se comporte comme :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{low energy}} \sim \frac{\alpha^2}{vm_e^2} \quad (6.38)$$

et le comportement à haute énergie obéit à la même formule avec  $m_e^2$  remplacé par  $s$  ( et un éventuel facteur logarithmique). Ces suppositions sont portées par le calcul effectif qui donne :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\pi\alpha^2(1-v^2)}{2vm_e^2} \left[ \frac{3-v^4}{2v} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - 2 + v^2 \right] \quad (6.39)$$

Notons la similitude avec (6.35)

Finalment intéressons nous à la diffusion Compton  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ . D'habitude on a un faisceau de photons d'énergie  $\omega$  qui frappent des électrons au repos. Pour un angle de diffusion  $\theta$ , par rapport au faisceau incident, l'énergie du photon sortant  $\omega'$  est donnée par la conservation de l'énergie impulsion selon :

$$\omega' = \frac{m_e\omega}{m_e + \omega(1 - \cos\theta)} \quad (6.40)$$

Dans ce référentiel, la section efficace différentielle non polarisée, calculée en premier par Klein et Nishina vaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m_e^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (6.41)$$

En intégrant sur tous les angles possibles de diffusion, cela donne la section efficace totale

$$\sigma(\gamma + e \rightarrow \gamma + e) = \frac{\pi\alpha^2(1-v)}{m_e^2v^3} \times \left[ \frac{4v}{1+v} + (v^2 + 2v - 2) \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - \frac{2v^3(1+2v)}{(1+v)^2} \right] \quad (6.42)$$

où  $v$  est maintenant la vitesse incidente de l'électron par rapport au centre d'impulsion  $v = (s - m_e^2)/(s + m_e^2)$ . Si on développe ce résultat autour de  $v = 0$ , on retrouve le résultat de la diffusion Thomson.

$$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} \quad (6.43)$$

et pour  $s$  grand ( régime de Klein Nishima) on a

$$\sigma_{\text{KN}} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left[ \ln\left(\frac{s}{m_e^2}\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (6.44)$$

Nous voyons que pour des énergies bien supérieures à  $m_e$ , c'est à dire en régime Klein Nishina, la section efficace de diffusion Compton décroît rapidement.

Cette formule a beaucoup d'applications. Dans le cas classique de diffusion Compton, l'énergie du photon sortant est toujours inférieure à celle du photon entrant. Donc des photons



énergétiques traversant un « gaz » d'électrons froids vont être refroidis par la diffusion Compton. Dans d'autres cas ( par exemple, le RFC traversant un amas de galaxies avec gaz chaud) , les électrons énergétiques peuvent transférer de l'énergie aux photons et les « réchauffer », ce qu'on appelle parfois l'effet Compton inverse ( bien que, si nous exprimons l'énergie en fonction de  $s$  , ce soit la même formule qui s'applique dans les deux cas).

Dans le cas d'une application numérique concrète, pour la section efficace (qui a les dimensions d'une surface), dans nos unités, un facteur de conversion utile est

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0.389 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \quad (6.45)$$

La figure 6.9 résume ces résultats numériques. Les sections efficaces sont montrées (en  $\text{cm}^2$ ) pour  $\gamma\gamma \rightarrow ee$ ,  $ee \rightarrow \gamma\gamma$  et  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  en fonction de l'énergie disponible au centre d'impulsion, en unités de masses d'électron

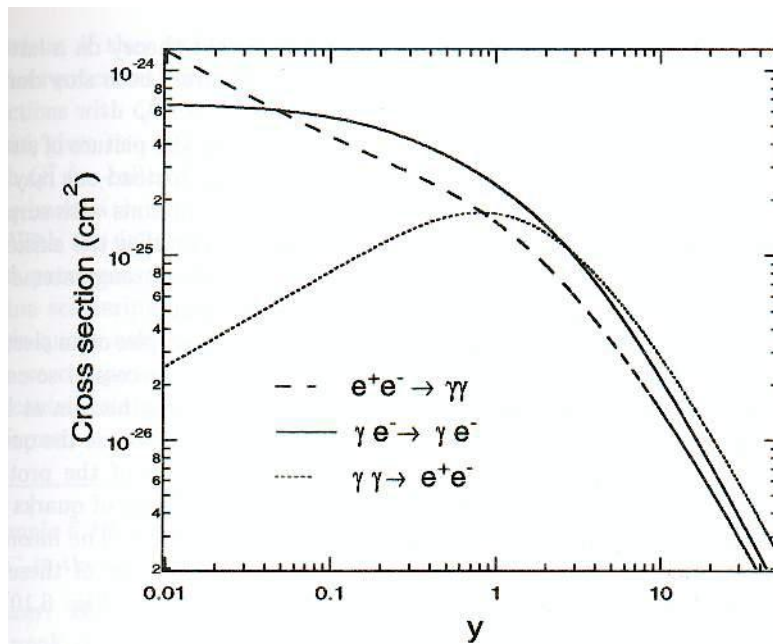
$$y = \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s_{\min}}}{m_e} \quad (6.46)$$

où  $\sqrt{s_{\min}} = 2m_e$  pour  $\gamma\gamma \rightarrow ee$  et  $ee \rightarrow \gamma\gamma$ , et  $\sqrt{s_{\min}} = m_e$  pour la diffusion Compton  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . Nous voyons sur cette figure les différents comportements à basse énergie ( $y$  petit) déjà présentés, mais elle montre une décroissance similaire à haute énergie.

Un autre processus d'un grand intérêt en astrophysique st le rayonnement de freinage. Il s'agit démission de photons par des particules chargées qui sont accélérées ou décélérées. Si cette accélération est due à un mouvement circulaire dans un champ magnétique, on parle de rayonnement synchrotron. Dans ces processus, à la différence de la diffusion Compton, le nombre de photons peut changer. Ceci est nécessaire si l'équilibre thermique doit être maintenu, car nous avons vu que la densité numérique de photons dépend fortement de la température. La plupart des photons produits, par ce rayonnement de freinage, ont des énergies faibles (grande longueur d'onde).

Si des électrons rapides passent par là, ces photons poussifs peuvent être revigorés par une diffusion Compton inverse. Ceci peut explique les observations de photons très énergétiques dans les noyaux de galaxies actives ( voir chapitre 14).

Pour plus de détails référez vous à un ouvrage traitant de l'électrodynamique quantique dans la théorie quantique des champs.



**Figure 6.9** : Section efficace (en  $\text{cm}^2$ ) pour les processus d'annihilation de photons,  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  et la diffusion Compton en fonction de l'énergie (en masses d'électrons) disponible au centre d'impulsion

## 6-12 Processus impliquant les Hadrons

En fait les calculs développés ci avant s'appliquent mal du fait que la constante de couplage liée à l'interaction forte est élevée ( 0,2 à 10 Gev) et que l'approximation au premier ordre qui était permise dans le cas précédent ( constante de couplage  $\ll 1$  ) ne donne plus de résultats corrects.



## Chapitre 7: Thermodynamique de l'Univers primordial

### 7-1 Introduction

Nous allons maintenant nous intéresser aux conséquences du modèle de Big bang chaud, basé sur la métrique FLRW qui stipule que l'Univers a débuté par un état bien plus chaud et dense que ce que nous observons aujourd'hui. En particulier, nous verrons comment nous pouvons suivre l'évolution des densités des différents types de particules et de rayonnement tout au long de l'histoire de l'Univers primordial. Ceci nous permettra de faire certaines prédictions pour les abondances des éléments légers, des photons et des neutrinos que nous devrions observer aujourd'hui. L'accord entre les calculs et les observations de concentration d'hélium, de deutérium, et de lithium est une des pierres angulaires du scénario de big bang.

Comme d'habitude pour simplifier la notation nous posons :

$$c = \hbar = 1 \quad (7.1)$$

ce qui signifie, comme nous l'avons vu en section 2.4.1, que toutes les grandeurs dimensionnées peuvent être exprimées en terme de masse-énergie, eV (ou plutôt MeV et GeV). Pour obtenir ces grandeurs en unités SI, on doit réintroduire les puissances appropriées de  $\hbar$  et  $c$  dans l'expression finale. Les puissances à introduire sont en général déterminées par l'analyse dimensionnelle (section 2.4.2).

Par exemple, pour écrire la constante de la gravitation en termes de masse de Planck, regardons la valeur dimensionnée :

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad (7.2)$$

Ensuite nous l'écrivons sous forme de produit  $\hbar^\alpha c^\beta m_{pl}^\gamma$ , où les constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  peuvent être déterminées en imposant que la combinaison ait la même dimension que  $G$ . Ceci définit une masse de Planck telle que :

$$G = \hbar c / m_{pl}^2 \quad (7.3)$$

De valeur numérique :

$$m_{pl} = (\hbar c / G)^{1/2} = 1.221 \cdot 10^9 \text{ GeV} / c^2 \quad (7.4)$$

soit en posant  $c = 1$

$$m_{pl} = 1.221 \cdot 10^9 \text{ GeV} \quad (7.5)$$

C'est une masse énorme, nous verrons que la particule élémentaire la plus lourde connue aujourd'hui est le quark  $t$  de masse 175 GeV « seulement »

Lorsque nous parlons de la thermodynamique de l'univers primordial, il est pratique de mesurer la température en unités d'énergie où de masse, ce qui signifie que nous posons la constante de Boltzmann  $k_B = 1$  (Dans cette échelle 1 MeV = 1.165 · 10<sup>10</sup> K).

Nous ne considérerons que la métrique de Friedmann Lemaître Robertson Walker, (FLRW), dont l'équation de Friedmann (4.16) dérive de la composante temporelle de l'équation d'Einstein :

$$H^2(t) + k/a^2 = 8 \pi G \rho / 3 \quad (7.6)$$

Où comme d'habitude, le paramètre de Hubble  $H = h(t) = a'(t)/a(t)$ , avec  $H$  aujourd'hui  $= H_0 = h.100 \text{ km/s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ , et selon les observations récentes  $h = 0,73$ .

Introduisons

$$\Omega = \rho / \rho_{crit} \quad (7.7)$$

où la densité critique ( qui correspond à  $k = 0$ ) est donnée par

$$\rho_{crit} = 3H^2 / 8\pi G \quad (7.8)$$

Aujourd'hui la densité critique correspond à

$$\rho_{crit}^0 = 1,9h^2.10^{-29} \text{ g} \cdot \text{cm}^3 \quad (7.9)$$

Aujourd'hui, les observations semblent indiquer une contribution de matière de 0.3 et d'énergie sombre de 0.7 à  $\Omega$ . Nous verrons que le modèle cosmologique avec inflation prédit  $\Omega = 1$ , ce qui est conforme aux observations. Il y a différentes contributions à  $\Omega$ , telles qu'indiquées ( ainsi qu'une contribution radiative aujourd'hui négligeable). Dans ce chapitre nous introduirons  $\Omega_k$ , densité de courbure déduit de  $k$ . Dans l'univers primordial le facteur de courbure est moins important. On peut le montrer comme suit. Les équations du mouvement pour la matière dans l'univers sont régies par l'annulation de la divergence covariante du tenseur énergie impulsion.

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (7.10)$$

Pour la métrique FLRW cela donne :

$$d/dt(\rho \cdot a^3) = -p \cdot d/dt(a^3) \quad (7.11)$$

Qui montre que la variation d'énergie dans un élément de volume co-mobile est égal à la pression multipliée par le changement de volume ( avec le signe-). Nous avons vu au en section 4.2) que cela peut s'écrire :

$$a^3 dp/dt = d/dt(a^3 (\rho + p)) \quad (7.12)$$

qui comme nous le verrons peut être interprétée comme la loi de conservation de l'entropie dans un volume  $a^3(t)$ . Pour le rayonnement où  $p = \rho/3$ , l'équation (7.11) donne  $\rho$  proportionnel à  $a^{-4}$ . Notons que les particules « relativistes » dont l'énergie cinétique est supérieure à l'énergie au repos, se comportent comme du rayonnement.

Si c'est la matière qui domine,  $\rho$  est proportionnel à  $a^{-3}$ . Dans tous les cas, nous verrons que pour  $a$  petit, le terme de courbure  $k/a^2$  est beaucoup moins important que la densité d'énergie  $\rho$ . De plus la constante cosmologique, dont la contribution aujourd'hui est importante était complètement négligeable à cette époque ( sauf pendant l'hypothétique période d'inflation où sa valeur est supposée colossale).

L'équation de Friedmann pour l'univers primordial se simplifie alors en :

$$H^2(t) = 8 \pi G \rho / 3 \quad (7.13)$$

Où en première approximation seules les espèces relativistes contribuent de manière appréciable ( Nous quantifierons cette assertion dans la suite). Remarquons que le paramètre de Hubble  $H(t) = a'(t)/a(t)$  a les dimensions de l'inverse d'un temps. Dans nos unités cela lui confère les dimensions d'une masse. En section (4.5.1) nous avons vu que l'ordre de grandeur de l'âge de l'univers est de  $1/H$ , du moins si la loi d'échelle est en puissance de  $t$ .

Nous voulons maintenant traiter la thermodynamique d'un univers en expansion. La première question à se poser est : est ce bien raisonnable et possible ?

Un point crucial est la compréhension au niveau microscopique, de la thermodynamique, en terme de mécanique statistique portant sur un grand nombre de particules élémentaires et de quanta. En général, l'équilibre statistique requiert un nombre incessant d'interactions entre les constituants du système.

Si la fréquence d'interactions est suffisante alors la description de l'évolution de l'univers à travers une séquence d'états en équilibre thermique est bonne et nous pouvons utiliser les paramètres thermodynamiques, la température  $T$ , la pression  $p$ , la densité d'entropie  $s$ , et d'autres à chaque instant  $t$  pour décrire l'état de l'univers.

Si les constituants de l'univers de densité numériques  $n$  et de vitesses relatives  $v$ , interagissent par diffusion élastique de section efficace  $\sigma$ , le taux d'interaction par particule  $\Gamma$  est donné par  $\Gamma = n \cdot \sigma \cdot v$ . La condition d'équilibre est que le taux d'interaction doit être bien plus grand que le taux d'expansion de l'univers.

$$\Gamma \gg H \quad (7.14)$$

Typiquement, la densité numérique des particules, décroît plus rapidement avec la température que le paramètre de Hubble. Cela implique que certaines particules vont quitter l'équilibre thermique à certains instants de l'histoire. La densité numérique va être gelée à une valeur particulière qui ne va évoluer qu'à travers la dilution liée à l'expansion de l'univers.

Comme nous le verrons ce passage hors équilibre des particules est un mécanisme important qui peut expliquer en grande partie la teneur en particules de l'univers observé aujourd'hui.

## 7-2 Equilibre thermodynamique

Nous travaillons dans l'approximation, d'un gaz dilué interagissant faiblement, où la fonction de distribution  $f_i(\mathbf{p})$  for les particules d'espèce  $i$  est donnée par:

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\frac{(E_i - \mu_i)}{T}} \pm 1} \quad (7.15)$$

où  $E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$  est l'énergie,  $\mu_i$  les potentiel chimique et  $T$  est la température (rappel :  $k_B = 1$ ). Le signe moins est pour les particules qui suivent la statistique de Bose Einstein (bosons) et le signe plus est pour les particules qui suivent le principe d'exclusion (statistique de Fermi-Dirac : fermions). On admet en général que le potentiel chimique peut être négligé dans l'univers primordial.

Un autre paramètre important est le nombre  $g_i$  de degrés internes de liberté de la particule, qui s'ajoutent indépendamment aux densités numériques, d'énergie, à la pression, etc...

Dans le chapitre précédent nous avons énuméré les degrés de liberté des particules du modèle standard. Le photon a deux états de polarisation donc  $g_\gamma = 2$ . Les neutrinos n'ont qu'un état de

polarisation, donc  $g_v = 1$ , les électrons et les muons ont  $g_{e,\mu} = 2$  ( et même nombre pour les anti particules). Fort de ces définitions nous pouvons écrire la densité numérique d'une espèce  $i$  :

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f_i(\mathbf{p}) d^3p \quad (7.16)$$

et la densité d'énergie

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int E_i(\mathbf{p}) f_i(\mathbf{p}) d^3p \quad (7.17)$$

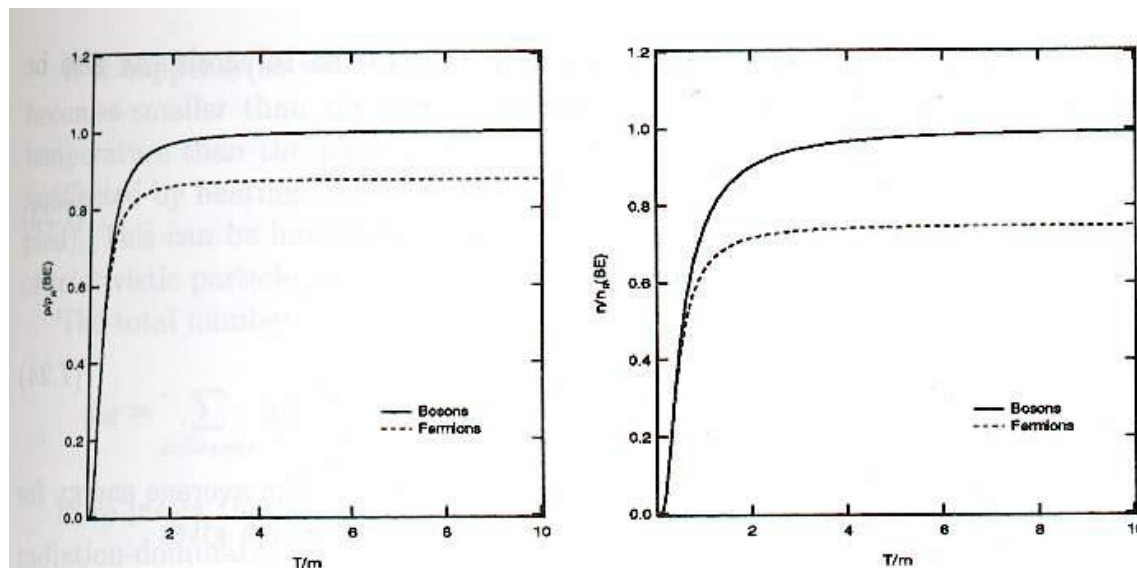


Figure 7.1 : Densité numérique (b) et densité d'énergie (a) pour les fermions et les bosons, fonction de  $T/m$ . Les grandeurs ont été normalisées à l'expression relativiste pour les bosons  $n_R (BE) = \zeta(3)g_i T^3/\pi^2$  et  $\rho_R (BE) = \pi^2 g_i T^4/30$ , respectivement.

Et sa pression

$$p_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E_i(\mathbf{p})} f_i(\mathbf{p}) d^3p \quad (7.18)$$

Comme les fonctions de distribution ne dépendent que de  $|p|$ , nous laissons  $d^3p \rightarrow p^2 dp d\Omega$  (avec  $p = |p|$ ) où l'intégrale sur  $d\Omega$  donne juste un facteur  $4\pi$ . En différenciant la relation (voir équation 2.44)  $E_i^2 = p^2 + m_i^2$  nous obtenons  $p.dp = E_i dE_i$ , de sorte que :

$$d^3p \rightarrow 4\pi \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE \quad (7.19)$$

Les expressions résultantes pour  $n(T)$  et  $\rho(T)$  sont montrées sur la figure 7.1 (a) et (b). Remarquons que pour  $T/m$  petit, quand les particules ne sont pas relativistes, d'abord il n'y a pas de différence entre les bosons et les fermions, et ensuite les densités chutent très rapidement ( exponentiellement ) lorsque la température décroît.

Dans la limite non relativiste  $T/m \ll 1$ , on peut résoudre les intégrales analytiquement, ce qui donne les résultats suivants (pour les particules de statistiques Fermi Dirac et Bose Einstein).

$$n_{NR} = g_i \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}} \quad (7.20)$$

$$\rho_{NR} = m \cdot n_{NR} \quad (7.21)$$

$$p_{NR} = T \cdot n_{NR} \ll \rho_{NR} \quad (7.22)$$

$\langle E \rangle = m + 3T/2$  dans le cas non relativiste ( si nous réintroduisons les unités, cela s'écrit :  $mc^2 + 3k_B T/2$ . On retrouve le résultat connu que hors de son énergie au repos, l'énergie thermique moyenne d'une particule ponctuelle est  $+ 3k_B T/2$ )

Dans l'approximation ultra relativiste ,  $T/m \gg 1$ , les intégrales peuvent aussi être résolues analytiquement et donnent :

$$\rho_R = \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^3 dE}{e^{\frac{E}{T}} \pm 1} = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{7}{8} \left( \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 \right), & \text{Fermi Dirac,} \end{cases} \quad (7.23)$$

$$n_R = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{3}{4} \left( \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3 \right), & \text{Fermi Dirac,} \end{cases} \quad (7.24)$$

Où  $\zeta$  est la fonction zéta de Riemann  $\zeta(3) = 1.20206$ . L'énergie moyenne d'une particule relativiste s'obtient par le rapport  $\rho/n$ , ce qui donne :

$$\langle E \rangle_{BE} \sim 2.70 \cdot T \quad (7.25)$$

et

$$\langle E \rangle_{FD} \sim 3.15 \cdot T \quad (7.26)$$

Pour les photons de masse  $m = 0$  et  $g = 2$ , l'expression  $\rho_\gamma = k \cdot T^4$  est la fameuse loi de Stefan Boltzmann de l'émission radiative du corps noir.

Attaquons nous maintenant au calcul de la contribution totale à la densité numérique et d'énergie de toutes les sortes de particules dans l'univers primordial. Comme nous avons vu que la densité numérique et d'énergie des espèces non relativistes est exponentiellement atténuée comparée aux espèces relativistes, souvent on fait l'approximation que seulement les particules relativistes sont à l'équilibre à ces températures. Ceci signifie que la densité d'énergie va avoir la forme de la loi de Stefan Boltzmann.

$$\rho_R(T) = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4 \quad (7.27)$$

$$p_R(T) = \frac{1}{3} \rho_R(T) = \frac{\pi^2}{90} g_{\text{eff}}(T) T^4 \quad (7.28)$$

Où le facteur de dégénération effectif  $g_{\text{eff}}(T)$  représente le nombre total de degrés de libertés internes ( spin, couleur, etc..) des particules relativistes et à l'équilibre thermique à la température  $T$  ( celles dont  $m_i \ll T$ ). L'expression pour  $g_{\text{eff}}(T)$  contient aussi le facteur  $7/8$  pour les fermions qui intervient dans la formule (7.23) pour  $\rho(T)$  ( voir équation 7.30) ci dessous.

Il est instructif de calculer  $g_{\text{eff}}(T)$  pour une température disons de  $1 \text{ TeV}$  quand toutes les particules du modèle standard sont relativistes et à l'équilibre thermique. Le nombre total de degrés de liberté interne des fermions est de 90 et pour les bosons de jauge et de Higgs 28, alors  $g_{\text{eff}}$  vaut :

$$g_{\text{eff}}(T = 1 \text{ TeV}) = 28 + \frac{7}{8} \cdot 90 = 106.75 \quad (7.29)$$

S'il arrive ( comme nous le verrons pour les neutrinos) que le taux d'interaction devient plus petit que le taux d'expansion, alors ces particules vont avoir une température inférieure à celle des photons, bien qu'étant toujours relativistes ( Les neutrinos seront insensibles au réchauffement qui affectera les photons car il se produira après que ces neutrinos se seront découplés). On peut en tenir compte en introduisant une température spécifique  $T_i$  pour chaque sorte de particule relativiste, qui peut être inclus dans le  $g_i$  effectif.

$$g_{\text{eff}} = \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermions}} g_j \left( \frac{T_j}{T} \right)^4 \quad (7.30)$$

Si nous insérons cette expression dans l'équation de Friedmann ( 7.13) nous obtenons pour la période radiative de l'univers primordial:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_R = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}} T^4 = 2.76 \frac{g_{\text{eff}} T^4}{m_{Pl}^2} \quad (7.31)$$

soit

$$H = 1.66 \sqrt{g_{\text{eff}}} \frac{T^2}{m_{Pl}} \quad (7.32)$$

Ceci est une des formules les plus importantes de la physique de l'univers primordial. Des relations entre le facteur d'échelle  $a$  et le temps que nous avons établi en section (4.2) nous obtenons (voir équation 4.28)

$$a(t) \sim \sqrt{t} \quad \text{radiation domination} \quad (7.33)$$

pour une équation d'état  $p = \rho/3$ . Pour l'époque ( ultérieure) dominée par la matière ,  $p = 0$ , on trouve

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \quad \text{matter domination.} \quad (7.34)$$

Donc pour l'époque radiative

$$H = \dot{a}/a = \frac{1}{2t} \quad \text{radiation domination} \quad (7.35)$$

et la relation temps- température devient

$$t = 0.30 \frac{m_{Pl}}{\sqrt{g_{eff}} T^2} \sim \left( \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec} \quad (7.36)$$

C'est une formule qu'il convient de mémoriser , valide pour les températures cruciales autour de  $1 \text{ MeV}$  , où l'essentiel de la nucléosynthèse et le découplage du neutrino se sont produits, comme nous le verrons .

### 7.3 Entropie

Déterminer quelles particules sont en équilibre thermique à une température donnée, ainsi nous pourrons calculer  $g_{eff}(T)$ . Considérons d'abord quelques relations thermodynamiques de base ; En particulier, nous allons montrer que dans le cas de l'équilibre thermique , l'entropie dans un volume  $a^3(t)$  est conservée.

L'entropie  $S(V, T)$  a été introduite comme une des équations clés de la thermodynamique par sa variation.

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} [d(\rho(T)V) + p(T)dV] \quad (7.37)$$

Identifions les coefficients multipliant  $dT$  et  $dV$  de cette expression avec ceux de la forme générale d'une différentielle.

$$dS(V, T) = \frac{\partial S(V, T)}{\partial V} dV + \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} dT \quad (7.38)$$

nous trouvons

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T} (\rho(T) + p(T)) \quad (7.39)$$

et

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT} \quad (7.40)$$

Egalons les dérivées mixtes

$$\frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial T \partial V} \quad (7.41)$$

cela donne



$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T} (\rho(T) + p(T)) \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT} \right) \quad (7.42)$$

Ce qui peut être simplifié en :

$$\frac{dp(T)}{dT} = \frac{1}{T} (\rho(T) + p(T)) \quad (7.43)$$

ce qui peut être déduit également directement de des équations (7.17) et (7.18) en. En reportant cela dans (7.37) on obtient :

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} d[(\rho(T) + p(T))V] - \frac{V}{T^2} (\rho(T) + p(T)) dT \quad (7.44)$$

Qu'on peut immédiatement intégrer pour montrer que l'entropie  $S(V, T)$  est, à une constante d'intégration près, donnée par :

$$S(V, T) = \frac{V}{T} (\rho(T) + p(T)) \quad (7.45)$$

Rappelons nous l'équation (7.12)

$$a^3 \frac{dp(T)}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3 (\rho(T) + p(T))] \quad (7.46)$$

Combinée avec (7.43), on peut l'écrire

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a^3}{T} [\rho(T) + p(T)] \right) = 0 \quad (7.47)$$

En identifiant le volume  $V$  à  $a^3(t)$  et en comparant avec (7.45), nous trouvons finalement la conservation de l'entropie dans le volume  $a^3(t)$  ainsi que nous l'avions annoncé. Quelquefois il est plus judicieux de travailler avec la densité d'entropie  $s(T)$  plutôt qu'avec l'entropie totale  $s(V, T)$  dans le volume  $V$ . La définition est alors

$$s(T) \equiv \frac{S(V, T)}{V} = \frac{\rho(T) + p(T)}{T} \quad (7.48)$$

Cette partie a été plutôt formelle. L'important à mémoriser sont les expressions (7.45) pour l'entropie, (7.48) pour la densité d'entropie et l'équation de conservation (7.47)

Dans l'univers primordial, et la densité d'énergie  $\rho$ , et la pression  $p$  étaient dominées par les particules relativistes avec l'équation d'état  $p = \rho/3$ . En utilisant (7.48) et les expressions relativistes (7.27, 7.28) pour la densité d'énergie et la pression, nous trouvons finalement pour la densité d'entropie  $s$  :

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{\text{eff}}^s T^3 \quad (7.49)$$

ou  $g_{\text{eff}}^s$  est défini de façon similaire à  $g_{\text{eff}}$  :



$$g_{\text{eff}}^s = \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermions}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \quad (7.50)$$

Comme  $s$  et  $n_\gamma$  varient tous deux comme  $T^3$ , il y a une relation simple entre eux.

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (7.51)$$

on trouve

$$s = \frac{\pi^4}{45\zeta(3)} g_{\text{eff}}^s n_\gamma \sim 1.8 g_{\text{eff}}^s n_\gamma \quad (7.52)$$

Considérons maintenant la question du découplage des neutrinos de l'équilibre thermique dans l'univers primordial. Comme nous l'avons indiqué, les particules interagissant faiblement comme les neutrinos, se découplent en dessous d'une température  $T_{\text{dec}}$  quand le taux d'interaction entre les particules n'est plus assez rapide pour lutter contre l'expansion de Hubble de l'espace. Les médiateurs des interactions faibles sont les particules  $W$  et  $Z$  qui sont massives  $m_w = 80 \text{ GeV}$  et  $m_z = 91 \text{ GeV}$ . A des températures bien inférieures à  $80\text{-}90 \text{ GeV}$ , les bosons  $W$  et  $Z$  sont virtuels de sorte que leurs propagateurs sont en  $1/m_w^2$  ( voir chapitre 6.10.1) Nous avons montré au chapitre 6.10.1 que la section efficace pour les interactions faibles est proportionnelle à  $\alpha^2 s / m_w^4$

Pour des neutrinos relativistes (compte tenu de leur très faible masse présumée, c'est toujours le cas), en général la condition est  $m_\nu \ll T$  et pour les leptons relativistes chargés, une réaction typique maintenant l'équilibre thermique telle que  $\nu_e + e^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+$  va suivre un taux  $\sigma_{\text{weak}} \approx \alpha^2 T^2 / m_w^4$ . Ceci est dû au fait que  $s$  dépend du carré de l'énergie des particules en réaction, et l'énergie moyenne est proportionnelle à  $T$ . Le taux d'interaction  $\Gamma = \sigma |v| n$  est donc, comme  $|v| = c = 1$  et  $n \approx T^3$

$$\Gamma_{\text{weak}} \sim \frac{\alpha^2 T^5}{m_w^4} \quad (7.53)$$

Nous devons comparer ceci au taux d'expansion  $H$ . Comme nous l'avons vu ( 1.32)  $H \approx T^2 / m_{\text{pl}}$ , donc le rapport devient :

Le découplage se produit quand ce rapport tombe sous l'unité, soit

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 m_{\text{pl}} T^3}{m_w^4} \quad (7.54)$$

$$T_{\text{dec}} \sim \left( \frac{m_w^4}{\alpha^2 m_{\text{pl}}} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 4 \text{ MeV} \quad (7.55)$$

Qu'arrive il quand les neutrinos se sont découplés? Tous les neutrinos vont se comporter en particules libres suivant l'expansion de Hubble. Ce qui implique que leurs énergies vont être réduites, comme pour les photons par le facteur d'expansion  $a/a_{\text{dec}}$ . Il vont rester dans une distribution ( Fermi Dirac) d'équilibre thermique de température :

$$T_\nu = T_{\text{dec}} \frac{a_{\text{dec}}}{a} \sim a^{-1} \quad (7.56)$$

Si nous nous appliquons la conservation de l'entropie à l'équilibre thermique

$$g_{\text{eff}}^s(aT)^3 = \text{const}$$

Nous voyons que :

$$T \sim (g_{\text{eff}}^s)^{-1/3} a^{-1}$$

Donc même après son découplage, la distribution de neutrinos va être la même que s'il était resté à l'équilibre thermique (distribution gelée) tant que  $g_{\text{eff}}^s$  ne change pas. Cependant  $g_{\text{eff}}^s$  va changer quand les électrons et les positons vont cesser d'être relativistes et vont s'annihiler par la réaction  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ . Cela se produit à une température de  $1 \text{ MeV}$ , car en dessous la réaction inverse  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$ , n'est plus cinématiquement possible ( la masse au repos d'une paire positon électron est de  $1.22 \text{ MeV}$ ). Calculons le nombre de degrés de libertés avant et après l'annihilation  $e^+e^-$ . Les neutrinos sont déjà découplés, donc à une température sensiblement supérieure à  $1 \text{ MeV}$  les espèces relativistes en équilibre thermique sont  $e^+e^-$  et les  $\gamma$ , ce qui donne  $(g_{\text{eff}}^s)^{\text{avant}} = 2.3.7/8 + 2 = 11/2$  alors qu'en dessous de  $1 \text{ MeV}$ , seuls les photons sont en équilibre thermique donnant  $(g_{\text{eff}}^s)^{\text{après}} = 2$ .

Comme l'entropie totale des particules à l'équilibre est conservée :

$$(g_{\text{eff}}^s(aT)^3)_{\text{before}} = (g_{\text{eff}}^s(aT)^3)_{\text{after}} \quad (7.57)$$

ce qui implique

$$(aT)_{T < 1 \text{ MeV}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (aT)_{T \geq 1 \text{ MeV}} \sim 1.4 (aT)_{T \geq 1 \text{ MeV}} \quad (7.58)$$

Il y a un transfert d'entropie des particules  $e^+e^-$  qui se découplent aux photons, qu'on appelle un « réchauffement »( bien qu'en fait la température n'augmente pas, simplement elle décroît plus lentement pour les photons du fait du transfert d'entropie). Par contre, les neutrinos déjà découplés, ne bénéficie pas du « réchauffement ». Ils ne font que suivre la loi due à l'expansion de l'Univers  $(aT_\nu)_{\text{avant}} = (aT_\nu)_{\text{après}}$ . On peut l'interpréter en disant que l'entropie est conservée séparément après le découplage. Cela implique une différence de température entre les photons et les neutrinos après le découplage  $e^+e^-$ , de :

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \quad (7.59)$$

Comme le RFC ( photons) a maintenant une température de  $2.73K$ , il doit y avoir un fond de neutrinos cosmologique ayant un spectre d'énergie de Fermi Dirac de température  $T_\nu = 1.95 \text{ K}$ . Comme des neutrinos d'une énergie aussi faible interagit très faiblement avec la matière, c'est un défi extrême pour la physique expérimentale du 21 ième siècle de les détecter directement. Quelle est l'entropie totale et la densité d'énergie du rayonnement aujourd'hui ?

C'est donné par les contributions des photons et des trois espèces de neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) soit:

$$g_{\text{eff}}^{\text{tot}}(\text{today}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} = 3.36 \quad (7.60)$$

et

$$(g_{\text{eff}}^s)^{\text{tot}}(\text{today}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right) = 3.91 \quad (7.61)$$

Pour la densité d'énergie totale du rayonnement ceci donne :

$$\rho_R^{\text{now}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}^{\text{tot}} T^4 = 8.1 \cdot 10^{-34} \text{ g/cm}^3 \quad (7.62)$$

Ce qui correspond à une contribution à  $\Omega = \rho/\rho_{\text{crit}}$  de :

$$\Omega_{\text{CMBR}} h^2 = 4.3 \cdot 10^{-5} \quad (7.63)$$

La densité numérique des photons du RFC vaut :

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \sim 420 \text{ cm}^{-3} \quad (7.64)$$

Pour  $T = T_0 = 2,73 \text{ K}$ . Bien que contribuant faiblement à  $\Omega$  aujourd'hui, le RFC quand il a été émis a joué un rôle important dans la dynamique de l'univers. L'utilisation la plus importante du RFC est liée au fait qu'il nous propose un « instantané » de l'univers à un redshift de 1100 environ. Dans le chapitre 11.2, nous verrons comment des différences minuscules de température réparties dans toutes les directions du ciel, nous donne des indices sur la manière dont l'univers s'est formé. Peut il y avoir d'autres reliques de l'univers primordial d'autres types de rayonnements ? On est en droit de supposer que les gravitons, les particules de jauge de la gravitation existent. Etant reliées à la gravitation, l'échelle de masse pour leur interaction est la masse de Planck,  $\sigma_{\text{grav}} \# T^2/M_{\text{pl}}^4$  et  $\Gamma_{\text{grav}}/H \# T^3/m_{\text{pl}}^3$ , ce qui fait que leur température de découplage doit être énorme,  $T_{\text{dec}} \# m_{\text{pl}} \# 10^{19} \text{ GeV}$ .

Nous avons vu avant que le nombre de degrés de libertés est très grand à haute température. A l'échelle de Planck, il devait être encore beaucoup plus grand du fait de la présence de particules lourdes prévues par la super symétrie et la grande unification.

$$T_{\text{grav}} = \left( \frac{(g_{\text{eff}}^s)^{\text{now}}}{(g_{\text{eff}}^s)^{\text{Planck}}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot T_0 \leq \left( \frac{3.9}{106.75} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2.73 \text{ K} = 0.9 \text{ K} \quad (7.65)$$

La contribution à la densité d'énergie actuelle est donc, puisque  $\rho \# T^4$ ,  $\rho_{\text{grav}} < 0.012 \rho_\gamma$ .

Après le découplage des particules relativistes, leur contribution à la densité d'énergie diminue en  $1/a^4$  ( car  $\rho = T^4$  et  $aT \# \text{constante}$  ). Pour la matière non relativiste, cependant la densité d'énergie s'écrit maintenant :

$$\rho_{\text{matter}} \equiv \rho_M = m_N n_N \quad (7.66)$$

et pour les particules stables ( comme les baryons)  $n_N \# 1/a^3 \# T^3$ . Donc, en fait l'univers est devenu dominé par la matière. Quand cela arriva il ? La contribution de la matière à la densité d'énergie s'écrit maintenant :

$$\rho_M^{\text{now}} = 1.9 \cdot 10^{-29} \Omega_M h^2 \text{ g/cm}^3 \quad (7.67)$$

alors

$$\rho_M = \rho_M^{\text{now}} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_M^{\text{now}} (1+z)^3 \quad (7.68)$$

avec la notation habituelle pour le facteur de redshift  $1+z = a_0/a$ . De même :

$$\rho_R = \rho_R^{now} \left( \frac{g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}^{now}} \right) (1+z)^4 \quad (7.69)$$

en égalant (7.68) et (7.69) on obtient :

$$(1+z_{eq}) \sim \frac{\rho_M^{now}}{\rho_R^{now}} = 2.3 \cdot 10^4 \Omega_M h^2 \quad (7.70)$$

$$T_{eq} = T_0(1+z_{eq}) = 5.5 \Omega_M h^2 \text{ eV} \quad (7.71)$$

et ( voir exemple 4.5.1, nous supposons  $\Omega \neq 1$ )

$$t_{eq} \sim \frac{2}{3} H_0^{-1} (1+z_{eq})^{-\frac{3}{2}} \sim 1.4 \cdot 10^3 / h \text{ years} \quad (7.72)$$

Comme nous l'expliquerons dans le chapitre de formation des structures, le moment où la matière a commencé à dominer l'univers est très important, car c'est seulement à partir de là que les structures ont pu commencer à croître.

## Résumé

- Dans l'univers primordial, le taux d'expansion a dépendu essentiellement des particules relativistes. La contribution à la densité d'énergie de ces particules relativistes est

$$\rho_R(T) = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

où

$$g_{\text{eff}} = \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermions}} g_j \left( \frac{T_j}{T} \right)^4$$

Ici, on a pris en compte la possibilité d'avoir des températures effectives différentes.

Pendant l'ère radiative ( les quelques premières centaines de milliers d'années) le taux d'expansion est donné par :

$$H = 1.66 \sqrt{g_{\text{eff}}} \frac{T^2}{m_{Pl}}$$

et la relation entre la température et le temps autour de 1 MeV était :

$$t = 0.30 \frac{m_{Pl}}{\sqrt{g_{\text{eff}} T^2}} \sim \left( \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec}$$

L'entropie totale  $S(V,T)$  dans une région de l'Univers a été conservée pendant les périodes d'équilibre thermique,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{a^3}{T} [\rho(T) + p(T)] \right) = 0$$

La densité d'entropie est donnée par :

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{\text{eff}}^s T^3$$

avec

$$g_{\text{eff}}^s = \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermions}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3$$

Les neutrinos se sont découplés à une température d'environ  $4 \text{ MeV}$ , mais leur fonctions de distribution ont conservé le profil thermique, simplement décalés vers le rouge par l'expansion cosmique. Mais comme ils étaient déjà découplés au moment du «réchauffement» quand les électrons et les positrons sont devenus non relativistes, le fond de neutrinos cosmologiques est plus froid que celui des photons.

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \sim 0.71 T_\gamma$$

- la contribution du RFC à la densité d'énergie aujourd'hui n'est que de :

$$\Omega_{\text{CMBR}} h^2 = 4.3 \cdot 10^{-5}$$

et la densité numérique est donnée par la formule (7.64)

## Chapitre 8: Survivances thermiques du Big Bang

### 8.1 Recombinaison des photons et découplage

Un des moments les plus importants de l'univers primordial fut quand il devint transparent aux photons optiques. Ceci arriva quand les gaz neutres d'hydrogène et d'hélium purent se former, un gaz neutre étant transparent, par opposition à un plasma ionisé. Le rayonnement a pu commencer à se propager librement et aujourd'hui il continue à le faire à travers l'univers dans toutes les directions, simplement décalé en fréquence vers le domaine radio micro onde. C'est le RFC qui a été et demeure un témoignage important des quelques centaines de milliers d'années après le Big Bang. Dans ce chapitre nous allons étudier les autres témoignages du Big bang.

#### 8.1.1 Asymétrie matière – antimatière

Après l'annihilation des électrons et des positrons (à des températures bien inférieures au MeV), le nombre de positrons dans l'univers devint très petit et comme ils devinrent non relativistes, leur nombre décrût encore exponentiellement. Cependant, il y eut un petit supplément d'électrons, juste assez pour équilibrer le charge électrique des protons. L'origine exacte de cette asymétrie entre matière et antimatière dans l'univers est toujours inexplicée.

Cependant, dans les théories modernes de la physique des particules, plusieurs mécanismes qui créent cette asymétrie existent. Andrei Sakharov, le célèbre physicien russe a montré que pour obtenir cette asymétrie entre matière et antimatière, même à partir d'un état initial symétrique, il fallait nécessairement que trois conditions soient remplies.

- 1- Il doit exister des interactions violant la symétrie CP. C est l'opérateur de conjugaison de charge et P est l'opérateur de parité. Après la découverte de la violation P dans l'interaction faible (rappelons nous qu'au chapitre 6.2, nous avons indiqué que seuls les neutrinos gauches semblent exister dans la nature), on se rendit compte que la transformation d'un état qui correspond à une particule, à celui qui correspond à une antiparticule, n'est pas seulement C, mais une action combinée CP. ( Une transformation CP d'un neutrino gauche donne un antineutrino droit, qui existe aussi dans la nature. S'il n'y avait pas de violation CP, les particules et les antiparticules devraient se comporter de la même manière, et une asymétrie ne pourrait pas se produire. Dans le modèle standard la violation CP existe du fait d'interférences entre les trois familles de quarks et de leptons, deux familles n'auraient pas suffi. Dans le système du méson  $K^0$  (un état lié d'un quark d et d'un antiquark s) la violation CP a été découverte expérimentalement par Fitch et Cronin dans les années 60.
- 2- Il doit exister des interactions violant le nombre baryonique. Aujourd'hui, il y a une asymétrie entre les baryons et les antibaryons (qui est que le nombre de Baryons est supérieur au nombre d'antibaryons). Des interactions violant la loi de conservation du nombre de baryons ont du se produire. Dans les théories de grande unification (unification des interactions faibles, forte et électromagnétique) de telles violations sont prédites. Une prédiction, non encore vérifiée expérimentalement est que le proton doit se désintégrer spontanément. Sa période doit toutefois être supérieure à  $10^{33}$  ans pour être compatible avec les limites expérimentales constatées (âge supposé de l'univers  $10^{10}$  ans). Dans le modèle standard minimal, de telles violations du nombre baryonique devraient pouvoir également se produire. Ce sont les processus appelés instanton, non perturbatifs, découverts par G.'t Hooft. Aujourd'hui ils sont encore plus faibles que les processus de la GUT car ils ont à vaincre une barrière de potentiel énorme rendant improbable leur production par effet tunnel, mais dans l'univers primordial, l'énergie thermique énorme a du leur permettre de

franchir cette barrière. C'est un domaine de recherche théorique très actif aujourd'hui, et toutes les implications n'ont pas encore été tirées au clair. Il semble que la violation CP présente dans le modèle standard minimum ne suffit pas à expliquer comment cela marche, mais il est peut être suffisant d'introduire un doublet de champs de Higgs supplémentaire, comme cela est requis dans les théories supersymétrique. Dans la plupart des modèles l'asymétrie des baryons est exactement compensée par l'asymétrie des leptons.

- 3- Ecart à l'équilibre thermique. C'est nécessaire du fait de la symétrie CPT supposée exacte dans la nature (  $T$  est l'opérateur de renversement du temps ), qui requiert que la masse des particules et des antiparticules soient exactement la même, et que les abondances des espèces de particules à l'équilibre thermique à une température constante ne dépend que de la masse. Dans le modèle du Big bang, ce n'est pas un problème, car nous avons constaté la décroissance continue en température qui a pour effet de faire quitter successivement l'équilibre thermique à toutes les espèces de particules. Comme nous le verrons, il suffit que l'asymétrie matière antimatière soit de l'ordre de  $10^{-10}$  pour être conforme aux observations.

### 8.1.2 La fraction ionisée- L'équation de Saha

Nous pouvons donc en première approximation incorporer l'asymétrie matière – antimatière en posant  $n_e^+ = 0$ ,  $n_p^- = 0$  et  $n_e^- = n_p^+$ . Les électrons et les photons sont restés couplés jusqu'à ce que leur taux d'interaction tombe sous le taux d'expansion de l'univers.

Le mécanisme de base de diffusion des photons de basse énergie sur les électrons est la diffusion Thomson,  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ , qui selon l'estimation (6.27) a une section efficace de :

$$\sigma_T = \frac{\alpha^2}{m_e^2} \quad (8.1)$$

Le taux d'interaction total par photon est alors (comme  $v = c = 1$ , pour les photons)

$$\Gamma_\gamma = n_e \sigma_T \quad (8.2)$$

Et quand  $\Gamma_\gamma / H < 1$ , les photons se découplent.

Ceci se produit à une température entre 1 et 10 eV.

Quand nous essayons de calculer  $n_e$ , en fonction de la température un nouveau phénomène se produit. Les électrons peuvent disparaître en se combinant avec les protons pour donner des atomes d'hydrogène neutre plus des photons. L'hydrogène ainsi formé peut à nouveau être ionisé par les photons. Nous devons donc considérer des réactions du type  $p + e^- \leftrightarrow H + \gamma$  dans le plasma primordial. Ceci signifie que le potentiel chimique satisfait

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad (8.3)$$

A l'équilibre (les photons ont un potentiel chimique nul). Comme les baryons (protons) peuvent être soit libres soit liés dans un atome d'hydrogène, nous introduisons la densité totale de baryons  $n_B$

$$n_B = n_p + n_H \quad (8.4)$$

La neutralité de charge implique



$$n_p = n_e \quad (8.5)$$

Comme nous nous intéressons aux processus qui apparaissent à des températures inférieures à  $10 \text{ eV}$  (à comparer à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène qui est de  $13,6 \text{ eV}$ ),  $e$ ,  $p$ , et  $H$  sont tous non relativistes en première approximation. Nous pouvons donc utiliser l'équation (7.20) dans les intégrales définissant  $n_i$  pour trouver, dans la limite non relativiste :

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{\mu_i - m_i}{T} \right) \quad (8.6)$$

Pour  $i = e, p, H$ . En utilisant l'équation 8.3 et la relation  $m_H = m_e + m_p - B$  qui définit l'énergie de liaison  $B$ , nous pouvons résoudre pour trouver  $n_H$  :

$$n_H = \frac{g_H}{g_e g_p} n_e n_p \left( \frac{m_e m_p T}{2\pi m_H} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{B}{T} \right) \quad (8.7)$$

Ceci peut être encore simplifié en notant que  $n_e = n_p$  et en première approximation  $m_p/m_H = 1$ . En définissant la fraction ionisée  $X_e$  par :

$$X_e \equiv \frac{n_p}{n_B} = \frac{n_p}{n_p + n_H} \quad (8.8)$$

Et le rapport baryon / photon par  $N_B$

$$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (8.9)$$

On obtient

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta_B \left( \frac{T}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{B/T} \quad (8.10)$$

C'est ce qu'on appelle l'équation de SAHA pour la fraction ionisée à l'équilibre thermique. Elle peut être résolue pour exprimer  $X_e$  en fonction de  $T$  et donc en fonction du Redshift  $z$  (car  $T = 2.73 (1+z) \text{ K}$ ). Le rapport baryon / photon est relié à la contribution des baryons à la densité  $\Omega_B$  de l'univers par :

$$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = 2.7 \cdot 10^{-8} \Omega_B h^2 \quad (8.11)$$

Nous verrons que la nucléosynthèse du Big Bang ( la synthèse des noyaux légers, hélium, deutérium et lithium) contraint  $N_B$  dans l'intervalle  $(5-6) \cdot 10^{-10}$ , ce qui correspond à  $\Omega_B \cdot h^2 \# 0,02$ . Comme montré sur la figure 8.1 , la fraction ionisée tombe sous les  $10\%$  à un redshift de  $1200-1300$ . Le processus de capture des électrons par les protons pour former de l'hydrogène est appelé recombinaison.

Nous venons de montrer que la recombinaison se produit à un redshift  $z_{rec}$  de :

$$z_{rec} \sim 1300 \quad (8.12)$$



Ceci correspond à une température de recombinaison de :

$$T_{rec} = T_0(1 + z_{rec}) \sim 2.7 \cdot 1300 \text{ K} = 3500 \text{ K} \sim 0.3 \text{ eV} \quad (8.13)$$

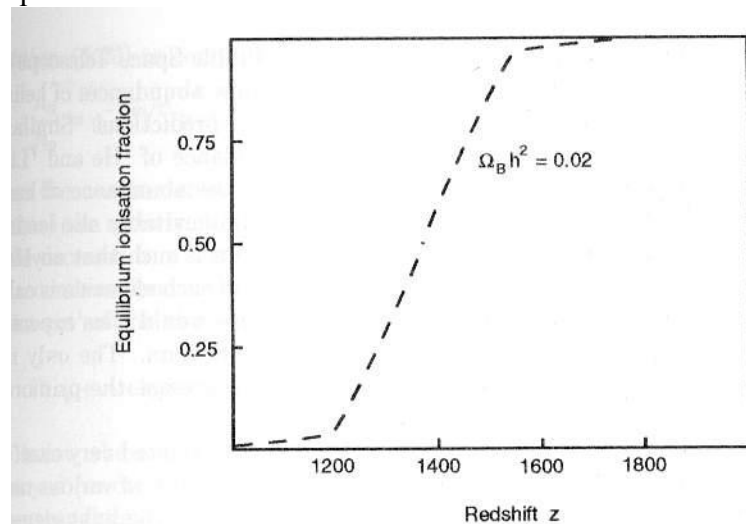
Et à un âge de l'univers à la recombinaison de :

$$t_{rec} = \frac{2}{3} H_0^{-1} (1 + z_{rec})^{-\frac{3}{2}} \sim 1.4 \cdot 10^5 / h \text{ years} \quad (8.14)$$

Si  $\Omega_0 \neq 1$ , le membre de droite doit être divisé par  $\sqrt{\Omega_0}$

Naïvement, nous aurions pu supposer que la recombinaison se produirait à environ  $T = 13 \text{ eV}$ , qui correspond à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène. Mais la distribution de Bose Einstein des photons contient une longue « queue » d'énergie supérieure à  $T$ . Donc, il faut que le taux de réaction  $p + e^- \leftrightarrow H + \gamma$  soit plus rapide que le taux d'expansion de Hubble. Nous verrons que cela se produit autour de Redshift de l'ordre de 1100.

Après cela, l'équilibre ne peut plus être maintenu et la fraction ionisée est gelée à la valeur qu'elle avait autour de  $z = 1100$ .



**Fig 8.1 : La fraction ionisée à l'équilibre en fonction de  $z$ , pour une valeur  $\Omega_B \cdot h^2 = 0,02$**

De même la densité numérique de photons par volume co-mobile est fixée et c'est cette population de photons redshiftés depuis cette époque que nous observons aujourd'hui en tant que rayonnement de fond cosmologique ( RFC).

L'ionisation résiduelle détermine le parcours libre moyen des photons après la recombinaison (car le mécanisme dominant est la diffusion Thomson), et on peut calculer que ce libre parcours moyen devient supérieur au rayon de l'univers observable à des redshifts inférieurs à 1050. La région autour de  $z_{rec} \approx 1100$  est donc quelquefois appelée surface de dernière diffusion du rayonnement de fond cosmologique des photons.

## 8.2 Nucléosynthèse

Une des pierres angulaires de la cosmologie du Big Bang est le fait que la fraction en masse de  $^4\text{He}$  est environ de 24 %, alors que l'hydrogène constitue le reste, à part des traces de  $^3\text{He}$ ,  $^2\text{H}$

(deutérium, D) et  ${}^7\text{Li}$ . Les autres éléments, communs dans notre environnement, ne constituent qu'une part infime de la matière baryonique de l'univers entier. L'opinion générale veut que les éléments plus lourds que le lithium aient été fabriqués dans les étoiles et dans d'autres processus astrophysiques (explosion de supernovae, rayons cosmiques,...). Cette opinion est confortée par de nombreux éléments. D'abord, la teneur en éléments lourds est cohérente avec les taux de formation des étoiles que l'on connaît et l'histoire de ces formations qu'on en déduit. Ensuite, la quantité importante d'Hélium ne peut pas s'expliquer par sa production stellaire. Des observations récentes ( par exemple par le télescope de Hubble HST) de nuages de gaz primordial à redshift élevé, montre que les abondances sont bien conformes aux prédictions du Big Bang.

De même, quand on observe de vieilles étoiles pauvres en métaux on trouve que l'abondance de l'Hélium4 et du Lithium 7, atteint des plateaux, qui est indépendante de l'abondance en éléments lourds. L'idée est que la production de l'Hélium 4 et du  $\text{Li}$  7 par les étoiles s'accompagne inévitablement d'autres éléments plus lourds comme l'oxygène. ( en jargon d'astrophysicien, tout ce qui est plus lourd que le lithium est appelé « métal » et l'abondance associée métallicité). Si le lithium était fabriqué seulement dans les étoiles, on devrait constater sa décroissance avec la métallicité des étoiles observées. L'explication logique du plateau observé est qu'il représente l'abondance primordiale de ces éléments.

La nucléosynthèse est un champ de recherche bien maîtrisé, qui a été traité avec soin par des méthodes numériques, qui permettent de suivre la densité numérique des différents noyaux quelques secondes après le Big bang, au moment où les noyaux légers furent synthétisés. Un test, non trivial, et très important montre un accord remarquable entre les prédictions des calculs et les observations pour les quatre éléments légers,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^3\text{He}$ , D et  ${}^7\text{Li}$ . Cet accord est réalisé sur une fenêtre étroite du rapport baryon/photon  $N_B$ . Comme le nombre de photons est ultra majoritairement celui des photons du RFC déterminé par les observations, la limite supérieure de  $N_B$ , pour la nucléosynthèse, donne une contribution maximum à  $\Omega_B$  ( en fait  $\Omega_B h^2$  ) à la densité d'énergie totale de l'univers. Comme ceci est manifestement bien inférieur à ce qui serait nécessaire pour expliquer le comportement dynamique de l'univers, il nous incite à supposer que la majorité de la matière est « noire » c'est à dire non baryonique ( Le calcul de la densité de matière noire sera fait au chapitre suivant). Nous ne rentrerons pas dans le détail de la nucléosynthèse ici – les équations sont non linéaires et ne peuvent être résolues que numériquement. Cependant il n'est pas très difficile de brosser un tableau de la formation et de l'abondance de l'Hélium 4, élément le plus important ( hors hydrogène primordial, bien entendu)

En ces temps reculés, (  $t \ll 1s$ ) les neutrinos, électrons et positrons étaient toujours à l'équilibre à travers des réactions liées à l'interaction faible telles que :



Ces réactions sont le fait de l'interaction faible et correspondent à des sections efficaces de l'ordre de  $\sigma_{weak} = \alpha^2 s / m_w^4$ . Quand la température de l'univers était bien plus grande que la différence de masse entre le proton et le neutron  $\Delta m = m_n - m_p = 1,29 \text{ MeV}$ , les réactions étaient totalement réversibles. Quand la température est tombée en dessous de  $1 \text{ MeV}$ , la décroissance de la densité numérique de neutrons du fait de leur masse supérieure commença à devenir importante. Comme les protons et les neutrons étaient non relativistes à ces

températures ( $T \approx 1 \text{ MeV} \ll m_n, m_p \approx 940 \text{ MeV}$ ), nous pouvons utiliser l'équation ( 5.20) pour calculer le rapport :

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta m/T} = e^{-(1.29 \text{ MeV})/T} \quad (8.16)$$

( Comme le nombre d'états d'hélicité  $g_p = g_n = 2$ ). Ceci montre qu'à haute température , le rapport valait pratiquement 1. Si l'équilibre avait été maintenu, le rapport n'aurait déchu que faiblement à basse température. Cependant les calculs du découplage nous apprennent que ce qui détermine les abondances c'est souvent le gel de l'abondance du fait que le taux d'une réaction comme :

$$\Gamma(\nu_e + n \leftrightarrow p + e^-) \sim 2.1 \left( \frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^5 \text{ sec}^{-1} \quad (8.17)$$

chute sous le taux d'expansion quand  $T < 0.8 \text{ MeV}$ . Alors les neutrons ne sont plus détruits ( ou créés) par les deux dernières réactions de ( 8.15), mais continuent à être décimés par la désintégration de neutron ( première réaction). Donc cela est maintenant régi par le processus de désintégration du neutron, de période mesurée en laboratoire, plutôt longue, de 890 secondes environ. La densité numérique des neutrons est donc « gelée » à sa valeur autour d'une température de  $0.8 \text{ MeV}$  ce qui donne :

$$\frac{n_n}{n_p} \sim e^{-1.29/0.8} \sim 0.2 \quad (8.18)$$

Avant de pouvoir se désintégrer la majorité des neutrons vont s'associer aux protons pour former des atomes d'hélium par l'une des chaînes de réactions



ou



Le rapport du taux de réaction  $p+n \leftrightarrow d + \gamma$  au taux d'expansion de l'univers est donné par

$$\frac{\Gamma_{pn}}{H} \sim 2 \cdot 10^3 \left( \frac{T}{0.1 \text{ MeV}} \right)^5 \frac{n_p}{n_p + n_n} \Omega_B h^2 \quad (8.21)$$

Ce qui est un rapport grand pour  $T \gg 0.1 \text{ MeV}$ . Comme la densité numérique des photons était très élevée, la photo-désintégration du deutérium était très importante, et l'abondance du deutérium fut maintenue en dessous de  $10^{-10}$  pendant l'équilibre.

Ceci a entraîné un taux très faible de réactions  $d+d$ , ( le taux est proportionnel au carré de l'abondance de deutérium , quelque chose de petit),en conséquence peu d'hélium fut produit pour  $T > 0.1 \text{ MeV}$ . En dessous de cette température, la photo-dissociation devint inopérante, et

l'abondance de deutérium crût jusqu'à  $10^{-5} - 10^{-3}$ , ce qui entraîna une fusion en hélium par la réaction d+d. Ceci consumma la majorité des neutrons, donc une bonne estimation de l'abondance  ${}^4\text{He}$  est donnée par

$$Y({}^4\text{He}) \equiv \frac{4n_{\text{He}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2n_n/n_p}{1 + n_n/n_p} \quad (8.22)$$

Rappelons que le rapport  $n_n/n_p$  était de 0.2 pour  $T = 0.8 \text{ MeV}$ . Après des neutrons se désintégrèrent, et le rapport à la fin de la nucléosynthèse ( $T = 0.01 \text{ MeV}$ ) était d'environ 0.13. Ceci donne une abondance d'environ  $Y({}^4\text{He})$  de 0.24, ce qu'on retrouve par un calcul plus exact. Ceci est exactement la valeur qu'on mesure dans les étoiles et les gaz pauvres en métal aux incertitudes de mesure près.

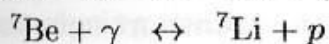
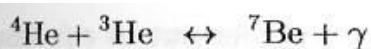
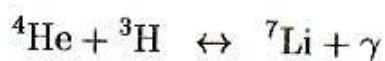
L'accord entre les calculs et l'observation de l'abondance d'hélium, conforte la théorie du Big Bang, mais peut aussi être utilisé pour contraindre les lois de la physique valides dans l'univers primordial. Un autre paramètre déterminant la valeur du taux d'hélium à la fin, est la décroissance du rapport neutron/proton due à la désintégration du neutron. Si l'expansion de l'univers avait été plus rapide que ce que le modèle standard indique, moins de neutrons se seraient désintégrés avant d'être stabilisés par leur capture dans les noyaux d'hélium, et l'abondance d'hélium serait supérieure. Comme selon l'équation de Friedmann le taux d'expansion  $H^2$  est proportionnel à  $\rho$  et  $\rho$  est dominé par les espèces relativistes, d'éventuels neutrinos additionnels (en plus des 3 familles du modèle standard) auraient accéléré l'expansion, provoquant un taux d'hélium en contradiction avec les observations. Cet argument fut utilisé, avant que le LEP au CERN (Genève) arrive à la même conclusion et limite le nombre de familles d'abord à quatre maximum puis trois.

Le deutérium et  ${}^3\text{He}$  subsistent à l'état de traces (gelées quand les réactions 8.19 et 8.20 sortirent de l'équilibre à des niveaux de  $10^{-5} - 10^{-4}$ ). La mesure du deutérium s'est retrouvée d'actualité grâce aux observations de D.Tytler et de ses collaborateurs. Les Télescopes Keck et HST ont permis de détecter les raies d'absorption du deutérium à redshift élevé. La lumière des quasars, à l'occasion, traverse des nuages de gaz. S'agissant de redshifts élevés, on peut supposer que ces nuages reflètent l'abondance initiale (du moins en donnent une borne minimum, car le deutérium est fragile, n'est pas produit mais ne peut être que détruit dans les étoiles). Le deutérium est donc un indicateur très sensible du rapport baryon/photon, du fait que la courbe dépend fortement de sa teneur et donc de  $\Omega_B h^2$  (voir fig 8.2). Les mesures actuelles donnent une valeur plutôt forte pour  $n_B$ , correspondant à

$$\Omega_B h^2 \sim 0.02 \quad (8.23)$$

Cependant, c'est encore loin de ce qui est nécessaire pour justifier les observations sur la densité de matière totale.

Une abondance de l'ordre de  $10^{-10} - 10^{-9}$  est prédite pour  ${}^7\text{Li}$  à partir des réactions



(8.24)

Les éléments plus lourds ont été synthétisés en quantités négligeables, du fait qu'il n'y a pas d'élément stable avec  $A = 5$  et  $A = 8$  qui peuvent servir de relais. (Pour des noyaux à plus de 3 protons, la répulsion coulombienne est trop forte et prend le dessus sur les énergies thermiques au moment de la nucléosynthèse.

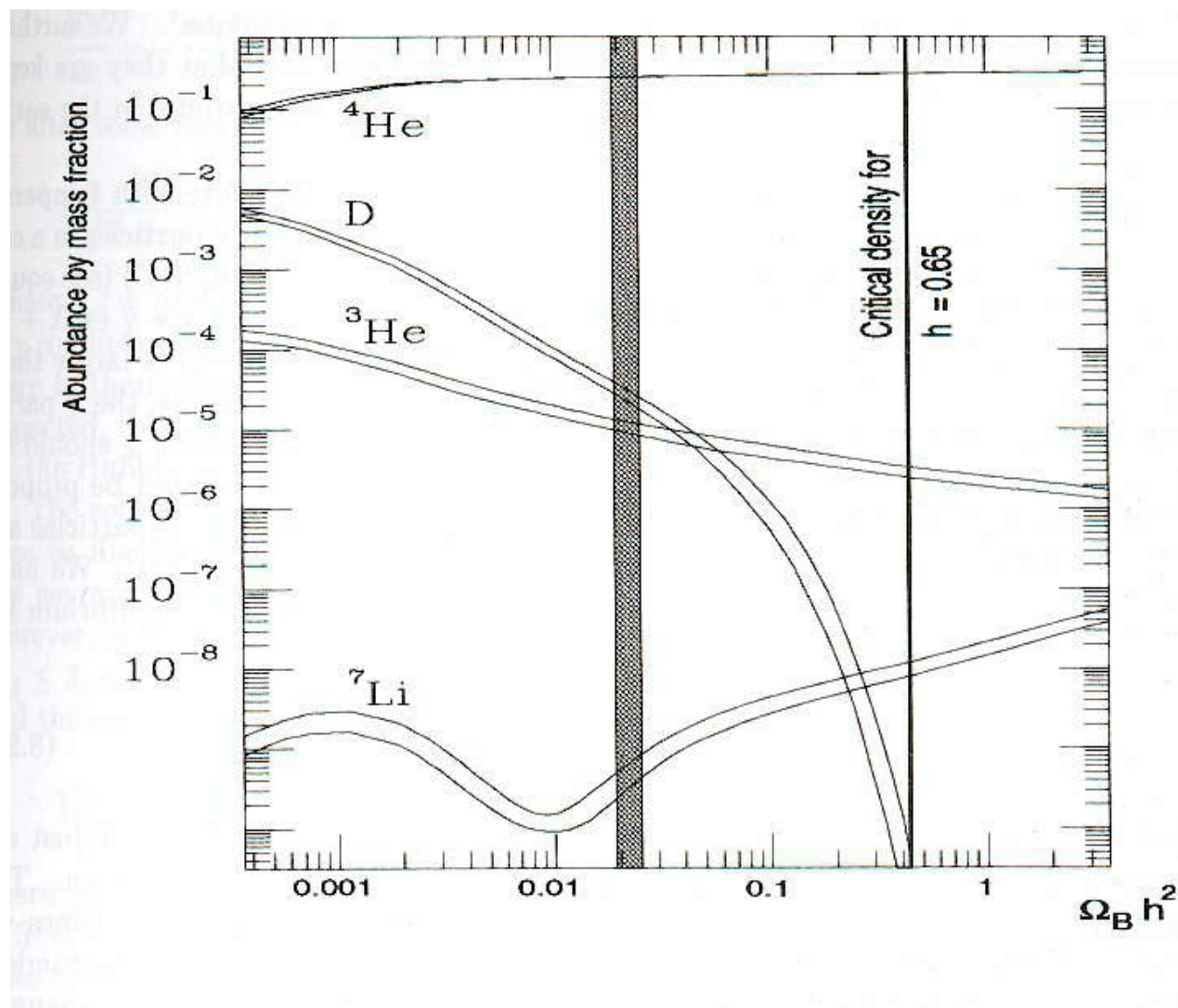


Fig 8.2 : Prédiction des abondances des éléments légers, par la nucléosynthèse associée au big bang, en fonction de  $\Omega_B h^2$ , qui est la contribution baryonique à la densité de matière actuelle. La bande verticale indique le résultat des mesures de l'abondance du deutérium primordial. Les abondances mesurées d'hélium et de lithium sont en accord avec celles définies par cette fourchette, compte tenu la marge d'incertitude des mesures. (Voir [35] pour plus de détails)

### 8.3 Gel et matière noire

Avant de calculer la fraction ionisée gelée qui reste après le découplage des photons, il nous faut introduire un formalisme au sujet de ce gel en général : ce qui se passe quand une espèce de particule sort de l'équilibre. Un traitement rigoureux s'appuie sur l'équation de transport de Boltzmann, dans un cadre en expansion, mais nous donnerons ici une démonstration simplifiée (voir par exemple le livre par Kolb et Turner [23] pour une démonstration plus rigoureuse). Nous devons d'abord considérer le cas hautement intéressant de la matière noire. Supposons qu'il existe des espèces de particules  $\chi$  inconnues, avec l'antiparticule  $\bar{\chi}$  qui peuvent s'annihiler

ou se créer par paires par le processus  $\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow X + \bar{X}$ , où  $X$  est une particule quelconque qui peut résulter de l'annihilation des  $\chi$ .

[Le neutralino supersymétrique est en fait sa propre antiparticule (comme le photon). Le formalisme est très similaire dans ce cas. En particulier, un neutralino peut s'annihiler avec un autre neutralino pour donner d'autres particules non supersymétriques dans l'état final.]

Nous supposons que les particules  $\chi$  ont un potentiel chimique nul et qu'elles étaient en équilibre thermique avec les photons et autres particules légères dans l'univers primordial (les particules  $X$  peuvent être des quarks, des leptons etc...).

Comment la densité numérique  $n_\chi$  de ces particules va t'elle évoluer dans le temps (et par conséquent avec la température)?

Il est clair que dans un équilibre thermique exact le nombre de particules  $\chi$  dans un volume comobile  $N_\chi = a^3 n_\chi$  sera donnée par la valeur d'équilibre  $n_\chi^{EQ}(T)$ , voir équation (7.16). (dans un équilibre parfait, la réaction  $\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow X + \bar{X}$  a le même taux dans les deux sens). Si la densité numérique réelle  $n_\chi(T)$  est plus importante que celle de l'équilibre, la réaction va être plus importante vers la droite : les particules  $\chi$  vont plus s'annihiler que se créer. Le taux de décroissance de  $\chi$  sera proportionnel à  $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}} |\mathbf{v}| n_\chi^2$  (quadratique en densité car elle doit être proportionnelle au produit de  $n_\chi$  par  $n_{\bar{\chi}}$  qui sont égaux). Cependant les particules  $\chi$  sont aussi créés par le processus inverse, avec un taux proportionnel à  $(n_\chi^{EQ})^2$ . Nous avons établi l'équation de base qui régit l'écart à l'équilibre pour les espèces  $\chi$ .

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = -\langle \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}} |\mathbf{v}| \rangle [n_\chi^2 - (n_\chi^{EQ})^2] \quad (8.25)$$

Le terme de gauche vient de  $1/a^3 \cdot d/dt(n_\chi a^3)$ , le terme proportionnel à  $3H$  ne fait qu'exprimer la dilution liée à l'expansion de Hubble. L'expression  $\sigma_{\chi + \bar{\chi} \rightarrow X + \bar{X}} |\mathbf{v}|$  représente la section efficace moyenne thermique multipliée par la vitesse. La moyenne est nécessaire, car les particules qui s'annihilent ont des vitesses thermiques et des directions aléatoires.

En sommant sur tous les possibilités d'annihilation on obtient:

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = -\langle \sigma_A |\mathbf{v}| \rangle [n_\chi^2 - (n_\chi^{EQ})^2] \quad (8.26)$$

où  $\sigma_A$  est la section efficace d'annihilation totale. En utilisant la relation temps température de l'équation (7.36) (pour l'ère radiative)

$$t = 0.30 \frac{m_{Pl}^2}{T^2 \sqrt{g_{eff}}} \quad (8.27)$$

Ceci peut être converti en une équation d'évolution pour  $n_\chi$  fonction de la température. Introduisons la variable sans dimension  $x = mx/T$  et normalisons  $n_\chi$  à la densité d'entropie

$$Y_\chi = \frac{n_\chi}{s} \quad (8.28)$$

Cela donne après quelques calculs



$$\frac{dY}{dx} = -\frac{m_\chi m_{Pl}}{x^2} \sqrt{\frac{g_{eff}\pi}{45}} \langle \sigma_A |v| \rangle (Y_\chi^2 - (Y_\chi^{EQ})^2) \quad (8.29)$$

ou en réarrangeant

$$\frac{x}{Y_\chi^{EQ}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H} \left[ \left( \frac{Y_\chi}{Y_\chi^{EQ}} \right)^2 - 1 \right] \quad (8.30)$$

où  $\Gamma_A = n \chi^{EQ} \langle \sigma_A |v| \rangle$ . Cette équation peut être résolue numériquement avec la condition aux limites que pour  $x$ ,  $Y_\chi \approx Y_\chi^{EQ}$  (comme à haute température les particules  $\chi$  sont à l'équilibre avec les autres particules). De (8.30) nous déduisons, que comme escompté, l'évolution est pilotée par le facteur  $\Gamma_A/H$ , le taux d'interaction divisé par le taux d'expansion de Hubble.

Les solutions de ces équations s'obtiennent numériquement dans le cas général pour trouver la température  $T_f$  et donc la valeur de  $x_f$  du gel et la valeur asymptotique à l'infini de  $Y_\chi$  et l'abondance résiduelle des espèces  $\chi$ . Il y a cependant quelques cas simples. Si les espèces sont relativistes au moment du gel ( disons  $x_f < 3$ ), alors  $Y_\chi^{EQ}$  ne change pas au cours du temps au moment du gel, et le résultat asymptotique  $Y_\chi^{infini}$  est juste la valeur à l'équilibre au moment du gel.

$$Y_\chi(\infty) = Y_\chi^{EQ}(x_f) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{eff}}{g_{eff}^s(x_f)} \quad (8.31)$$

où  $g_{eff} = g$  pour les bosons et  $3g/4$  pour les fermions. Une particule qui était relativiste au moment du gel est appelée un fossile chaud. Un exemple typique est le neutrino. La densité de masse actuelle d'un fossile chaud de masse  $m$  vaut

$$\Omega_\chi h^2 = 7.8 \cdot 10^{-2} \frac{g_{eff}}{g_{eff}^s(x_f)} \left( \frac{m_\chi}{1 \text{ eV}} \right) \quad (8.32)$$

Remarquons qu'aujourd'hui la vitesse d'une particule de masse supérieure que la faible valeur  $T_0 = 2.73K = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$  est bien entendu non relativiste et donc la contribution à la densité d'énergie est dominée par l'énergie au repos. Un neutrino ordinaire a un  $g_{eff} = 2.3/4 = 1.5$  et se découple à quelques  $MeV$  ( voir 7.55), quand  $g_{eff}^s = 10.75$ . Si on impose que l'énergie des neutrinos ne ferment pas l'univers, ( $\Omega_{\nu} h^2 < 1$ , ce qui peut aussi être une condition sur l'âge de l'univers, voir section 4.5.1), cela contraint la masse des neutrinos ( en fait la somme des masses des 3 différentes familles de neutrinos de la nature).

$$\sum_i m_{\nu_i} < (90 \text{ eV}) \cdot \Omega_M h^2 \quad (8.33)$$

Cette analyse est valable pour les fossiles chauds (matière noire chaude HDM). Pour les fossiles froids (CDM) ( les particules non relativistes au moment du gel) l'équation (8.30) doit être

résolue numériquement. Les solutions de cette équation sont données sur la figure 8.3 pour différentes valeurs de  $\langle \sigma_A |v\rangle$

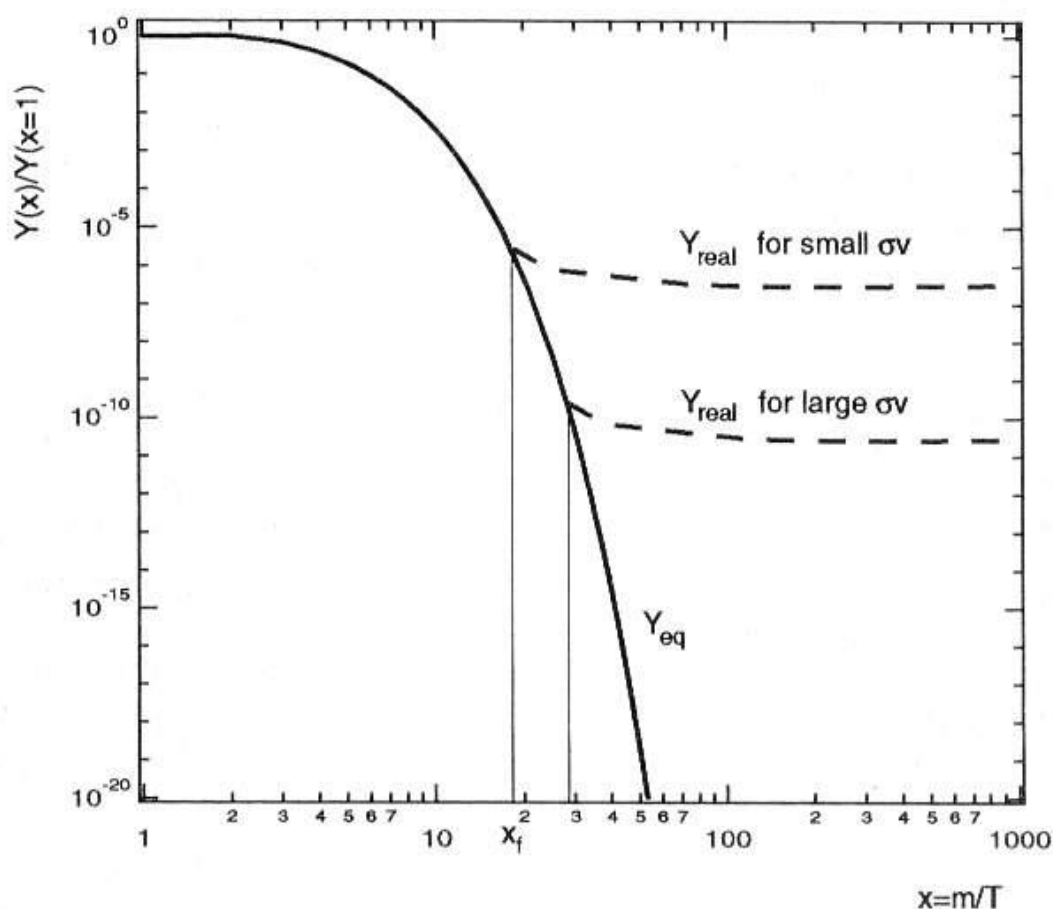


Figure 8.3 : Gel de particule massive. A une certaine valeur  $x_f = m_\chi/T_f$  la densité numérique  $Y$  (normalisée) à la densité d'entropie  $s$  et normalisée arbitrairement dans la figure à la valeur  $x = 1$  quitte la courbe d'abondance à l'équilibre  $Y_{eq}$  (ligne continue) et donne une abondance effective  $Y_{real}$  montrée par la ligne interrompue. Comme on peut voir un taux d'annihilation plus élevé  $\sigma_v$  entraîne une abondance du fossile plus petite, car la courbe effective se raccorde à la courbe d'équilibre à plus basse température. Pour des particules massives faiblement interactives  $x_f$  est de l'ordre de 20. Adapté de [23]

Comme on peut le voir la valeur de  $x_f$  (quand  $Y_\chi$  quitte la courbe d'équilibre) est plus petit pour une valeur plus faible de  $\sigma_A$  : Plus de particules faiblement interactives se découplent avant. Comme la courbe d'équilibre pour les espèces non relativistes chute rapidement avec  $x$ , ceci signifie que les particules les plus faiblement couplées doivent produire le fossile le plus important.

En appliquant numériquement, on voit qu'un neutrino hypothétique de masse  $m_\nu = 3 \text{ GeV}$  aurait la bonne masse pour fermer l'univers. D'autre part, la cosmologie interdit qu'un neutrino d'énergie dans l'intervalle  $90 \text{ eV} - 3 \text{ GeV}$  soit stable. Il y a des arguments tirés de la formation des grandes structures qui privilégient le scénario *CDM*, et un tel neutrino serait un bon candidat de la matière noire. Les expérimentations faites par l'accélérateur LEP du CERN, ont exclu que le neutrino ordinaire puisse avoir une masse de l'ordre du  $\text{GeV}$



Mais alors, qu'elle est donc cette matière noire ? Il apparaît qu'en physique des particules il y a des particules hypothétiques, comme les partenaires supersymétriques de nos particules bien connues, dont nous avons parlé au chapitre 6.9.1, qui ont la bonne force d'interaction et une gamme de masse adéquate pour en faire des candidats plausibles. En particulier le neutralino (équation (6.14)) a bien les propriétés requises à une telle candidature. Comme il est électriquement neutre il n'émet pas ou n'absorbe pas de rayonnement ce qui fait qu'il est « noir » (Matière invisible serait un terme plus correct que matière noire). Les neutralinos se couplent par l'interaction faible, mais le grand nombre de possibilités de réactions d'annihilation, qui dépendent de paramètres inconnus de brisure de la supersymétrie rendent les prédictions sur sa masse et son abondance résiduelle assez incertaines. En balayant les paramètres d'espace, on voit cependant, qu'une masse du neutralino dans la fourchette  $30 \text{ GeV} - 99 \text{ GeV}$  doit donner une abondance résiduelle proche de la densité critique. C'est, actuellement, un domaine de recherche très actif et plusieurs expériences en cours dans le monde tentent de détecter de la matière noire supersymétrique, si elle existe. Un autre candidat pour la matière noire est l'axion, un boson hypothétique léger qui a été introduit pour des raisons théoriques pour expliquer l'absence de violation  $CP$  dans l'interaction forte ( Dans l'état des connaissances, seule l'interaction faible viole la symétrie  $CP$ ). Il apparaît qu'avec une masse entre  $10^{-6}$  et  $10^{-3} \text{ eV}$ , l'axion pourrait contribuer notablement à  $\Omega_m$ . Il se couple très faiblement à la matière ordinaire, mais il peut être converti en photon dans une cavité contenant un champ magnétique fort ( le couplage de base est avec deux photons, mais le champ magnétique joue le rôle d'un photon). Des expériences sont en cours aux USA et au Japon pour investiguer ce qui pourrait se trouver dans cet intervalle de masse.

Enfin nous pouvons retourner à la question du découplage du photon : qui est la fraction ionisée qui a été gelée. En comparant le formalisme  $\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow X + \bar{X}$  avec  $e + p \leftrightarrow H + \gamma$ , nous pouvons écrire l'équation de Boltzmann simplifiée pour  $n_e$  :

$$\dot{n}_e + 3Hn_e = -\langle \sigma_{rec} |v| \rangle [n_e^2 - (n_e^{EQ})^2] \quad (8.34)$$

avec  $\langle \sigma_{rec} |v| \rangle$  section efficace correspondant à la moyenne thermique à la recombinaison qui peut être calculée

$$\langle \sigma_{rec} |v| \rangle = 4.7 \cdot 10^{-24} \left( \frac{1 \text{ eV}}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^2 \quad (8.35)$$

En résolvant numériquement ( 8.34) on obtient

$$T_f \sim 0.25 \text{ eV} \quad (8.36)$$

et la fraction d'ionisation résiduelle

$$X_e(\infty) \sim 2.7 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{\Omega_0}}{\Omega_B h} \quad (8.37)$$

Il est parfaitement plausible que cette valeur ait augmenté quand la première génération d'étoiles s'est formée, du fait du rayonnement hautement énergétique qui a ionisé le gaz primordial.

## 8.4 Résumé

L'asymétrie matière antimatière dans l'univers est de l'ordre de  $10^{-10}$ .

Bien que des mécanismes pour générer une telle asymétrie dans l'univers existent dans la théorie de physique des particules, une interprétation précise de son origine est toujours recherchée.

Les photons se sont découplés de l'équilibre thermique à un redshift d'environ 1300. Depuis cette époque de dernière diffusion ils ont été décalé vers le rouge et sont observés aujourd'hui dans le domaine micro onde, une pierre angulaire du big bang.

La nucléosynthèse s'est déroulée dans les premières minutes qui ont suivi le big bang. Les abondances observées d'hélium, deutérium et de lithium sont en accord avec les prédictions du big bang.

N'importe quelle particule neutre n'interagissant que via la force faible a pu être produite en grande quantité dans l'univers primordial et peut apporter une contribution non négligeable à la densité de matière aujourd'hui et expliquer peut être la matière noire.

Des neutrinos stables d'énergie comprise entre  $90 \text{ eV}$  et  $3 \text{ GeV}$  sont exclus, car en contradiction avec les modèles cosmologiques.

## Chapitre 9 : Inflation

### 9.1 Problèmes avec le modèle standard

A partir de 1991, le satellite COBE a cartographié le RFC et ces mesures ont montré que ce rayonnement était très isotrope, même à grande échelle ( $1000 \text{ Mpc}$ ). L'anisotropie dipolaire ( $10^{-3}$ ) est due au mouvement de la terre par rapport au référentiel cosmique repos : plus « chaud » dans la direction du mouvement, plus « froid » dans la direction opposée. En soustrayant cette composante dipolaire, les fluctuations de température ont été mesurées inférieures à

$$(\Delta T/T < 2 \cdot 10^{-5}) \text{ à l'échelle angulaire de } 10^\circ \quad (9.1)$$

C'est une des raisons qui nous a incité à utiliser la métrique de Roberston Walker FLRW pour décrire l'univers en expansion. Nous avons vu que l'équilibre thermique pouvait être maintenu aussi longtemps que la vitesse d'interaction prenait le dessus sur l'expansion de Hubble. Cependant l'horizon causal empêche les régions éloignées d'interagir. Dans un univers critique ( $k = 0$ ) de type matière, la distance d'horizon  $d_H$  croît comme  $3t$  ou comme  $2t$  dans un univers critique dominé par le rayonnement ( $k = 0$ ). Comme  $a(t) \propto t^{2/3}$  (matière) et  $a(t) \propto t^{1/2}$  (rayonnement), on voit que  $d_H/a \propto t^{1/3}$  ou  $t^{1/2}$ .

Cela signifie que dans le passé la partie causalement connectée de l'univers était plus petite. Notons que pour les ères dominées par la matière ou le rayonnement, on peut estimer la taille de l'horizon au temps de Hubble  $H^{-1}(t) \approx t$ . Comment est-il possible alors que des régions bien séparées, la température soit aussi uniforme ? Si nous introduisons l'entropie totale comme mesure de la taille des régions causalement connectées de l'univers, cela nous permet de quantifier le phénomène. Pendant l'ère radiative

$$s = (2\pi^2/45) g_{\text{eff}}^s T^3 \quad (9.2)$$

de sorte que

$$S_{\text{Hor}}^{aD} \sim \frac{4\pi}{3} d_H^3 s \sim 0.1 \frac{1}{\sqrt{g_{\text{eff}}^s}} \left( \frac{m_{\text{Pl}}}{T} \right)^3 \quad (9.3)$$

Tandis que pendant l'ère dominée par la matière

$$s = s_0(1+z)^3 \sim 3000(1+z)^3 \text{ cm}^{-3} \text{ ; et}$$

$$S_{\text{Hor}}^{MD} \sim \frac{4\pi}{3} d_H^3 s \sim 10^{88} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \quad (9.4)$$

Cela signifie qu'à la recombinaison, l'entropie à l'intérieur de l'horizon était environ de  $10^{83}$ , soit un facteur  $10^5$  plus faible que l'entropie aujourd'hui. On doit donc expliquer comment  $10^5$  régions qui étaient déconnectées, peuvent être à la même température. Ceci est quelquefois appelé le problème de l'horizon. Aujourd'hui, l'angle sous-tendu par l'horizon au moment du découplage des photons est d'environ  $0,8^\circ$ , il représente l'échelle la plus grande de connectivité causale vis à vis du lissage du RFC. En fait il est isotrope à toutes les échelles.

Un autre problème est la non concordance entre le lissage à grande échelle et les inhomogénéités observées à plus faible échelle, comme les galaxies, les amas de galaxies, les superamas et peut être d'autres structures plus grandes.

Quel mécanisme a généré les germes des perturbations qui ont ensuite évolué vers ces structures. Peut être que la plus grande difficulté en cosmologie standard est de déterminer si l'univers est plat, ouvert ou fermé, bien qu'il soit très vieux. Les observations nous apprennent que  $\Omega$  vaut entre 0,2 et 2. Si nous nous souvenons que  $\Omega$  varie dans le temps, ceci a des conséquences frappantes. Nous avons déjà utilisé le fait que dans l'univers primordial, le terme de courbure  $\approx k/a^2$  dans l'équation de Friedmann était moins grand que le terme de densité d'énergie  $8\pi G\rho/3$ . Nous pouvons chiffrer cela en écrivant que approximativement

$$\Omega(t) - 1 = \delta(t) \tag{9.5}$$

vith

$$\delta(t) = \frac{k/a^2}{8\pi G\rho/3} \sim \begin{cases} a(t), & \text{matter domination} \\ a^2(t), & \text{radiation domination} \end{cases} \tag{9.6}$$

Ceci montre que au début, ( $a$  petit)  $\Omega$ , a dû être très proche de 1. Par exemple au début de la nucléosynthèse (environ 1 seconde)  $\Omega(1s) = 1 \pm 10^{-16}$  et au tout début (époque de Planck),  $t = 10^{-43} \text{ sec}$ ,  $\Omega(10^{-43} \text{ sec}) = 1 \pm 10^{-60}$

Une autre façon de dire cela, c'est que l'univers a dû être extrêmement plat au tout début. Si on définit le rayon de courbure de l'univers par  $a_{curv} = a(t) / \sqrt{|k|}$  ( ce qui signifie que pour un univers fermé, c'est le rayon de la sphère) on peut montrer( voir annexe a)

$$a_{curv} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{k}{\Omega - 1}}, \quad k \neq 0 \tag{9.7}$$

Remarquons que bien que nous ayons normalisé la métrique de sorte que  $k = 0, +1, -1$ , les modèles fermés et ouverts représentent une infinité de classes de modèles, dont un représentant particulier est donné en spécifiant  $a_{curv}$  à un moment donné.

Des équations (9.7) et (9.6), nous voyons que  $a_{curv}$  a dû être énorme comparativement au rayon de Hubble  $H^{-1}$ .

$$a_{curv}(1 \text{ sec}) > 10^8 H^{-1} \tag{9.8}$$

$$a_{curv}(10^{-43} \text{ sec}) > 10^{60} H^{-1} \tag{9.9}$$

La difficulté d'expliquer pourquoi l'univers primordial a été si plat est appelée, le problème de la platitude.

On peut remarquer que ce problème n'est pas en contradiction avec le modèle du Big Bang : c'est un problème de conditions initiales. Comme ces conditions initiales se réfèrent à une époque où les lois de la physique, qui sévissaient alors, nous sont inconnues, difficile de mesurer l'ampleur réelle du problème. Mais il est plus satisfaisant de disposer d'un mécanisme

générique qui produit ces conditions plutôt que d'être obligé de recourir à un ajustement aussi fin de ces paramètres. L'inflation est un de ces mécanismes.

Un autre problème plus technique aussi résolu par l'inflation est celui des « monopôles ».

Nous avons de bonnes raisons de croire (comme G. 'tHooft et A. Polyakov l'ont montré) que l'unification des forces dans la nature implique que des monopoles magnétiques super-massifs ont du être produits vers  $T = 10^{15} \text{ GeV}$ . Si on calcule l'abondance fossile, on trouve qu'ils auraient dû très largement refermer l'univers, à moins qu'un mécanisme ne dilue leur densité. L'inflation réalise une telle dilution.

Finalement, il existe un autre problème lié à l'inflation, mais qu'elle ne résout pas. C'est la valeur très faible de la constante cosmologique. Reconsidérons l'équation de Friedmann complète (4.16), montrant explicitement la contribution de la constante cosmologique  $\Lambda$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (9.10)$$

Nous voyons que la bonne comparaison entre le terme relatif à la matière  $\rho$  et la constante cosmologique (énergie du vide)  $\Lambda$  est donné par leur rapport :

$$r_\Lambda(T) \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G\rho(T)} \quad (9.11)$$

L'observation nous dit que  $r_\Lambda^0 < 1$ , ce qui signifie qu'à l'époque de Planck,  $r_\Lambda^{\text{Planck}} < 10^{-122}$ , un des nombres sans dimension les plus petits rencontrés en physique.

La constante cosmologique représente l'énergie du vide et comme l'échelle d'énergie pour la gravitation est  $m_{pl}$ , on s'attend à  $\Lambda/8\pi G \sim m_{pl}^4$ , ce qui est faux de 122 ordres de grandeurs (voir discussion au chapitre 4.6). La raison de la faiblesse de la constante cosmologique est toujours inexpliquée, et il est habituel de la poser égale à zéro ou du moins très voisine de zéro. Cependant, pendant les transitions de phase, l'énergie du vide peut être libérée. Alors, même si l'énergie du vide est proche de zéro aujourd'hui, il a pu en être autrement dans l'univers primordial, avant les transitions de phase. Ceci a conduit A. Guth (1981) à envisager l'influence sur le modèle cosmologique, d'une transition de phase où l'énergie du vide a pu être libérée.

## 9.2 Le mécanisme de l'inflation

L'équation d'Einstein avec constante cosmologique s'écrit.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (9.12)$$

Cela montre que le terme « constante cosmologique » se comporte comme un tenseur énergie impulsion avec une équation d'état inhabituelle  $p_{vac} = -\rho_{vac}$ . (Nous avons déjà remarqué qu'on pouvait définir une énergie du vide dans le terme proportionnel à  $G$ , par  $\rho_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$ ). Cela signifie que la densité d'entropie  $s \approx \rho + p \approx 0$ , à savoir quand l'énergie du vide domine, l'entropie tend vers zéro !.

[ La mécanique statistique, nous permet de le comprendre. L'entropie dépend du nombre total de degrés de libertés, et le vide (au moins s'il est unique) correspond à un seul état, soit un degré de liberté. Bien sûr, l'entropie présente avant l'inflation est toujours là, mais elle a été diluée d'un facteur exponentiel, par l'inflation. ]

Quand c'est l'énergie du vide qui domine l'univers, alors l'équation de Friedmann relative à la dynamique de cet Univers devient très simple et s'écrit :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \quad (9.13)$$

or

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \text{const} \quad (9.14)$$

with the solution

$$a \sim e^{Ht} \quad (9.15)$$

D'où le qualificatif « d'inflation » (valable en économie également)/ Le taux d'expansion est constant, ceci conduisant à une croissance exponentielle du facteur d'échelle ( qui correspond au prix d'une denrée en économie).

Dans un modèle typique d'inflation, le champ scalaire associé à la transition de phase ( appelé quelquefois le champ d'inflaton) est actif à des échelles de températures proches de celle de la grande unification  $T_{gut} = 10^{15} \text{ GeV}$ , quand le temps de Hubble valait  $10^{-34}$  sec, et supposons que cette inflation a duré  $10^{-32}$  sec. (Ceci peut sembler être un temps court, mais rappelons que l'échelle de temps adéquate en cosmologie, est le temps de Hubble, et dans cette échelle l'inflation a duré 100 fois le temps de Hubble, c'est à dire cent fois l'âge qu'avait l'univers quand l'inflation a commencé.) Quand l'inflation a cessé, l'énergie du vide du champ de l'inflaton a été transférée aux particules ordinaires, et un réchauffement de l'univers en a résulté.( Pendant l'inflation, l'univers s'est considérablement refroidi, l'entropie restant constante à un bas niveau, soit  $a.T = \text{constante}$ , ce qui se traduit par  $T \approx e^{-Ht}$ ). La température de réchauffement est de l'ordre de celle de la transition de phase,  $T_{RH} \approx 10^{15} \text{ GeV}$  ( si l'inflaton est suffisamment fortement couplé avec la matière ordinaire, comme on le suppose dans les modèles d'inflation qui marchent).

Considérons une petite région d'un rayon d'environ  $10^{-23}$  cm avant l'inflation. L'entropie dans ce volume est d'environ  $10^{14}$ . Après l'inflation, de la région s'est accrue d'un facteur  $(e^{100})^3$  soit environ  $1.9 \cdot 10^{30}$ , alors après la génération d'entropie liée au réchauffement, l'entropie totale dans la région s'est établie à  $10^{144}$ .

De l'entropie est générée car l'équation d'état qui était  $p = -\rho$  avant devient  $p = \rho/3$  après, ce qui signifie que la densité d'entropie  $s \approx p + \rho$  s'accroît considérablement.

Cet accroissement énorme d'entropie résout trois des quatre problèmes cités précédemment. Le problème de l'horizon, est résolu car notre univers observable peut être issu d'un volume minuscule dont tous les points étaient en contact causal avant l'inflation. La région lissée par l'inflation, a bien plus d'entropie qu'il ne faut, pour y inclure tout notre univers observable.

Pendant l'inflation la densité d'énergie de l'univers reste constante, alors que le facteur d'échelle  $a$  croît exponentiellement. Ceci signifie ( voir équation (9.6)), que  $\Omega$  après l'inflation a dû exponentiellement être voisin de 1, et  $\Omega_0 = 1$ , à une précision diabolique. L'inflation résout également le problème de la platitude ( Une autre façon de le voir est que toute courbure locale a été lissée par l'expansion). Même si  $\Omega_0 = 1$  est prédit avec une grande précision, rien, a priori, par contre ne nous indique les différentes contributions de la matière, du rayonnement et du vide à  $\Omega_0 = 1$ . Comme nous l'avons déjà dit la contribution naturelle de  $\Omega_A$  est soit très grande soit très petite. Mais  $\Omega_A$  n'a pu être du même ordre de grandeur que la contribution de la matière  $\Omega_M$ , que pendant des temps très courts ( voir chap. 4.3.1).

Le problème des monopoles est aussi résolu, car le densité numérique de tels objets a été diluée par un facteur de  $1.9 \cdot 10^{130}$  pendant l'inflation. La même chose est vraie pour les cordes

cosmiques et autres défauts topologiques. (Cependant, s'il y avait eu d'autres transitions de phase, après la période d'inflation, d'autres défauts auraient pu se former).

La période d'inflation et de réchauffement est hautement non adiabatique, car il y a eu une génération énorme d'entropie au moment du réchauffement. A la fin de l'inflation, l'univers repart en régime adiabatique, en conservant  $a.T$ , et c'est en raison de ces nouvelles conditions initiales très particulières que les problèmes de platitude, de l'horizon et des monopoles peuvent être évités. Ceci est montré schématiquement sur la figure 9.1

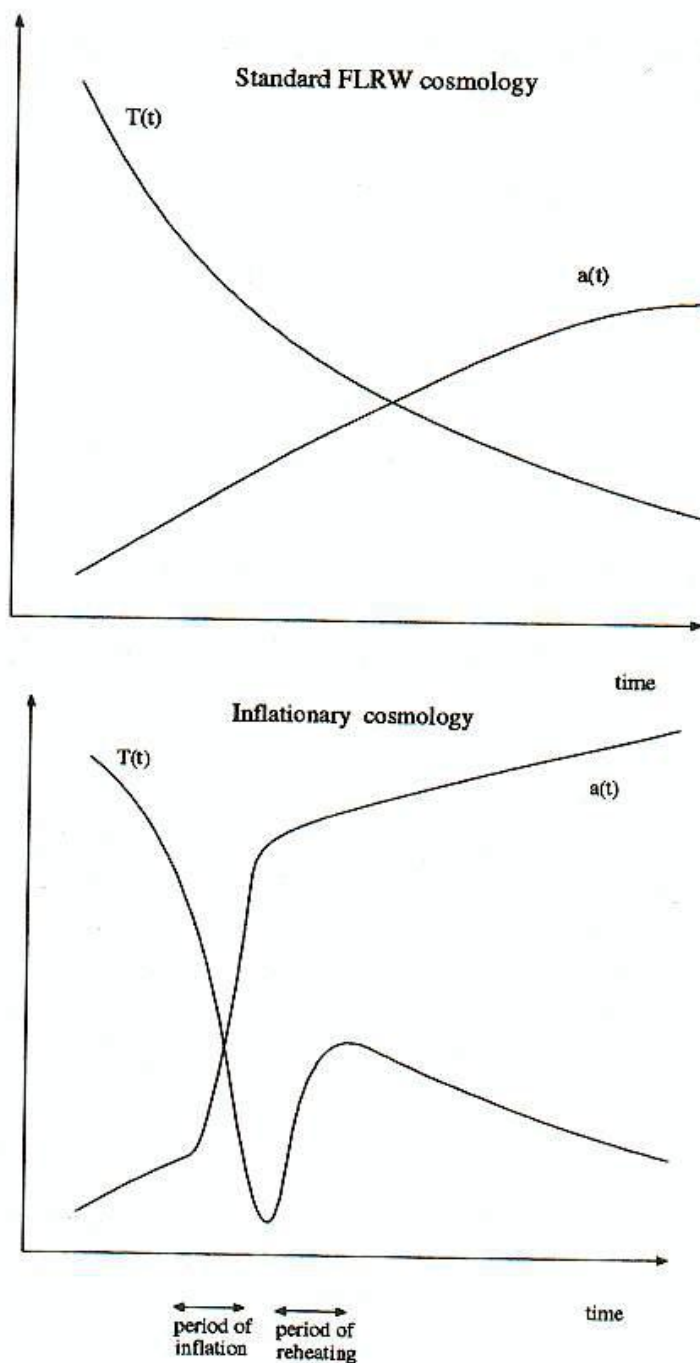


Figure 9.1 : L'évolution schématique de  $a$  et  $T$  dans une cosmologie inflationniste. Pendant l'époque d'inflation,  $T$  décroît exponentiellement pendant que le facteur d'échelle croît



exponentiellement. A la fin de l'inflation, une quantité énorme d'entropie est générée, et l'univers repart dans une phase similaire à celle de la cosmologie *FLRW* classique.

### 9.3 Modèle pour l'inflation

L'inflation est un scénario très intéressant, qui est même corroboré par quelques observations (la structure des fluctuations du *RFC* semble cohérente avec les prédictions du modèle inflationniste). Cependant, il s'est révélé très difficile de construire des modèles théoriques qui produisent le bon niveau d'inflation et qui permettent d'en sortir au bon moment en libérant l'énorme entropie considérée.

Rappelons nous qu'une densité de Lagrangien de la forme.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (9.16)$$

donne une contribution au tenseur énergie impulsion  $T^{\mu\nu}$  de la forme

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (9.17)$$

Pour un état homogène, les termes de gradient spatial s'annulent, et  $T^{\mu\nu}$  devient de type « fluide parfait » [si on conserve les termes du gradient, on voit qu'ils sont divisés par  $a(t)^2$ , ce qui signifie qu'après une courte période d'inflation, ils s'atténuent exponentiellement]

avec

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (9.18)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (9.19)$$

Comme on peut le voir en reportant (9.16) dans (9.17) et en comparant avec (3.51)

Les équations du mouvement de  $\Phi$  peuvent être dérivées de la condition de nullité de la quadri-divergence du tenseur énergie impulsion,  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ , ce qui donne ( problème 9.2)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (9.20)$$

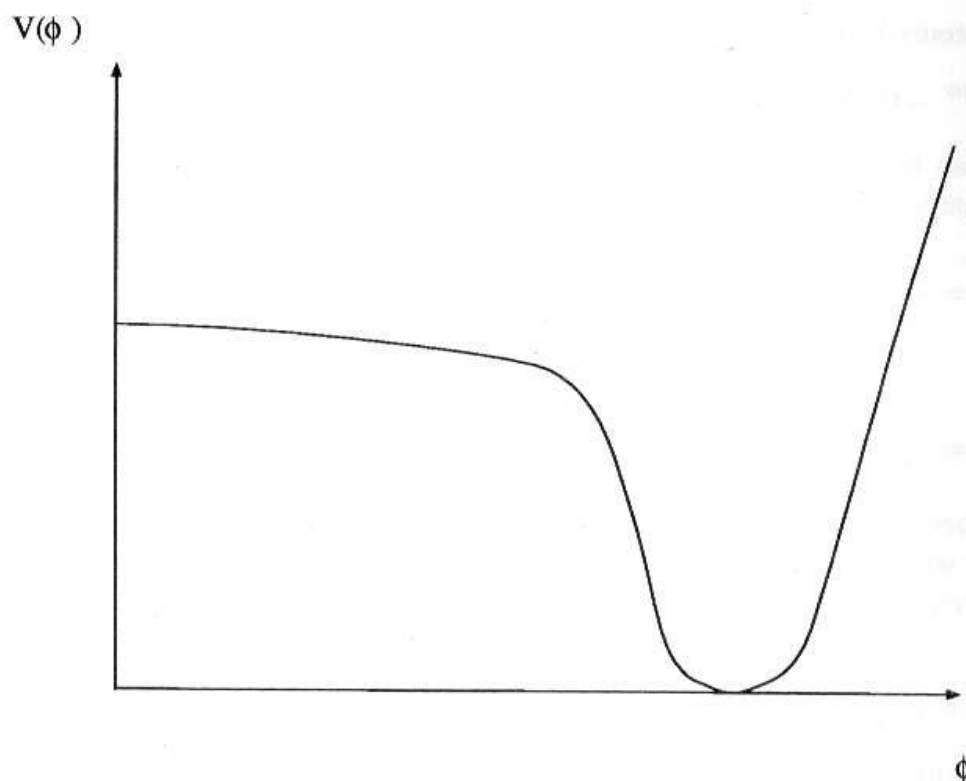
Ceci est similaire à l'équation du mouvement d'une boule dans un puits de potentiel, avec un « frottement de Hubble »  $\approx 3H_0$ , et peut être résolu simplement.

Posons qu'à très haute température  $\Phi = 0$  donne le minimum du potentiel, mais le terme dépendant de la température, dans le potentiel effectif, génère un autre minimum pour  $\Phi = \Phi_{vac} \neq 0$  (brisure spontanée de symétrie). Pour produire une période d'inflation suffisamment longue, et un réchauffement rapide à la fin, le potentiel doit ressembler à celui montré en figure 9.2.

Au début, sur la partie presque horizontale qui mène au puits de potentiel profond,  $\Phi''$  peut être négligé, et l'équation du mouvement se ramène à  $3H\dot{\Phi} + V(\Phi) = 0$ , et avec l'équation de Friedmann  $H^2 = 8\pi G/3V(\Phi)$ , cela donne ( problème 3) une expression adéquate pour le nombre  $N_\phi$  lié au facteur d'échelle. Ici, nous utilisons le fait que  $H$  est presque constant pour écrire  $a_2/a_1 = \exp(\int_{t_1}^{t_2} H(t) dt)$  : soit



$$N_\phi \equiv \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = \int H dt = -8\pi G \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi \quad (9.21)$$



**Figure 9.2** : Forme approximative du potentiel de l'inflaton  $V(\Phi)$  requis pour générer une évolution temporelle acceptable, pendant et après l'inflation.

Donc pour produire une croissance forte du facteur d'échelle,  $V(\Phi)$  doit être très plat ( $V'(\Phi) \approx 0$ ). A ce jour, nous n'avons pas de justification naturelle d'un tel potentiel, excepté peut être dans certaines théories supersymétriques où des « directions plates » peuvent surgir du fait des brisures de la supersymétrie.

Dans l'image de la balle qui roule, le réchauffement correspond aux oscillations dans le puits de potentiel. Donc pour que suffisamment d'entropie soit générée, la pente du puits doit être « raide ». Le problème, pour construire un potentiel convenable est qu'il faut qu'il soit plat autour de  $\Phi = 0$  et pentu près de  $\Phi = \Phi_{min}$ .

L'inflation est quasiment devenue une brique standard du modèle standard de la cosmologie.

La recherche de la solution théorique produisant un tel potentiel et la description du réchauffement fait l'objet de nombreux travaux.

Si les observations confirment (c'est le cas) que la densité totale d'énergie  $\Omega$  est égale à 1, alors l'explication la plus naturelle est que l'univers a connu une période d'inflation. Un autre test de l'inflation sera fourni par analyse fine du rayonnement du RFC (position du premier pic du spectre de puissance de la densité d'énergie par *WMAP* : le test confirme la platitude à 2% d'incertitude près). Nous verrons au chapitre 12, que l'inflation prédit un spectre de puissance pratiquement invariant d'échelle.

#### 9.4 Résumé

L'inflation est un mécanisme qui peut résoudre la plupart des problèmes de la cosmologie standard. Parmi eux, le fait que l'univers est plat, homogène à large échelle et le problème des monopoles.

La prédiction la plus importante de l'inflation est que  $\Omega = 1$  avec une grande précision, et que les fluctuations du RFC doivent être pratiquement invariantes d'échelle.

Le modèle le plus simple de la physique des particules pour l'inflation, utilise un potentiel d'un champ hypothétique (inflaton) qui dépend de la température et est similaire au potentiel de Higgs. Cependant il n'est pas simple d'ajuster quantitativement le profil de ce champ pour produire les effets désirés, d'autant qu'aujourd'hui, nous n'avons trouvé aucune justification théorique qui privilégie un tel profil.

## Chapitre 10: Transitions de phase

### 10.1 Introduction

La théorie relativiste quantique des champs, offre la meilleure description des particules fondamentales et de leurs interactions jusqu'à des énergies atteignant la grande unification autour de  $10^{15}$  GeV, un nombre dont d'intéressantes conséquences en cosmologie furent rapidement identifiées. L'une d'entre elles concerne la possibilité ( cf chapitre 9) pour l'énergie du vide de certains champs de générer une expansion extrêmement rapide (inflation) de l'univers primordial. Une autre est que l'univers est parti d'un état très chaud, puis s'est refroidit de façon significative, ce qui a pu provoquer toute une série de transitions de phase, de la soupe primordiale, comme l'eau existe sous forme de vapeur, de liquide et de solide, lorsqu'on la refroidit en dessous du point d'ébullition et du point de solidification.

Bien que certains défauts aient pu se former pendant les transitions de phase, des transitions comme les monopoles, les murs d domaines sont exclus, car il auraient provoqué l'effondrement de l'univers, d'autres, les cordes et textures, qui ont pu se former après l'inflation (si elle s'est produite, car pour intéressante que soit l'hypothèse, elle n'est pas certaine). Elles ont pu avoir un effet déterminant sur la formation des structures, et feront l'objet d'une expérience embarquée sur un ballon. L'étude des transitions de phase cosmologiques est une branche fascinante de la cosmologie qui a des attaches étroites avec la physique des particules et celle de la matière compacte.

[ j'ai traduit par matière compacte, « condensed matter », de préférence à matière condensée, en fait il s'agit des états solides et liquides de la matière, états où il y a des interactions non négligeables entre les atomes et molécules du système, autres que celles liées aux chocs élastiques, à la différence d'un gaz, par exemple, où les interactions sont essentiellement par choc élastique]

### 10.2 Transitions de phase dans la matière compacte.

En physique statistique, on distingue les transitions de phase du premier ordre (discontinues) et celles du second ordre (continues) Dans celles du premier ordre (comme l'eau qui bout), il y a une chaleur latente qui est en jeu, et la transition de phase s'opère souvent par apparition et croissance de bulles. Dans une transition de phase du deuxième ordre, le changement est moins radical, quand il se produit, les régions de nouvelle phase grandissent de plus en plus, quantitativement fonction de la longueur de corrélation. Dans n'importe quelle transition de phase, on peut, pour les autres paramètres externes ( pression, volume, champ magnétique..) identifier une température critique  $T_c$ . Près de cette température critique tous les paramètres peuvent s'exprimer par rapport à la température « réduite »

$$\varepsilon = (T-T_c)/T_c \quad (10.1)$$

où, par exemple le comportement de la longueur critique  $\xi$ , lorsqu'on s'approche, en diminuant, de  $T_c$ , dans une transition de phase du deuxième ordre s'écrit

$$\xi = \xi_0 \cdot \varepsilon^{-\nu} \quad (10.2)$$

où  $\nu > 0$  et  $\xi_0$  est une constante qui dépend des détails de l'interaction. Bien sûr, il serait utile d'estimer  $\nu$  et les autres exposants critiques. En fait, des méthodes théoriques très puissantes ont été développées pour analyser le comportement du système lorsque l'échelle de longueur et successivement changée : l'approche par le groupe de re-normalisation. Une méthode plus intuitive, mais moins puissante a été proposée par Landau vers 1950. Pour analyser un système, Landau utilise un Hamiltonien effectif, qui doit refléter les symétries et la dynamique essentielle du système.

### 10.2.1 La description des transitions de phases selon Landau

Nous allons donner un exemple de la méthode de Landau, qui va permettre d'introduire la description de la formation des cordes cosmiques dans l'univers primordial. Première tâche, identifier les variables qui vont décrire l'état du système que nous considérons et qui peuvent nous renseigner dans quelle phase est une certaine partie de ce système. Une telle variable est appelée un paramètre d'ordre. Par exemple, dans l'hélium liquide, une transition de phase vers un état superfluide peut arriver à très basse température (de l'ordre de  $2K$ ). Dans cette phase superfluide les atomes d'hélium forment un condensat de Bose Einstein, qui peut être décrit par une fonction d'onde macroscopique cohérente :  $\psi(r) = \eta.e^{i\phi(r)}$  où  $\eta^2$  est fonction de la densité du fluide (c'est différent d'une fonction d'onde de Schrödinger, car le principe de superposition n'est pas valable). A haute température, le mouvement des atomes est erratique, donc  $\eta = 0$ . A des températures, en dessous de la température critique  $T_c$ , le condensat se développe et  $\eta \neq 0$ .

Pour décrire la dynamique de ce système simple, nous choisirons  $\psi(r)$  comme paramètre d'ordre, et remarquerons que comme  $\psi$  doit valoir zéro dans la phase à haute température et pas zéro en dessous de la température critique, le Hamiltonien effectif près de  $T_c$  doit être très similaire à celui du champ de Higgs que nous avons évoqué au chapitre 6.6.  $\psi$  est un champ complexe, et nous voulons décrire le système par un Hamiltonien à valeurs réelles, globalement invariant par  $U(1)$ .  $U(1)$  est le groupe de multiplication des nombres complexes  $e^{i\alpha}$  sur le cercle unité que nous avons évoqué dans le chapitre 6.6, ( $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ ). Autrement dit, l'énergie libre du système ne doit pas dépendre de la phase de la fonction d'onde. Les termes possibles les plus simples sont donnés de façon unique par

$$\mathcal{H}_{eff} = |\nabla\Psi|^2 + b(T)|\Psi|^2 + c(T)|\Psi|^4 \quad (10.3)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 6.7, la brisure spontanée de symétrie se produit si le coefficient  $b$  du deuxième terme du second ordre est négatif. La brisure de symétrie à  $T = T_c$  est alors conséquence de l'hypothèse

$$b(T) = b'(T-T_c) \quad (10.4)$$

avec  $b' > 0$

Au dessus de la température de transition, de phase, le minimum du potentiel effectif est réalisé quand

$$|\nabla\Psi| = |\Psi| = 0,$$

Tandis que au dessous  $T_c$ , il est donné par

$$|\nabla\Psi| = 0, |\hat{\Psi}|^2 = v^2,$$

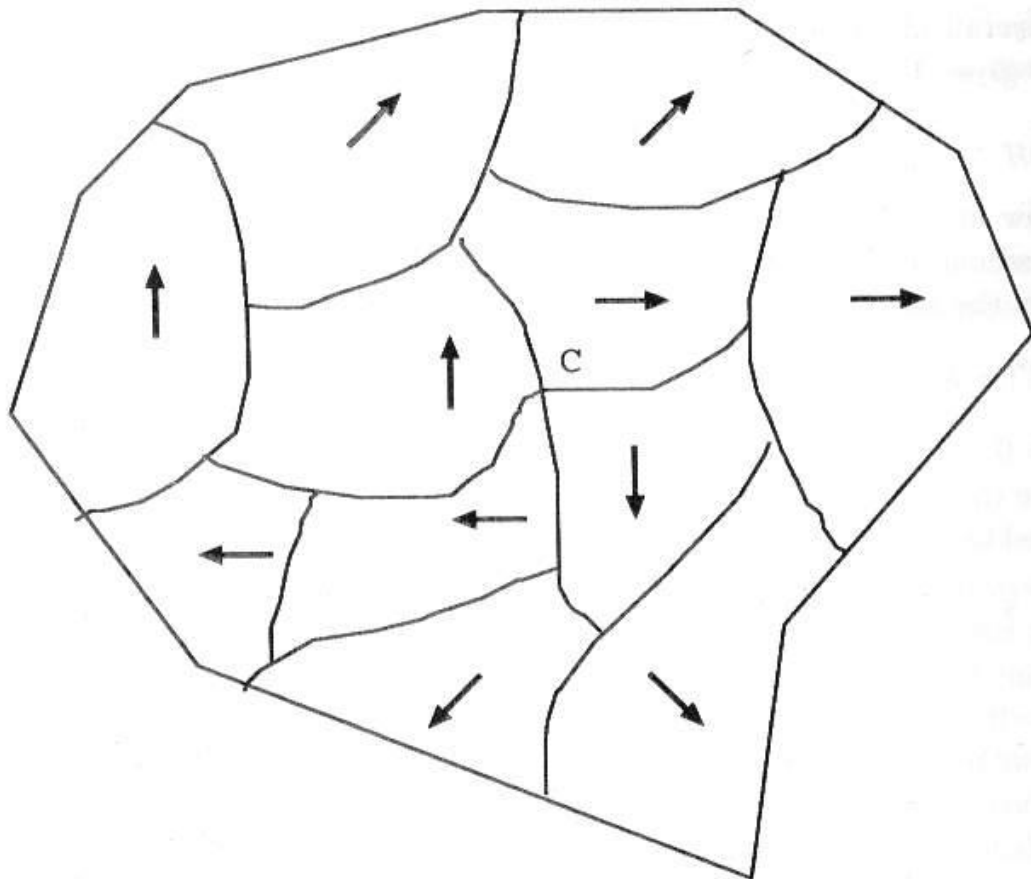
$$\text{Avec } v = \sqrt{-b/2c}$$

Alors l'état de moindre énergie, l'état du vide par définition, possède une phase constante  $\theta$  et une amplitude  $v$  constante. Cependant n'importe quelle valeur de  $\theta = \text{Constante}$  fait l'affaire : L'état du vide n'est pas unique, à la différence de ce qui se passe au dessus de la transition de phase où l'état du vide correspond à  $\psi = 0$

Ici remarquons une propriété très importante d'un système décrit par (10.3). Il possède une longueur de corrélation  $\xi$ , qui varie avec la température, comme on peut le montrer, conformément à la règle  $\xi(T) = \xi_0 e^{-\nu}$ , où  $\nu \approx 0,5$ . La signification de la longueur de corrélation est que le champ n'est pas corrélé au delà de distance égales à  $\xi$ , de sorte que quand le système se refroidit, les régions séparées de plus de  $\xi$ , vont avoir des  $\theta$ , de différentes valeurs. En gros, on ne sait pas ce qui se passe plus loin que la distance de corrélation. La figure (10.1) montre ce qu'il advient quand le système se refroidit et que ces régions causalement déconnectées se rencontrent. Il va y avoir un problème de phase, ou un défaut qui peut être suffisamment stable, si la structure du potentiel effectif a certaines propriétés.

Si nous supposons une région comme celle décrite sur la figure 10.1, et que nous calculons la variation de phase  $\Delta\theta$  de  $\Psi$  en décrivant une boucle autour du point C, nous trouvons qu'il doit être un multiple de  $2\pi$  (ceci est imposé par le fait que  $\Psi$  doit être uniforme). Donc,  $\Delta\theta = 2\pi n$  avec  $n$  entier. Disons que nous avons une unité giratoire (qui est  $n = 1$ ).

Maintenant si nous faisons tendre vers zéro, la taille de la boucle, le nombre giratoire ne va pas changer, à moins que nous ne croisions une singularité de phase non définie. C'est pourquoi le nombre giratoire peut être écrit comme une intégrale curviligne du gradient de la phase, et est donc une application analytique du champ de phase  $\theta(r)$  sur les entiers. Une déformation continue du contour ne peut pas générer de discontinuité du nombre giratoire, à moins de croiser une singularité. Alors il est possible de faire tendre vers zéro la taille de la boucle, en conservant le nombre giratoire. De cette manière, nous avons défini un point dans l'espace où la phase doit être non définie, la seule possibilité étant alors que  $\nu = 0$ , donc la phase est non définie. Donc en ce point le champ repose sur un faux vide symétrique à  $\Psi = 0$ .



**Figure 10.1 : La phase est représentée par la direction d'une flèche dans chaque région. Un défaut topologique apparaît quand il y a un conflit de phase en un point, ici typiquement en C.**

Par le même type de raisonnement, nous réalisons qu'il doit exister des lignes singulières, des cordes topologiques, autrement nous pourrions déformer la boucle, de façon à éviter le point singulier. Des cordes  $U(1)$ , comme celles ci, peuvent être seulement fermée ou infinie ( ce qui dans un système de matière compacte, signifie qu'elles se terminent à une frontière). Elles sont très stables, car supprimer la corde, suppose un réarrangement cohérent des phases au niveau macroscopique. L'énergie d'une corde peut être évaluée à partir d'arguments dimensionnels. Comme le corps de la boucle représente le faux vide avec  $v = 0$ , un grand corps accroît l'énergie. Par contre si le corps diminue, le gradient du champ s'accroît, ce qui aussi accroît l'énergie (selon l'équation 10.3), donc on en déduit qu'il existe un rayon du corps de la corde qui minimise l'énergie par unité de longueur.

Quand les cordes se forment par un processus continu de transition de phase, on escompte une densité de l'ordre de une corde par volume de cohérence du fait du mécanisme de réarrangement. Clarifions un point ici.

Nous avons dit que la longueur de corrélation tend vers l'infini à la température critique  $T_c$ . Donc les cordes seraient distantes de l'infinie longueur de corrélation : ce qui donnerait une densité négligeable ! En fait ce n'est pas exact pour plusieurs raisons. D'abord pour les cordes déjà formées, pour les annuler, une énergie thermique est nécessaire pour franchir la barrière de potentiel.

Quand la température est en dessous de la température appelée température de Ginzburg, les défauts sont gelés et n'évoluent plus. Deuxièmement, la situation réelle de refroidissement peut faire que le temps de refroidissement soit plus court que le temps de réarrangement du réseau de cordes, compte tenu de la nouvelle température ( Il y a donc un gel du réseau de cordes, de la même façon que pour les particules, comme nous l'avons étudié en 8.3) [ on est hors de l'équilibre thermique]

La formation de cordes a été vérifiée expérimentalement dans le superfluide  $^3He$  (Sujet du prix Nobel de physique en 1966) où la description microscopique est plus complexe (Des paires d'atomes  $^3He$  se lient ensemble à la manière des paires de Cooper en supraconductivité), mais le Hamiltonien effectif contient une variété de vide de structure  $U(1)$  comme discuté ci dessus. Que les résultats expérimentaux confirment l'existence de défauts du type cordes est plutôt rassurant, et confirment le mécanisme de formation que nous n'avons fait que présenter. Cette recherche présente d'intéressantes analogies entre la physique de la matière compacte et la cosmologie.

### 10.3 Murs de domaines, cordes et autres défauts

L'idée que la structure du vide des champs fondamentaux de la nature dépend de la température et peut donc donner naissance à une série de transitions de phase dans l'évolution de l'univers a été très fertile. Non seulement on peut y trouver des mécanismes pour générer la structure de l'univers : l'absence de certains types de défauts topologiques correspond à des contraintes sur la théorie sous jacente.

Rappelons nous le Lagrangien que nous avons utilisé avant pour illustrer le mécanisme de Higgs dans la physique des particules et dans la formation des cordes dans les systèmes de matière compacte.

Pour rendre la discussion générale, introduisons un nombre arbitraire de composantes réelles du champ  $\Phi$ . Une autre façon de dire cela est que nous avons un ensemble de champs  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 1 \dots N$ , valorisés par des réels, qui interagissent de sorte qu'il est naturel de les regrouper dans un vecteur colonne.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Le modèle  $O(N)$  est défini comme étant invariant par des rotations orthogonales des « coordonnées »  $\Phi_i(x)$ , pour  $x$  fixé. Une manière simple de garantir cette invariance par rotation (dans l'espace interne du champ) est d'écrire la densité d'énergie potentielle des champs comme fonction du « carré de la longueur »

$$|\phi|^2 = \phi^T \phi$$

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^T \phi + \frac{\lambda}{2} |\phi|^4 + \text{const.} \quad (10.5)$$

Ici, nous ne considérons que des transformations globales indépendantes de  $x$ , donc pour l'énergie cinétique nous choisirons  $\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi$ .

Le Lagrangien pour notre modèle  $O(N)$  est alors

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi^T \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^T \phi)^2 + \text{const} \quad (10.6)$$

Le signe de  $\mu$ , qui peut dépendre de la température, détermine si le vide est trivial ( $\Phi_i = 0$  quel que soit  $i$ ), ou donné par la variété dans l'espace associé à  $\Phi_i$  (espace de champ) défini par l'équation.

$$\phi^T \phi = v^2$$

avec

$$v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Dans le cas le plus simple  $N=1$ , l'équation pour l'état du vide est (nous désignons l'unique composante  $\Phi_i$  par  $\Phi$ )

$$\phi_{vac}^2 = v^2 \quad (10.7)$$

qui a deux solutions  $\Phi_{vac} = \Phi_+ = v$  et  $\Phi_{vac} = \Phi_- = -v$ . Supposons qu'après la transition de phase, une région de notre univers soit dans l'état  $\Phi_+$  et qu'une autre région causalement déconnectée soit dans l'état  $\Phi_-$ . Quand l'horizon s'étend par l'expansion de Hubble, les deux régions vont se rencontrer avec un désaccord sur la valeur de  $\Phi_{vac}$ . Un saut brutal de  $\Phi_+$  à  $\Phi_-$  correspond à une énergie infinie (car la partie gradient de la densité d'énergie va diverger). De même transformer un état dans l'autre demanderait pratiquement une énergie infinie (du fait de la barrière d'énergie séparant les deux états). Donc la configuration d'énergie minimum va impliquer un changement continu du champ de  $\Phi_+$  à  $\Phi_-$  sur une échelle de longueur  $\delta$ . Cette configuration est appelée **un mur de domaine**. Supposons que nous avons un mur dans le plan  $yz$ . Alors les équations du mouvement (6.4) pour le Lagrangien (10.6) prennent la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \lambda \phi (\phi^2 - v^2) = 0 \quad (10.8)$$

avec des conditions aux limites  $\Phi(x = -\infty) = \Phi_- = -v$ ,  $\Phi(x = +\infty) = \Phi_+ = v$ .

Cette équation a une solution

$$\phi_{kink} = v \tanh\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (10.9)$$

avec le paramètre  $\delta$  donné par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda v^2}} \quad (10.10)$$

Comme le champ  $\Phi$  quitte la variété de vide dans la région caractérisée par  $\delta$ , la densité de surface d'énergie  $\sigma$  dans un tel mur de domaine est de l'ordre (voir (10.6) pour  $\Phi = 0$ ) de  $\lambda v^4$  fois la largeur  $\delta$ , donc  $\sigma \approx \sqrt{\lambda v^3}$ .

Un mur qui diviserait notre univers actuel en deux, c'est à dire de surface proportionnelle à  $H_0^{-2}$ , contribuerait pour  $10^{13}$  à  $\Omega$  pour  $v = 1 \text{ Tev}$  ! C'est évidemment en contradiction flagrante avec



les observations qui limitent  $\Omega$  à environ 1, ce qui contraint le modèle pour par exemple la brisure de supersymétrie à ces échelles de masse. On ne peut pas trouver de modèles où les champs scalaires ont un potentiel correspondant à (10.6) avec  $N = 1$ .

Pour  $N = 2$ , la situation est un peu plus intéressante. Comme nous l'avons noté au chapitre 6.6, deux champs scalaires couplés de cette manière peuvent être décrit par un champ complexe. Comme l'électromagnétisme implique ce type de champ complexe (avec des différences, des transformations  $U(1)$  dépendant localement de l'espace temps), on peut escompter les voir apparaître quand les symétries de jauge sont brisées. C'est bien sûr le modèle que nous avons déjà rencontré au chapitre 10.2.1, qui nous l'avons vu, autorise des solutions avec des cordes. L'équation pour la variété du vide quand  $N = 2$  est

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \quad (10.11)$$

Qui représente un cercle dans l'espace des champs  $(\Phi_1, \Phi_2)$ . Quand on fait un tour autour de ce cercle, on tourne autour d'une boucle fermée dans l'espace réel, une corde est « encerclée ». La densité de masse d'une telle corde n'est pas catastrophiquement grande (particulièrement pour des cordes  $U(1)$  locales- cordes de jauge). La densité de masse  $\mu$  par unité de longueur de la corde est de l'ordre de  $\sqrt{\lambda v^2}$ , ce qui est suffisant pour amorcer les structures dans l'univers, mais suffisamment petit pour ne pas violer les limites de la densité d'énergie totale. Pour  $v \approx E_{GUT} \approx 10^{15} \text{ GeV}$ , ceci signifie une densité de masse de  $10^{16} \text{ kg/cm}$ .

Les cordes ont des propriétés gravitationnelles très intéressantes. L'équation d'Einstein pour une corde rectiligne infinie dans la direction  $z$  avec un tenseur énergie impulsion

$$T^{\mu\nu} = \mu\delta(x)\delta(y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

peut être résolue et donne la métrique ( en coordonnées cylindriques  $(\rho, \Phi, z)$ )

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - d\rho^2 - (1 - 4G\mu)^2 \rho^2 d\phi^2 \quad (10.13)$$

En faisant la substitution de variable  $\Phi \rightarrow (1-4G\mu)\Phi$ , ceci devient la métrique de Minkowski, mais avec un angle défini seulement de 0 jusqu'à  $2\pi(1-4G\mu)$ . Ceci est appelé un espace conique, et génère des effets variés intéressants comme des images doubles de quasars derrière une corde, des fluctuations dans le RFC, et la compression de matière quand une corde passe.

$N = 3$  correspond à des défauts de type monopole, qui sont plus ou moins exclus du fait de leur grande densité d'énergie.

$N=4$  et plus correspondent à une variété du vide qui a une structure non triviale, mais aucun défaut stable n'est formé (les nœuds qui peuvent apparaître peuvent se défaire du fait du nombre de dimensions supplémentaires du champ). Cependant, même ces textures instables peuvent avoir des effets cosmologiques intéressants, sur la formation des structures par exemple et seront recherchées dans les nouvelles expérimentations sur le RFC.

## 10.4 Résumé

L'univers a pu connaître une série de transitions de phase.

La description de Landau des transitions de phase utilise un paramètre d'ordre avec un Hamiltonien, similaire à celui du champ de Higgs. Les coefficients dépendent de la température, ce qui explique l'apparition des différentes phases.

Les cordes cosmiques et les textures sont des défauts associés à une variété du vide non triviale, associée à un ensemble de champs scalaires. Elles peuvent jouer un rôle dans la formation des structures de l'univers. Les murs de domaine et les monopoles, produiraient une densité d'énergie généralement trop élevée pour être compatible, avec l'univers tel que nous l'observons et sont donc exclues (sauf si elles ont été diluées et ramenée à une densité négligeable par l'inflation).

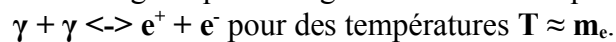
## Chapitre 11: Le rayonnement de fond cosmologique (RFC)

( CMBR Cosmic Microwave Background Radiation, ou CMB )

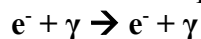
### 11.1 La première révolution : Le rayonnement à 2,7 K

La détection du RFC fût la confirmation la plus spectaculaire de l'hypothèse du Big Bang après la découverte de l'expansion de l'univers par Hubble. En 1965, deux radio astronomes des Bell Telephone Laboratories, Arno Penzias et Robert Wilson, découvrirent ( ce qui leur valut le prix Nobel en 1978) par hasard ce rayonnement. Ils n'avaient pas réussi à éliminer, un bruit parasite supplémentaire à 4080 MHz capté par leur antenne de **6 mètres**, à Homdel, New Jersey. Ce bruit de fond était isotrope et les auteurs estimèrent que la température de ce bruit correspondait à une température de **3,5 +/- 1 Kelvin**.

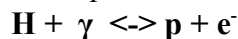
L'explication de la source de ce bruit fut publié, en tant qu'article associé, dans le même numéro de l'Astrophysical Journal par le groupe de Princetown constitué de R.H Dicke, P.J.E Peebles, P.G Roll et D.T Willkinson. Récapitulons l'origine du RFC. Dans un milieu dense, comme celui de l'univers primordial peu après le big bang, nous avons vu que le rayonnement électromagnétique était généré et tenu à l'équilibre par les réactions du type :



L'expansion a refroidi de façon adiabatique ce rayonnement. Sous le seuil d'énergie de production de paires, les photons furent maintenus à l'équilibre par des réactions du type diffusion Compton sur les électrons libres.



Les électrons, ensuite, furent liés aux protons via l'interaction électromagnétique. En fait quand la température tomba en dessous celle du seuil de photo ionisation pour l'hydrogène, la réaction



Ne fut plus en équilibre thermique et les photons se découplèrent de la matière et se déplacent depuis librement dans l'univers entier. Nous avons vu dans l'équation ( 8.36) que ceci s'est produit quelques centaines de milliers d'années après le Big Bang à une température de « gel » de **0,25 eV**. Ces photons voyagent depuis **13 Milliards d'années environ** sur des géodésiques, sans diffuser, à travers l'univers, (l'incertitude est lié à l'incertitude sur la constante de Hubble) et leur énergie est tombée juste sous **3 K**, du fait de l'expansion.

George Gamow et ses collaborateurs avaient prédit l'existence d'un rayonnement résiduel dans le domaine micro ondes en 1946. Bien que s'étant partiellement trompé dans leurs hypothèses, la valeur de leur prédiction était assez proche de la valeur mesurée **19 ans** plus tard. En fait Gamow cherchait à prouver que tous les noyaux, y compris les lourds avaient été produits au Big bang, ce rayonnement fossile en était un effet marginal.

Aujourd'hui, la température de ce rayonnement a été mesurée avec une étonnante précision :

**2,728 +/- 0,004 K ( 95% de confiance)**, par des radiomètres aéroportées [ WMAP a fait mieux depuis]. Les détecteurs au sol sont désavantagés par le rayonnement associé à la température ambiante ( **300K**) qu'il faut soustraire ; La figure 11.1 montre les résultats obtenus de 1985 à 1996. Le corps des données est fourni par le satellite COBE ( instrument FIRAS) lancé en 1989. Le RFC s'est découplé de la matière à un **z** d'environ **1100** quand le facteur d'échelle était 1100 fois plus petit qu'aujourd'hui, et donc l'énergie 1100 fois plus grande, que ce que nous observons aujourd'hui.

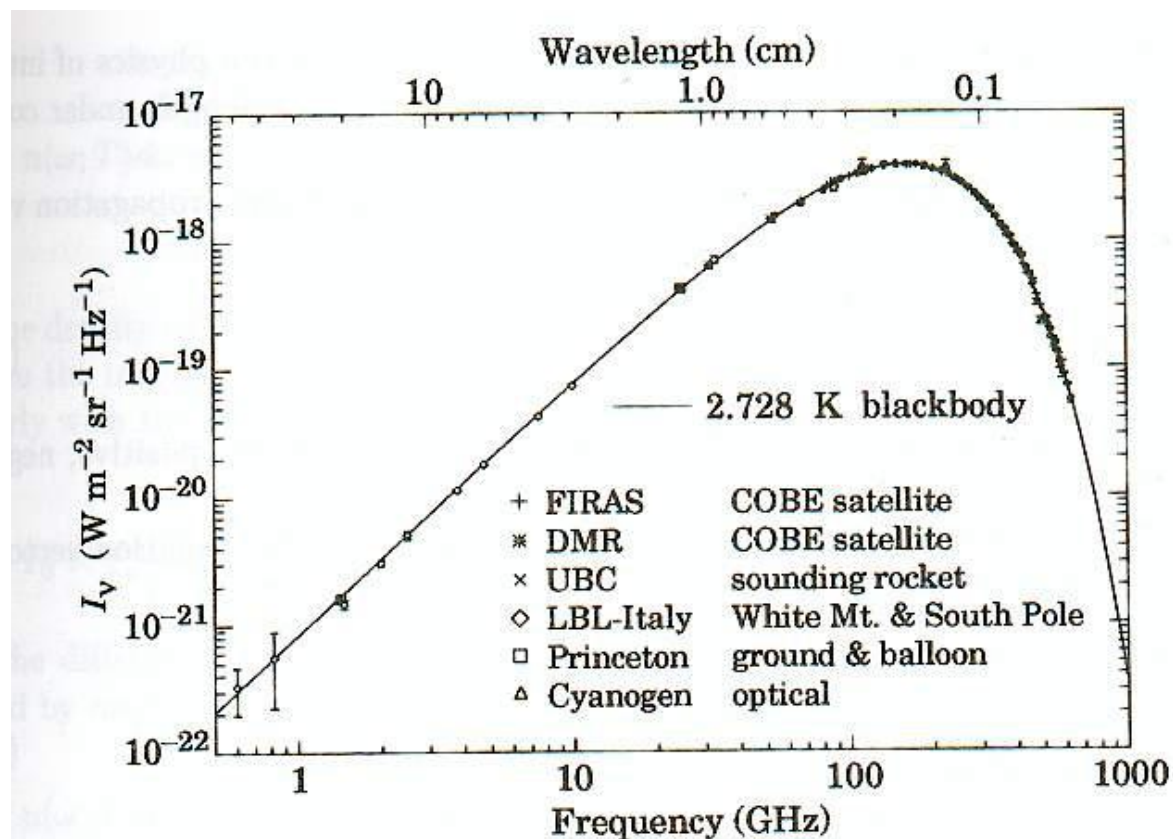
#### 11.1.1 Nature thermique du RFC

Dans le modèle du Big bang chaud, les photons dans l'univers primordial étaient continuellement créés, absorbés ou annihilés et réémis, l'univers était un corps noir quasi parfait.

Dans de telles conditions physiques, où un ensemble de photons est maintenu à l'équilibre thermique avec son environnement, à une température  $T$ , le nombre moyen de photons par mode d'oscillation est donné par la distribution de Planck

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{2\pi/T\lambda} - 1} = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} \quad (11.1)$$

où  $\omega = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu$  est la pulsation du mode d'oscillation de longueur d'onde  $\lambda = 1/\nu$  ( $c = 1$  comme d'habitude)



**Figure 11.1** : Mesure précise du spectre du RFC. La ligne continue correspond à un corps noir parfait à 2,73 K, qui correspond très bien aux mesures en particulier près du maximum d'intensité. Le spectre est moins contraint aux fréquences en dessous de 3 GHz ( 10 cm et +) Origine G. Smoot, astro-ph/9705101 (1997) mis à jour .

Nous avons donné l'expression bien connue du spectre de rayonnement du corps noir au chapitre 7.2, mais ici nous allons entrer un peu plus dans les détails pour introduire un mode de description de Fourier qui sera utile pour la discussion des fluctuations du RFC. Pour obtenir le spectre global, il faut multiplier l'équation 11.1 par le nombre de modes d'oscillation par unité de volume.

Pour obtenir ceci, d'abord, pour un temps cosmique  $t$ , il faut diviser l'espace entier en un réseau de cellules identiques de volume  $V = L^3$ , où la longueur de chaque côté,  $L$ , est telle que :

$$L \gg \lambda \quad (11.2)$$

où  $\lambda = 2\pi/k$  est la longueur d'onde la plus grande que nous considérons.

Ensuite nous imposons la condition aux limites que l'onde plane de chaque mode d'oscillation,  $\psi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ , doit être identique dans chaque cellule

$$\begin{aligned} \psi(x + L, y, z) &= \psi(x, y, z) \\ \psi(x, y + L, z) &= \psi(x, y, z) \\ \psi(x, y, z + L) &= \psi(x, y, z) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Remarquons que la contrainte de périodicité, n'a pas d'impact significatif, tant que la taille de la « cellule » considérée ( cf 11.2) est grande devant la longueur d'onde.

En imposant les conditions de périodicité ( 11.3), le vecteur de propagation se quantifie :

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{n}}{L} \quad (11.4)$$

où les composantes de  $\mathbf{n}$  (  $n_x, n_y, n_z$ ) sont une combinaison quelconque d'entiers positifs, négatifs ou nuls.

Alors le nombre d'états possibles ( ondes planes) de vecteur de propagation compris entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$  est :

$$\begin{aligned} \Delta N_k &= \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z \\ &= \left( \frac{L}{2\pi} dk_x \right) \left( \frac{L}{2\pi} dk_y \right) \left( \frac{L}{2\pi} dk_z \right) \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{k} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \end{aligned} \quad (11.5)$$

où dans la dernière étape nous avons tenu compte du fait que le rayonnement est émis dans toutes les directions et que l'angle solide d'intégration est donc de  $4\pi$ .

Nous en déduisons qu'il y a  $(2\pi)^{-3} \cdot 4\pi k^2 dk$  états de photons d'énergie  $E = \hbar\omega$  par unité de volume. Comme le nombre de photons d'énergie  $E$  est donné par l'équation (11.1), nous pouvons maintenant calculer le nombre moyen de photons par unité de volume de pulsation comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , dans un gaz de photons à la température  $T$ . Si on tient compte des deux polarisations possibles pour chaque photon de pulsation  $\omega$  ( c'est dire que  $g_\gamma = 2$ ), des équations (11.1) et (11.5), nous pouvons déduire ( en réinsérant les facteurs  $c, \hbar, k_B$ , temporairement pour être plus explicite) :

$$n(\omega; T)d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (11.6)$$

Nous avons démontré ce résultat que nous aurions pu dériver directement des équations (7.15) et (7.16).

Que devient la température des photons quand l'univers s'étend ?

Pour prédire ce qu'on peut observer aujourd'hui, des milliards d'années après le découplage du rayonnement, nous devons nous livrer à un petit exercice. De l'équation (4.55) il s'ensuit qu'un rayonnement de pulsation initiale  $\omega_0$ , est plus tard est décalée vers le rouge de :

$$\omega_0 = \frac{\omega}{1+z} \quad (11.7)$$

Après le découplage, l'univers est devenu transparent au rayonnement. Comme le rayonnement ne subit aucune interaction le nombre de photons doit être conservé.

Pour obtenir la densité de photons par unité de fréquence qu'on peut observer aujourd'hui, nous devons introduire la transformation de variable de l'équation (11.7) dans l'équation (11.6)

$$n(\omega; T)d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{[\omega_0(1+z)]^2 d\omega_0 \cdot (1+z)}{e^{\frac{\omega_0}{(1+z)T}} - 1} = n(\omega_0; T_0) \cdot (1+z)^3 \quad (11.8)$$

On voit que le spectre de corps noir est conservé par cette transformation, l'échelle étant proportionnelle à l'inverse du volume de l'univers. La température du corps noir décroît linéairement avec l'échelle radiale,  $(1+z)$

$$T_0 = T_e \frac{1}{1+z} \quad (11.9)$$

L'énergie différentielle du spectre de corps noir,  $u(\omega)d\omega$ , est obtenue en multipliant par l'énergie du photon,  $\hbar\omega$ , dans l'équation (11.6)

$$u(\omega; T)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (11.10)$$

### Exemple 11.1

Estimer la fraction de l'énergie totale de l'univers,  $\Omega$ , correspondante aux photons du RFC, en intégrant l'équation (11.10)

**Réponse :**

L'énergie totale sous forme de rayonnement de corps noir,  $\rho_\gamma$ , pour l'ensemble des fréquences est donnée par :

$$\rho_\gamma = \int_0^\infty u(\omega; T)d\omega \quad (11.11)$$

Pour simplifier le calcul, introduisons un paramètre sans dimension  $\xi$  :

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{kT} \quad (11.12)$$

Equation (11.11) peut alors être réécrite

$$\rho_\gamma = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} \quad (11.13)$$

où l'intégrale définie est juste une valeur numérique

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (11.14)$$

Alors nous arrivons à la relation de Stefan Boltzmann bien connue

$$\begin{aligned} \rho_\gamma &= \sigma T^4, \\ \sigma &= 4.72 \cdot 10^{-3} \text{eVcm}^{-3}\text{K}^{-4} \end{aligned}$$

Nous avons vu au chapitre 4.3 que la densité critique, limite entre un univers ouvert et un univers fermé est :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ gcm}^{-3} = 1.1 \cdot 10^4 h^2 \text{ eVcm}^{-3} \quad (11.15)$$

donc, la contribution du rayonnement fossile(  $T = 2.73\text{K}$ ) à la densité totale d'énergie de l'univers est :

$$\Omega_\gamma h^2 \approx 4 \cdot 10^{-5}$$

Cette faible valeur montre que l'univers est aujourd'hui dominé par l'énergie de la matière

## 11.2 La deuxième révolution : L'anisotropie

Le haut niveau d'isotropie du RFC constaté est en accord avec le scénario du Big bang, mais il pose le problème de l'anisotropie de l'univers aujourd'hui. Ce que nous voyons autour de nous est très inhomogène. La température et la densité des galaxies diffère très nettement de celles de l'espace autour d'elles (nous avons déjà vu quelques subtilités supplémentaires, liées à ce qui est appelé le problème de l'horizon : cf chapitre sur l'inflation).

### 11.2.1 Fluctuations de température et perturbations de densité.

Dans le modèle du Big bang les structures telles que nous les observons aujourd'hui résultent d'une formation par instabilité gravitationnelle. De petites perturbations de densité dans la matière globalement homogène de l'univers primordial, du fait de l'action de la gravitation, vont croître et peuvent produire les galaxies et étoiles telles que nous les connaissons aujourd'hui.

L'observation de tels germes de fluctuations de densité par COBE et WMAP a projeté la cosmologie dans une nouvelle ère. Des anisotropies de  $10^{-5}$  de la température du RFC ont été détectées par COBE dès 1992 et affinées par la suite. De telles variations, présentes dans des parties du ciel, interviennent quand les photons proches d'une région surdense se voient décalés vers le rouge, lors de la dernière diffusion, car ils ont à vaincre un puit de potentiel pour s'échapper ;

A large échelle, comme l'a observé l'instrument DMR à bord de COBE avec une résolution de  $10^\circ$  environ [ puis WMAP avec une résolution bien meilleure] , l'anisotropie de température est, comme indiqué ci dessus, une conséquence de l'anisotropie de densité : L'effet Sachs Wolfe. Nous déduirons bientôt cette relation entre les fluctuations de température observées dans le ciel et le potentiel gravitationnel sous jacent.

La conservation de l'énergie implique que les photons se déplaçant dans un potentiel gravitationnel  $\Phi$  variable perdent de l'énergie selon ( remarquons que nous avons défini  $\Phi$  avec un signe moins, par rapport à avant)

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_e - \Phi_e \quad (11.16)$$

Où l'indice 0 définit les fluctuations de température observées, et les termes avec l'indice e décrivent la fluctuation physique de température et le champ gravitationnel au point d'émission. Le premier terme du membre de droite correspond à la fluctuation intrinsèque de température dans l'univers primordial, et le second le puit de potentiel dans lequel les photons sont plongés. Si les fluctuations sont adiabatiques, on escompte un nombre de photons plus grand que la moyenne dans le puits de potentiel, c'est à dire une température plus élevée. Par conséquent, les deux termes de droite de l'équation (11.16) vont partiellement se compenser. En particulier,



comme la surdensité dans le puit de potentiel correspond à un point chaud, on escompte que la température intrinsèque soit proportionnelle au potentiel gravitationnel :

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_e \propto \Phi_e \quad (11.17)$$

Nous avons trouvé en (11.9) que la température est inversement proportionnelle au facteur d'échelle,  $aT = \text{Constante}$  : c'est à dire,  $\Delta(aT) = 0$ . Ceci implique

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta a}{a} \quad (11.18)$$

Pour une équation d'état,  $p = \alpha\rho$ , il découle des équations d'Einstein de l'expansion pour un univers plat, que la dépendance du facteur d'échelle, en fonction du temps est ( voir équation (4.28))

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}} \quad (11.19)$$

ce qui signifie

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3(1+\alpha)} \frac{\delta t}{t} \quad (11.20)$$

Rappelons que le temps est ralenti dans un champ de gravitation fort selon (3.39)

$$ds = \sqrt{1 - 2\Phi} dt \simeq (1 - \Phi) dt \quad (11.21)$$

de sorte que

$$\frac{\delta t}{t} \simeq -\Phi \quad (11.22)$$

nous trouvons en insérant (11.20) dans (11.18) et (11.17)

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_e = -\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3(1+\alpha)} \frac{\delta t}{t} = \frac{2}{3(1+\alpha)} \Phi_e \quad (11.23)$$

En combinant avec équation (1.16), nous obtenons le résultat final du calcul

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = -\frac{1 + 3\alpha}{3 + 3\alpha} \Phi_e \quad (11.24)$$

Pour un univers dominé par la matière,  $\alpha = 0$ , alors la mesure de la fluctuation de température correspond à l'amplitude du puit de potentiel multiplié par un facteur  $1/3$  :

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = -\frac{1}{3} \Phi_e \quad (11.25)$$

Remarquons que nous avons deux effets en compétition : le décalage vers le rouge d'origine gravitationnel qui abaisse la température des régions denses, et le réchauffement causé par la compression de la matière dans les régions denses. Ils se compensent en partie, mais l'effet résultant fait apparaître un refroidissement dans les régions plus denses.

L'instrument DMR a mesuré des fluctuations de température  $\Delta T/T$  de l'ordre de  $10^{-5}$ .



Ceci peut être interprété comme des variations, dans l'espace, du potentiel gravitationnel au moment de l'émission du RFC. Nous avons vu que cela s'est produit à environ  $z = 1100$ , ce qui correspond à environ **300 000 ans** après le Big Bang.

Pour résumer, disons que l'étude des fluctuations du RFC nous permet de déterminer la carte du potentiel gravitationnel au moment du découplage ( la surface de dernière diffusion). La faible résolution angulaire de COBE [corrigée par WMAP] représente vraiment les fluctuations primordiales du potentiel gravitationnel, car l'horizon causal au moment du découplage, nous apparaît aujourd'hui sous un angle de  $1^\circ$  environ.

### 11.3 La nouvelle génération d'observations

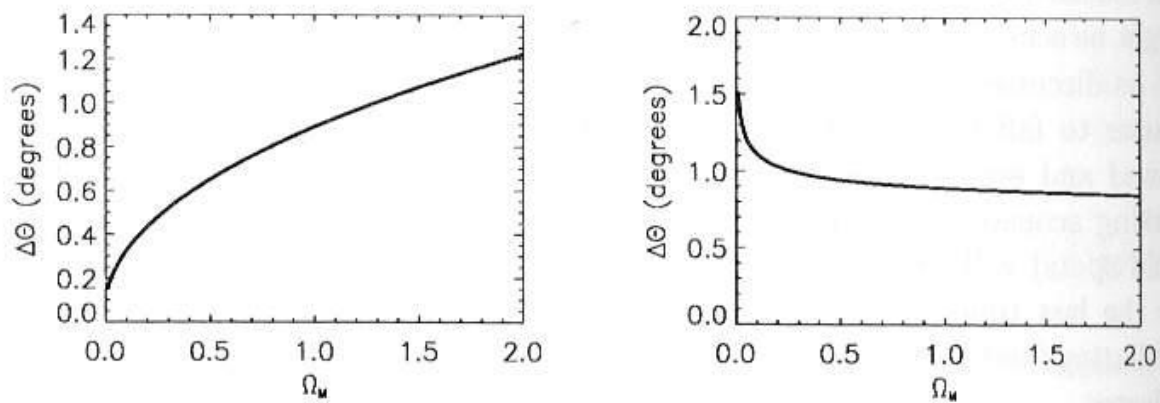
Les mesures de COBE, du spectre à **2.73 K** ont été un grand événement pour la science, mais le meilleur reste à venir. Si les fluctuations à large échelle, à  $10^\circ$  d'écart, sont intéressantes pour comprendre la formation des structures, elles ne reflètent pas les paramètres du modèle standard de la cosmologie : La densité d'énergie due au paramètre de courbure  $\alpha = k/a^2$ , la contribution de la matière (incluant la matière noire),  $\Omega_M$ , la contribution à la densité d'énergie liée à une constante cosmologique non nulle  $\Omega_\Lambda$  et le paramètre de Hubble  $H_0$ . Avec une résolution angulaire suffisante pour résoudre un domaine causalement connecté, la mesure du spectre de puissance des fluctuations de température va nous fournir des informations qui dépendent fortement des paramètres du modèle standard. Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, les fluctuations de densité piègent les photons dans des puits de potentiel. A l'intérieur de l'horizon causal, la chute va être freinée et éventuellement rejeté par la pression de rayonnement. Dans ces conditions, le fluide baryon-photon va donner lieu à des ondes acoustiques. Les régions de compression ( points chauds) et les régions de déplétion ( points froids) vont ainsi occuper des volumes en connexion causale. Quand les photons diffusent pour la dernière fois au redshift de recombinaison à  $z = 1100$  environ, un « instantané » du fluide en oscillation peut être déduit de la mesure du RFC avec une résolution meilleure que  $1^\circ$  [ c'est ce qu'a fait WMAP]

Quel est le rapport avec les paramètres cosmologiques Les oscillations du fluides sont confinés au rayon de Hubble  $H_{rec}^{-1}$  au redshift de la recombinaison. Donc pour estimer la principale caractéristique de l'anisotropie du spectre à petite échelle, nous devons calculer l'angle sous tendu aujourd'hui par  $H(z = z_{rec})^{-1}$

$$\Delta\theta(z_{rec}) = \frac{1}{D_A \cdot H} \quad (11.26)$$

avec  $D_A$ , distance de taille angulaire dans un univers de Friedmann Lemaître Robertson Walker défini par les équations (4.81) et (4.86). La position du premier pic acoustique de l'anisotropie du RFC, est escompté se trouver à l'échelle angulaire  $\Delta\theta$ , ce qui est très dépendant de  $\Omega_M$  et  $\Omega_\Lambda$ , comme montré sur la figure 11.2.

L'amplitude du pic ( qui caractérise l'ampleur de l'anisotropie) augmente avec la proportion de baryon  $\Omega_b$  et dépend aussi fortement de  $\Omega_\Lambda$ . Les fluctuations du RFC à des angles plus petits résultent de modes d'oscillation plus élevés du fluide baryo-photonique. Leur amplitude relative et leur position angulaire nous fournit des informations complémentaires sur les fractions de contribution à la densité d'énergie de l'univers. En particulier, les pics d'ordre plus élevés nous renseignent sur la nature de la matière noire. Dans le prochain chapitre, nous analyseront plus en détails ces points.



**Figure 11.2 :** Tailles angulaire de régions causalement connectées ( $r_H = H^{-1}$ ) à  $z_{\text{rec}} = 1100$  en fonction de  $\Omega_M$ . Dans la figure de gauche  $\Omega_\lambda = 0$  et dans la figure de droite on a représenté un univers plat  $\Omega_\lambda = 1 - \Omega_M$ .

## 11.4 Résumé

L'observation des paramètres du RFC est en remarquable conformité avec la théorie du Big Bang

La température mesurée du rayonnement fossile aujourd'hui à  $T_0 = T_e / (1+z)$  est de **2,728 ± 0,004K (95% IC)**

L'observation d'anisotropies d'environ  $10^{-5}$  à l'échelle de plusieurs degrés confirme l'existence de petites perturbations de densité de l'univers primordial ( $z > 1000$ ). Elles sont les germes nécessaires pour amorcer la formation des structures telles qu'on les connaît dans l'univers aujourd'hui : par exemple les étoiles et les galaxies.

Les mesures futures du RFC [c'est fait aujourd'hui] devraient nous apporter de nombreuses informations complémentaires sur les paramètres cosmologiques [c'est effectivement le cas]

## Chapitre 12: Croissance des structures dans l'univers

### 12.1 Introduction

L'analyse de la formation et croissance des structures dans l'univers primordial, est une des branches les plus actives de la cosmologie moderne. Le fait que l'on parte de très faibles perturbations initiales (celles mesurées dans le RFC) va permettre un traitement mathématique de type perturbatif, à partir d'une solution d'ordre zéro ( homogène) des équations du fluide cosmique, en utilisant les équations hydrodynamiques .

Dans le modèle FLRW, pour des échelles petites devant  $H^{-1}$ , nous pouvons, au premier ordre, utiliser la dynamique newtonienne, en y incluant toutefois le facteur d'échelle  $a(t)$ . Les équations concernées sont :

L'équation de continuité du fluide

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (12.1)$$

L'équation d'Euler de l'hydrodynamique

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left( \Phi + \frac{p}{\rho} \right) \quad (12.2)$$

L'équation de Poisson de la gravitation newtonienne

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (12.3)$$

Ces équation ont la solution suivante à l'ordre zéro (fluide homogène)

$$\begin{aligned} \rho_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{\rho_0}{a^3(t)} \\ \mathbf{v}_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \mathbf{r} \\ \Phi_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{2\pi G \rho_0 r^2}{3} \end{aligned} \quad (12.4)$$

La première décrit simplement la dilution du fluide par l'expansion de l'univers, la seconde montre le « flux de Hubble » conformément à la loi  $v_0(t, \mathbf{r}) = H(t)\mathbf{r}$ , valable pour tous les observateurs comobiles.

La troisième résulte de la résolution de ( 12.3) pour  $\rho$  constant.

Comme nous avons des équations spatiales homogènes pour l'ordre zéro, nous savons que nous pouvons essayer des solutions de type ondes planes pour traiter les perturbations, ce qui nous conduit à passer en transformée de Fourier. Il est pratique de traiter l'expansion en utilisant les coordonnées d'espace comobiles  $\mathbf{x} = \mathbf{r} / a(t)$ . Alors, par exemple,  $\rho_0(t, \mathbf{r}) \rightarrow \rho_0(t, \mathbf{x}) = \rho_0(t)$  : En coordonnées comobiles la densité du fond est indépendante du facteur d'échelle.

Ecrivons les équations régissant perturbation au premier ordre

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= \rho_0(t) + \rho_1(t, \mathbf{x}) \equiv \rho_0(t) [1 + \delta(t, \mathbf{x})] \\ \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{v}_0(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}_1(t, \mathbf{x}) \\ \Phi(t, \mathbf{x}) &= \Phi_0(t, \mathbf{x}) + \Phi_1(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (12.5)$$

où  $|\delta|$ ,  $|v_1|$  et  $|\Phi_1| \ll 1$ . Si on effectue la transformée de Fourier de toutes les expressions, par exemple

$$\delta(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(t, \mathbf{k}) d^3 k \quad (12.6)$$

En utilisant la formule inverse

$$\delta(t, \mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta(t, \mathbf{x}) d^3 x \quad (12.7)$$

On trouve après quelques calculs

$$\ddot{\delta}(t, \mathbf{k}) + 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\delta}(t, \mathbf{k}) + \left(\frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0\right) \delta(t, \mathbf{k}) = 0 \quad (12.8)$$

où  $v_s$  est la vitesse du son,

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{adiabatic}} \quad (12.9)$$

Que la vitesse du son intervienne est naturel, puisqu'il relate comment la perturbation se propage dans le fluide. Pour un fluide relativiste avec une équation d'état  $p = \rho/3$ , nous voyons que

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (12.10)$$

(Ce qui est de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière), tandis que pour un gaz d'hydrogène neutre

$$v_s = \sqrt{\frac{5T}{3m_p}} \quad (12.11)$$

Ce qui est beaucoup plus petit.

La chute brutale de la vitesse du son, au moment du découplage matière lumière, a de nombreuses conséquences intéressantes.

## 12.2 La masse de Jeans

De (12.8) nous voyons que le signe de l'expression

$$\kappa_J \equiv \left(\frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0\right) \quad (12.12)$$

va déterminer, si les solutions sont croissantes ou décroissantes. Comme d'habitude en transformée de Fourier, à un vecteur d'onde de Fourier  $\mathbf{k}$  correspond une longueur d'onde comobile  $\lambda_{\text{com}} = 2\pi / |\mathbf{k}|$  : la longueur d'onde physique

$$\lambda_{\text{phys}} = \frac{2\pi a(t)}{|\mathbf{k}|} \quad (12.13)$$

On voit dans (12.8) que seules les structures d'échelle supérieures à la longueur de Jeans  $\lambda_J$  peuvent croître ( pour des valeurs inférieures de  $\lambda_{\text{phys}}$  les solutions sont des oscillations amorties), où

$$\lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \quad (12.14)$$

La masse contenue dans une sphère de rayon  $\lambda_J / 2$  est appelée la masse de Jeans et est donnée par :

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{\lambda_J}{2} \right)^3 \rho_0 = \frac{\pi^2 \sqrt{\pi} v_s^3}{G^{3/2} \sqrt{\rho_0}} \quad (12.15)$$

### 12.3 Croissance des structures en régime linéaire

Pour  $k$  petit (longueurs bien supérieures à la longueur de Jeans), le terme proportionnel à  $k^2$  dans (12.8) peut être négligé. Pour un univers FLRW plat dominé par la matière,  $\mathbf{a}(t) \propto t^{2/3}$ ,  $\mathbf{a}'/\mathbf{a} = 2/(3t)$  et  $\rho_0 = 1/(6\pi G t^2)$ , alors

$$\ddot{\delta}(t, \mathbf{k} \sim 0) + \frac{4}{3t} \dot{\delta}(t, \mathbf{k} \sim 0) - \frac{2}{3t^2} \delta(t, \mathbf{k} \sim 0) = 0 \quad (12.16)$$

ce qui donne la solution

$$\delta(t, \mathbf{k} \sim 0) = c_+ t^{2/3} + c_- t^{-1} \quad (12.17)$$

On voit qu'un mode est une fonction croissante du temps en  $t^{2/3}$ , et l'autre décroissante en  $1/t$ . Bien sûr c'est le mode croissant qui est intéressant dans la formation des structures, il permet à une petite perturbation de s'amplifier sous l'action de la gravitation. Comme le mode croissant suit la même loi que le facteur d'échelle  $\mathbf{a}(t)$ , le contraste de densité croît linéairement en fonction du facteur d'échelle. Une région initialement plus dense que la moyenne, dans un univers FLRW avec  $\Omega = 1$ , va se comporter comme un mini univers avec  $\Omega > 1$ , c'est à dire s'étendre jusqu'à une taille maximum puis se re-contracter. Cette région effondrée va s'identifier à un halo de galaxies ou un amas de galaxies. La dynamique détaillée, après que le contraste de densité soit devenu supérieur à un (régime non linéaire) est plutôt complexe, car il doit probablement impliquer une interaction de la matière noire et de la matière baryonique. La seule solution pour étudier ces cas est de faire appel à des simulations, de systèmes à  $N$  corps, sur de gros systèmes informatiques.

On suppose généralement que le champ de densité  $\delta(\mathbf{x})$  à un moment donné est aléatoire de type gaussien. En fait c'est ce qui est prédit par les modèles d'inflation, quand les fluctuations quantiques du champ de l'inflaton sont sur-amplifiées par le facteur exponentiel inflationniste pour devenir éventuellement les germes des structures cosmiques. Définissons la variance des fluctuations par

$$\sigma^2 = \langle \delta(\mathbf{x})^2 \rangle \quad (12.18)$$

La fonction d'auto corrélation  $\xi(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) = \xi(x)$  est définie par

$$\xi(x) = \frac{1}{\sigma^2} \langle \delta(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1) \rangle \quad (12.19)$$

Dans l'approximation de phase aléatoire, tous les modes de Fourier  $\delta(\mathbf{k})$  sont non corrélés, ce qui signifie que :

$$\langle \delta^*(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(\mathbf{k}) \quad (12.20)$$

La fonction  $P(\mathbf{k})$  est le spectre de puissance des fluctuations. Dans la plupart des modèles  $P(\mathbf{k}) = k^n$ , avec un indice spectral variant entre 0,7 et 1.3. La valeur  $n = 1$  correspond à ce qu'on appelle un spectre des fluctuations invariant d'échelle, car on peut montrer que pour un tel spectre les

fluctuations  $\delta$  ont la même valeur à toutes les échelles de longueur. L'inflation prédit que les perturbations doivent être presque invariantes d'échelle.

Les fluctuations mesurées via le spectre de puissance  $\mathbf{P}(\mathbf{k})$  dans le RFC sont généralement décrites en termes de partie «primordiale»  $\mathbf{P}_i(\mathbf{k})$ , qui représente les fluctuations générées (peut être par l'inflation) au tout début de l'univers. Pour retrouver ce qu'on observe aujourd'hui, nous devons connaître comment les fluctuations du champ photonique ont été influencées par les autres effets au voisinage du temps de découplage et de la domination par la matière. Cela dépend de la nature de la matière noire, mais peut être exprimé en termes de fonction de transfert  $\mathbf{T}(\mathbf{k})$  par

$$P(k) = T^2(k)P_i(k) \quad (12.21)$$

Si l'univers était toujours dominé par le rayonnement,  $\mathbf{T}(\mathbf{k}) = \mathbf{1}$  pour tout  $\mathbf{k}$ , et le spectre des fluctuations, aujourd'hui, est le spectre primordial. Avant la recombinaison la vitesse du son était de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière, et la masse de Jeans très grande (voir équation 12.15). En fait la longueur de Jeans était supérieure à la taille de l'horizon, donc les perturbations sous l'horizon croissaient très lentement (au mieux logarithmiquement). Au moment de l'égalité de densité énergétique matière / rayonnement ( $z \approx 1000$ ), les perturbations de la matière noire ont pu commencer à croître, mais les photons et les baryons étaient toujours fortement couplés jusqu'au découplage des photons. A ce moment la vitesse du son chuta fortement (de  $10^8 \text{ m/s}$  à  $10^4 \text{ m/s}$ ) si bien que la longueur de Jeans devint subitement inférieure à la taille de nos galaxies actuelles. Alors les perturbations de la matière ont pu commencer leur croissance à toutes les échelles.

Comme l'univers s'étendait, l'horizon continuait à s'accroître. Ceci signifie, que les perturbations, à l'échelle co-mobile, tôt ou tard devinrent inférieure à celle de l'horizon (on dit qu'elles entrent dans l'horizon). La matière noire froide entrée dans l'horizon, après l'égalité entre matière et rayonnement ne devrait pas avoir été beaucoup modifiée par rapport au spectre de puissance primordial, donc  $\mathbf{T}(\mathbf{k}) \approx \mathbf{1}$  pour ces modes. L'échelle de longueur co-mobile correspondant à l'horizon au moment de l'égalité vaut environ

$$\lambda_{eq} \approx \frac{13}{\Omega_0 h^2} \text{ Mpc} \quad (12.22)$$

Pour des échelles plus petites que cela, on peut montrer qu'il y a une atténuation de  $\mathbf{T}(\mathbf{k}) \approx \mathbf{k}^{-2}$ . Pour la matière noire «chaude», l'atténuation aux petites échelles est bien supérieure, du fait de la vitesse relativiste des particules qui contrarie la condensation des petites fluctuations.

## 12.4 Quel lien avec les fluctuations de température du RFC ?

Le champ de contraste de densité  $\delta$  est défini dans tout l'espace et le temps. Cependant quand nous observons les fluctuations de température du RFC, nous en voyons une projection sur la sphère céleste, et à un instant précis, celui de la dernière diffusion des photons. Dans cette situation, au lieu d'utiliser la transformée de Fourier à trois dimensions, il est plus pertinent d'utiliser sa version sphérique à deux dimensions. Comme tout un chacun sait, toute fonction  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \Phi)$  (ou de façon équivalente  $\mathbf{f}(\mathbf{n})$  avec  $\mathbf{n}$ , vecteur unitaire) sur la sphère unitaire peut être décomposée en harmoniques sphériques  $\mathbf{Y}_{lm}(\boldsymbol{\theta}, \Phi)$  :

$$f(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (12.23)$$

En particulier les fluctuations de température  $\Delta T/T(\mathbf{n})$  peuvent être décomposées et la fonction de corrélation angulaire

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}') \right\rangle \quad (12.24)$$

où  $\cos\theta$  est le produit scalaire de  $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'$ . Du fait de l'approximation de phase aléatoire,  $C(\theta)$  va être la forme :

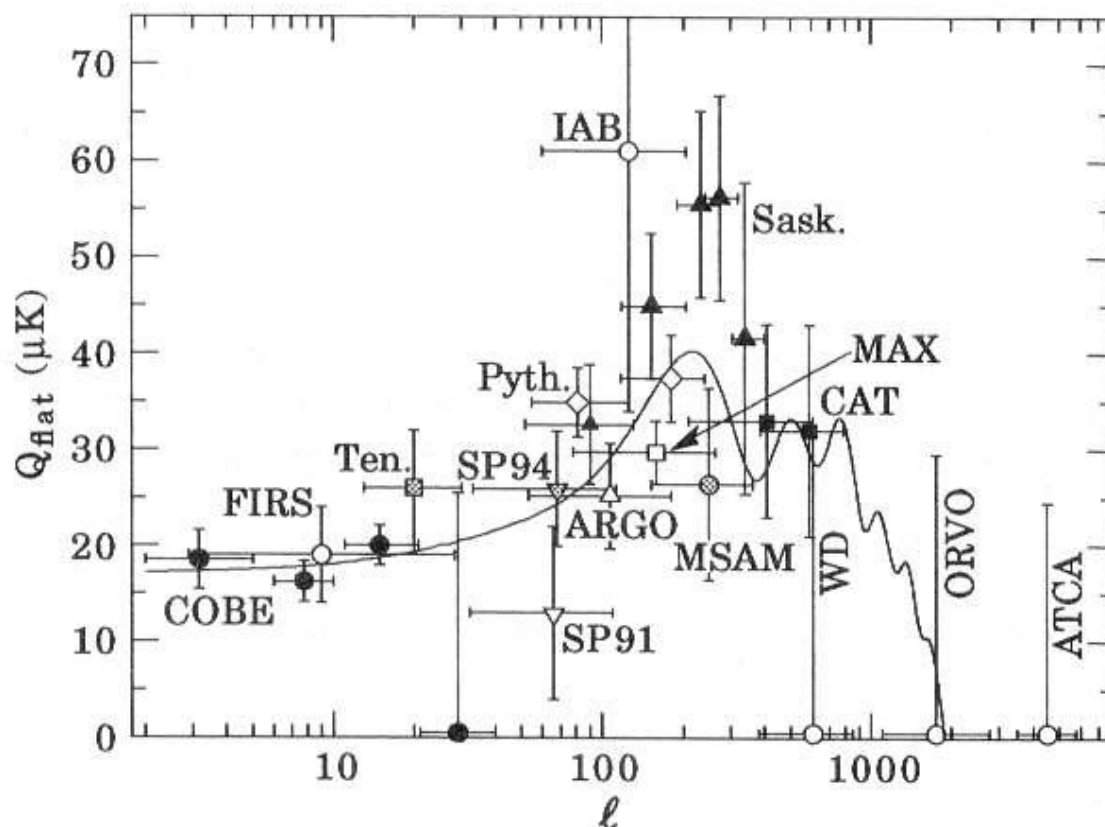
$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta) \quad (12.25)$$

avec  $P_l(\cos\theta)$  un polynôme de Legendre.

Le jeu de coefficients  $C_l$  pour tous les  $l$  caractérise le spectre de fluctuation complètement. La seule façon de calculer ces coefficients pour toutes les échelles est d'intégrer les équations de transport numériquement. Le résultat va dépendre du spectre initial (primordial) de la fluctuation, de la nature de la matière noire, de la proportion de matière baryonique, de la constante de Hubble et de quelques autres paramètres. Cela signifie que si on arrive à mesurer disons quelques centaines de ces  $C_l$  's, nous aurons suffisamment d'information (de redondance) pour déterminer les paramètres cosmologiques avec une grande précision.

Ce a été fait par WMAP, et des expériences embarquées en Ballon, et cela a tenu ses promesses. Le futur satellite Planck sera équipé d'un miroir de 1,3 m procurant une résolution angulaire de 10 minutes d'arc dans une gamme de fréquence de 30 à 850 GHz, ce qui devrait permettre d'obtenir une précision de 1%.

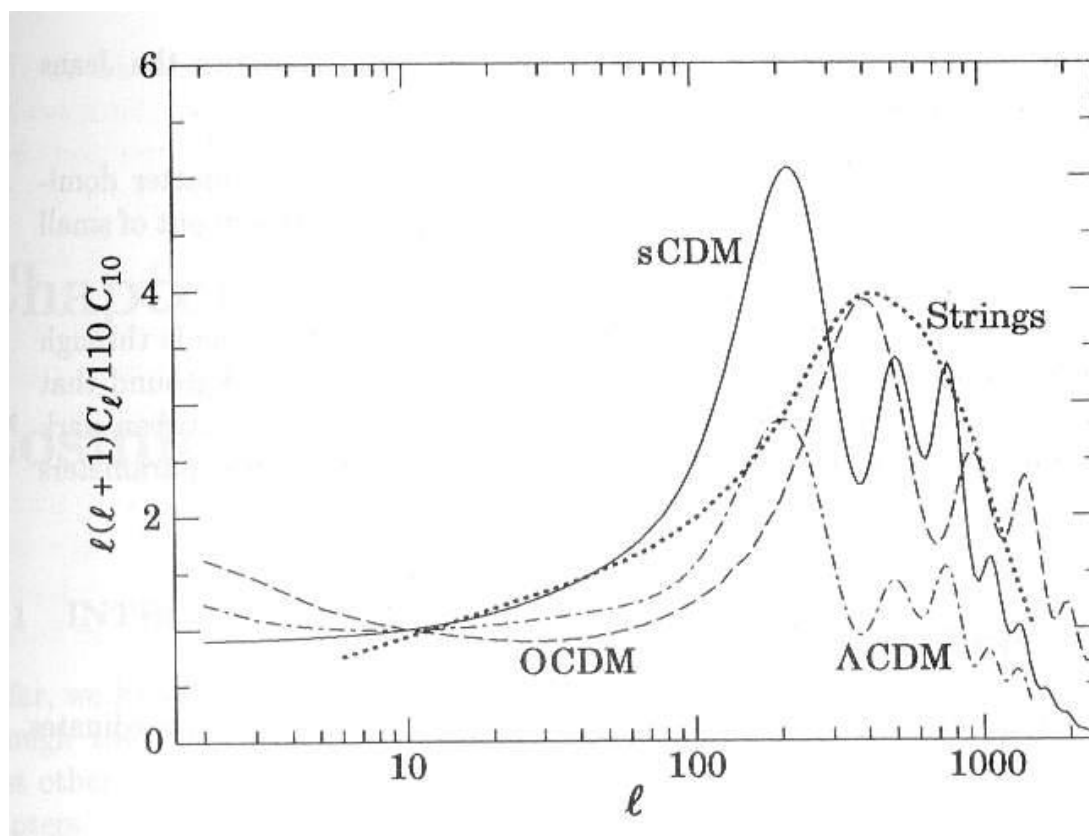
La forme du spectre des  $C_l$  's doit avoir certaines caractéristiques, un plateau pour les  $l$  petits et ensuite une série de pics (pics Doppler) pour des  $l$  plus élevés (c'est à dire des échelles angulaires plus petites). Ces pics caractérisent les oscillations du fluide cosmique due à l'action contraire de la gravitation et de la pression photonique. Une compilation des résultats disponibles, en 2000, est donnée en Figure 12.1. Des exemples des spectres prédits en fonction de divers modèles sont donnés en Figure 12.2



**Figure 12.1** : Observations des anisotropies du RFC en 2000. On a tracé les amplitudes quadripolaires pour un spectre d'anisotropies plat (spectre invariant d'échelle des perturbations primordiales, non traité, serait une ligne horizontale). Les barres d'erreurs verticales sont à 68% d'intervalle de confiance, et la limite haute à 95%. Les barres horizontales indiquent la fourchette de valeurs de  $l$  échantillonnées. La courbe indique le spectre escompté pour un modèle standard **CDM** ( $\Omega_0 = 1$ ,  $\Omega_B = 0,05$ ,  $h = 0,5$ ). Une comparaison plus réaliste avec les modèles impliquerait une convolution de cette courbe avec chaque fonction de filtrage expérimentale. G.Smoot, astro-ph/9705135 (1997)

[ Les résultats de WMAP, ont donné cette courbe avec beaucoup plus de précision ]





**Figure 12.2** : Exemples de prédictions théoriques  $l(l+1)C_l$  (normalisée à  $C_l=10$ ) ou spectre de puissance des anisotropies. **sCDM** est le modèle standard avec matière noire froide et  $h=0,5$  et  $\Omega_B = 0,05$ .  **$\Lambda$ CDM** est un modèle ouvert avec  $\Omega_0 = 0,3$  et  $h = 0,75$ . «Strings» est un modèle où les cordes cosmiques sont la cause principale de formation des structures à grande échelle. Ces diagrammes montrent comment des mesures précises du spectre de puissance de l'anisotropie du RFC pour  $l > 100$ , ce qui sera possible par les satellites WMAP [ c'est fait] et Planck permettra de distinguer parmi ces modèles lequel doit être privilégié. G.Smoot, astro-ph/9705135 (1997)

## 12.5 Résumé

En raison de la faible amplitude des anisotropies du RFC, une méthode d'analyse linéaire de la croissance primordiale de ces perturbations peut être utilisée. Les perturbations croissent en  $a(t)$

La taille des perturbations qui peuvent se développer sous l'action de la gravité est donnée par la longueur de Jeans.

$$\lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}$$

qui dépend elle même de la vitesse du son  $v_s$ , où

$$v_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{adiabatic}}$$

après le découplage, la vitesse du son, et donc la longueur de Jeans baisse brutalement.

La matière noire froide donne une loi de puissance à toutes les échelles dès que l'univers est dominé par la matière, tandis que la matière chaude (comme les neutrinos) ne permet que la formation des très grandes structures du fait des vitesses relativistes des particules.

La meilleure façon d'observer les fluctuations primordiales de densité c'est d'observer les variations de température induites. Les expériences actuelles embarquées sur satellite, du fait de leur précision de mesure à quelques %, sont capable de discriminer parmi les scénario possibles ceux qui sont plausibles.

## Chapitre 13: Rayons Cosmiques

### 13.1 Introduction

Jusqu'à présent notre source d'information sur l'univers a été principalement constituée par le rayonnement électromagnétique, sous toutes ses formes. Il existe d'autres messagers de l'information, dont nous allons étudier quelques spécimens ci après.

L'existence de particules ionisantes, tombant dans l'atmosphère, a été observée, la première fois, par Victor Hess ( prix Nobel en 1936 , partagé avec Carl D.Anderson , qui découvrit le positron dans les rayons cosmiques) dès **1912** dans des expériences embarquées sur ballon. Plus tard on a découvert que les « rayons cosmiques » au sommet de l'atmosphère étaient principalement des noyaux d'atomes (incluant les noyaux d'hydrogène, les protons). Seulement **2%** des de ces particules sont des électrons (et positrons). A des énergies de supérieures à quelques TeV, pour lesquelles les rayons cosmiques ne sont pas déviés par les champs magnétiques du système solaire, leur provenance est quasi isotrope) mais voir la discussion ultérieure sur les rayons cosmiques de très haute énergie)

---

**Exemple 13.1.1** : Montrer que les protons au dessus de **5 TeV** sont pratiquement insensibles aux champs magnétiques du système solaire de **10μG**.

**Réponse** : La déviation maximum survient quand la trajectoire du proton est perpendiculaire au champ magnétique. Pour une particule de charge **Ze**, la relation entre le rayon giratoire **r** ,le champ magnétique **B** et l'impulsion **p** de la particule orthogonal devient :

$$r = p /Ze.B \quad (13.1)$$

Pour les valeurs numériques du problème cela donne :

$$(r/1.ua) = 2.10^2 ( p/1. TeV) / (1μG/B) \quad (13.2)$$

où ua = unité astronomique, est la distance de la Terre au Soleil,  $1,5 \cdot 10^{11}$  mètres.Pour  $p = 5$  TeV et  $B = 10 \mu G$ , le rayon gyromagnétique est  $r \approx 100$  ua, supérieur à la distance de pluton au soleil (planète la plus éloignée)

---

Les rayons cosmiques ont joué un rôle important dans le développement de la physique des particules. Avant la construction d'accélérateurs à particules par l'homme, ils étaient le seul moyen d'étude des particules de haute énergie (collisions, désintégrations). Le muon, le pion, le positron et les particules contenant des quarks s furent d'abord découvert dans les réactions induites par les rayons cosmiques.

En dépit de **85 ans** d'étude, beaucoup de questions au sujet des rayons cosmiques sont toujours sans réponse. D'où viennent t'ils ? Quels sont les accélérateurs cosmiques capables d'émettre des noyaux avec des énergies supérieures à **10<sup>19</sup> eV** ? Quelle est la composition des noyaux à ces énergies.

### 13.2 L'abondance des rayons cosmiques

Le spectre d'énergie des rayons cosmiques au sommet de l'atmosphère recouvre un grand nombre d'ordres de grandeurs, et peut être décrit, au dessus de **10 GeV**, par des segments en loi de puissance comme l'indique la figure 13.1

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\alpha} \quad (13.3)$$

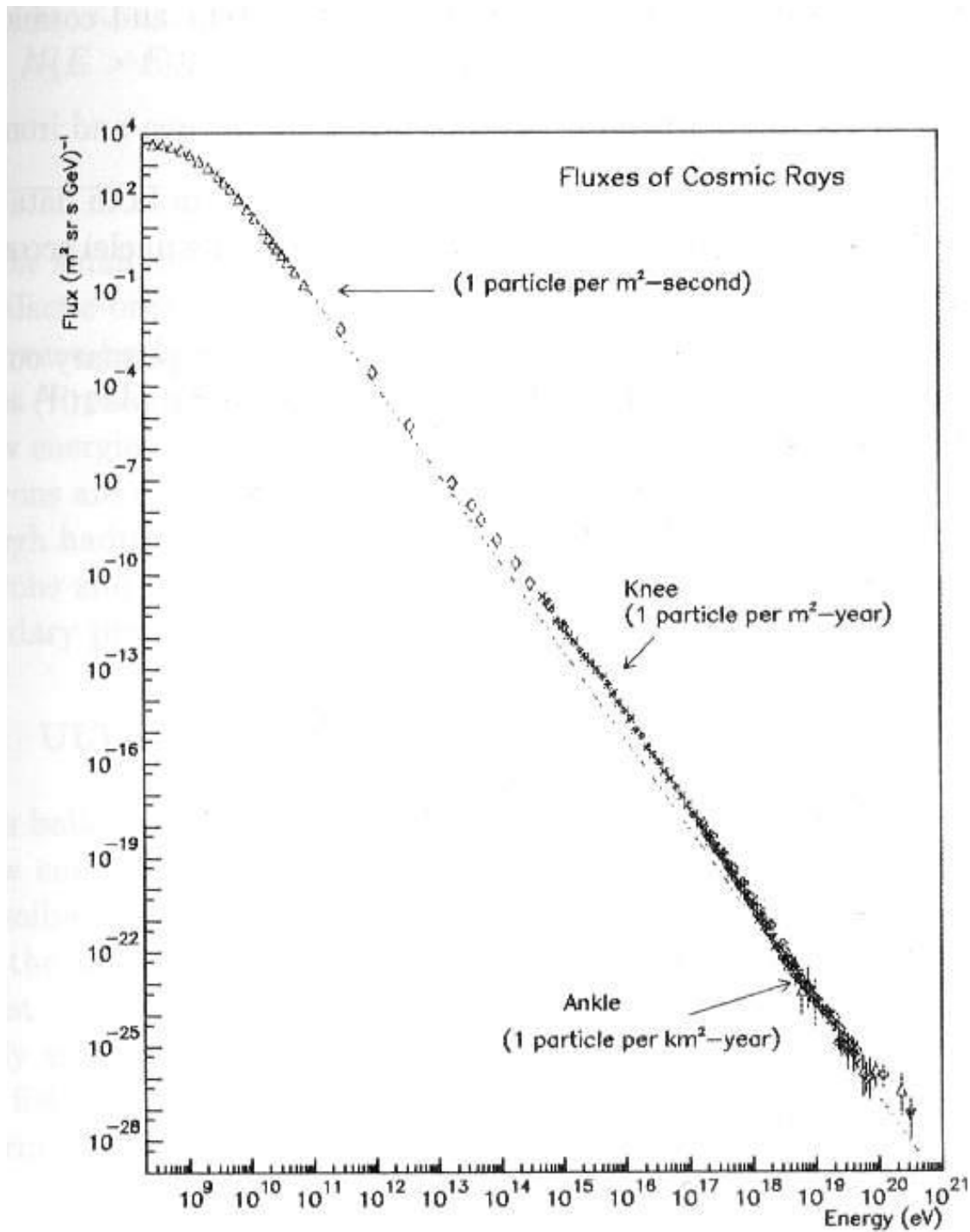
avec les valeurs suivantes pour l'exposant

$$\alpha = \begin{cases} 2.7 & E < 10^{16} \text{ eV} \\ 3.0 & 10^{16} < E < 10^{18} \text{ eV} \end{cases} \quad (13.4)$$

Pour les plus hautes énergies au dessus de  $10^{19}$  eV, l'exposant semble plus petit :c.a.d, la distribution est plus plate. Les deux cassures dans le spectre, autour de  $10^{15}$ - $10^{16}$  eV ( le genou) et  $10^{18}$ - $10^{19}$  eV ( la cheville) peut être représentative des limites d'énergie des différents accélérateurs cosmiques.

La composition chimique des rayons cosmiques est intéressante et peut fournir des indices pour comprendre leur origine. Des spectromètres de masse, à bord des satellites et ballons montrent de nettes différences d'abondance relative avec celles qu'on trouve dans le système solaire estimée des caractéristiques spectrales de la photosphère du Soleil et de l'étude des météorites supposées avoir la même composition chimique ( voir figure 13.2).

- L'abondance relative des protons et des noyaux d'Hélium dans les rayons cosmiques est plus petite que dans le système solaire.
- - Deux groupes d'éléments ( Li, Be,B) et (Sc, Ti, V, Mn) sont plus abondant de façon significative dans les rayons cosmiques.



**Figure 13.1** : Compilation des mesures du spectre d'énergie différentiel des rayons cosmiques [38]. La ligne pointillée montre une loi en  $E^{-3}$  à titre de comparaison. Une approximation des flux intégrés (par stéradian) est aussi montrée (communiqué par courtoisie par Jim Matthews)

La sous abondance relative de l'hélium et de l'hydrogène dans les rayons cosmiques n'est pas totalement comprise : Cela peut refléter la composition primordiale des rayons cosmiques ou être simplement du à des propriétés de propagation différentes des éléments et le fait que des

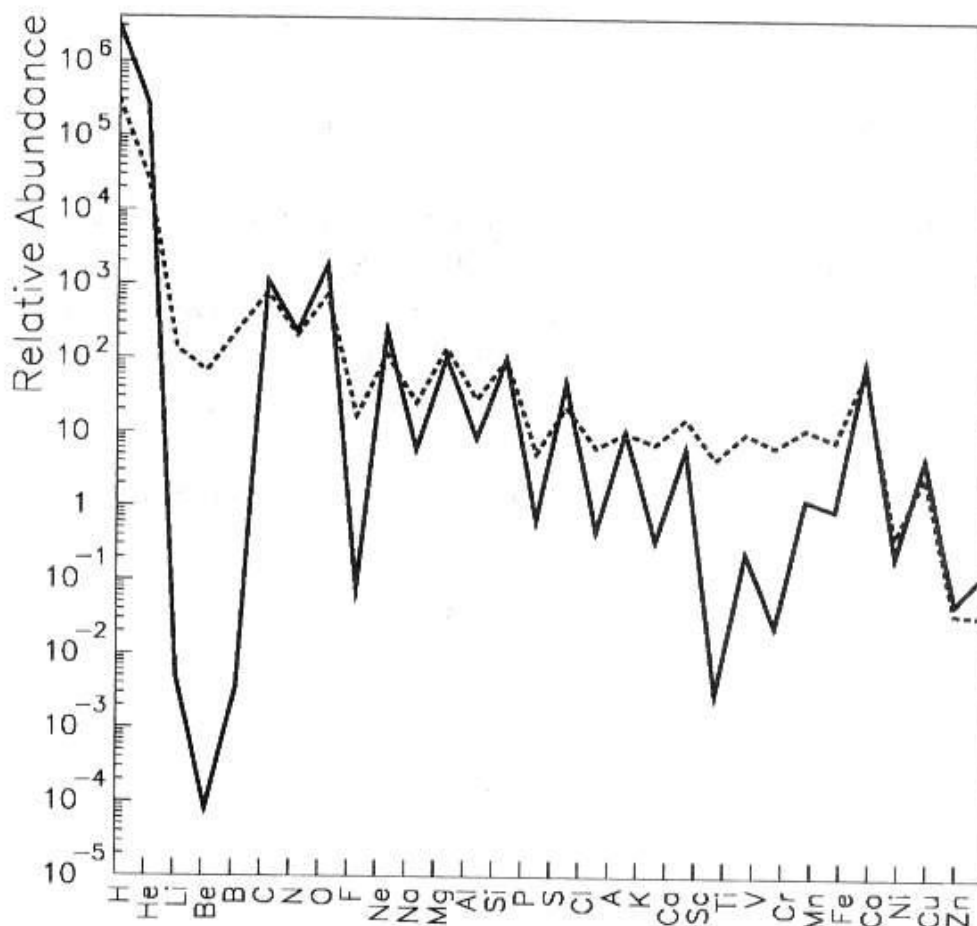
éléments plus lourds peuvent être plus facilement ionisés, donc plus sujet aux accélérations. La surabondance de (Li, Be, B) est réputée due à la « fragmentation » du carbone et de l'oxygène. Quand ces éléments très communs voyagent dans le media interstellaire, ils sont fragmentés par les collisions très énergétiques avec le gaz d'hydrogène et d'hélium présent dans le milieu interstellaire en éléments de nombre atomique plus petit.

De même (Sc, Ti, V, Cr, Mn) résultent de la fragmentation du fer.

Parmi les similitudes intéressantes entre les abondances du système solaire et celles des rayons cosmiques on trouve :

- 1 On trouve des pics d'abondance pour le carbone, l'azote, l'oxygène et le fer
- 2 Un, effet, de nombre de masse pair/impair, dans les abondances, est observé dans les deux cas : Ceci s'explique par la stabilité relative des noyaux en fonction de leur nombre atomique.

Bien que ces résultats ne soient pas très probants, il semble plausible que la composition primaire de la source de rayons cosmiques à des énergies inférieures à la première cassure ( $10^{15}$ - $10^{16}$  eV) soit similaire à l'abondance locale des éléments.



**Figure 13.2 :** Abondance relative des rayons cosmiques au sommet de l'atmosphère (courbe en tirets), comparée à celle du système solaire et du milieu interstellaire local ( courbe en trait plein), normalisée pour le silicium (=100). Ref [25]

**Exemple 13.2.1** : Montrer que le nombre ( flux) de rayons cosmique au dessus d'une certaine énergie ,  $E_0$ , suit aussi une loi de puissance si  $\alpha > 1$  dans l'équation (13.3)

Réponse : En intégrant l'équation (13.3) on obtient :

$$N(E > E_0) = \int_{E_0}^{\infty} E^{-\alpha} dE \propto E_0^{-\alpha+1} \quad (13.5)$$

Les électrons et positrons (en faible nombre) sont supposés être d'origine galactique. Leur perte d'énergie par la diffusion Compton, avec le RFC ne leur permet pas de parcourir de grandes distances. La fraction de positrons,  $e^+ / (e^+ + e^-)$ , n'a été mesurée qu'à basse énergie (inférieure à 50 GeV) et n'est que de quelques %, montrant que les électrons sont accélérés par des sources primaires. Si leur origine était secondaire ( par désintégration hadronique par exemple  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow e^+$  ), il y aurait des proportions comparables d'électrons et de positrons. Les positrons, d'autre part, sont probablement le résultat de réactions telles que  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$ .

### 13.3 Utra hautes énergies

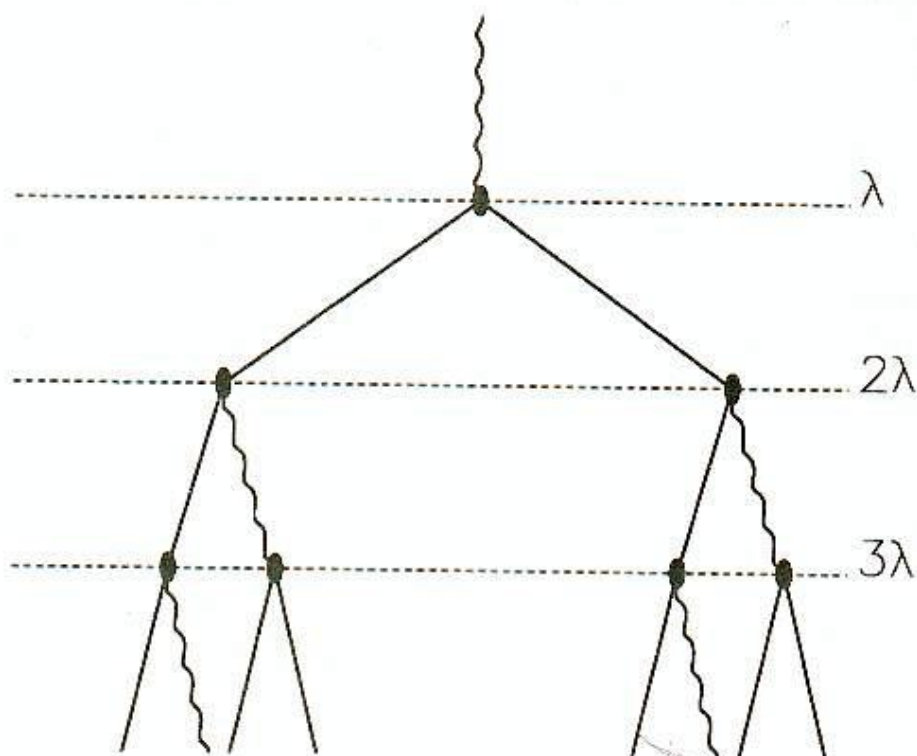
Si les expériences embarquées en ballons sont bien adaptées pour l'étude des rayons cosmiques de basses énergies, le spectre pentu montré en Figure 13.1, révèle qu'il est impossible de récolter suffisamment d'évènements à des énergies sous le « genou » du spectre avec les détecteurs limités en taille embarqués dans des équipements en vol. L'étude de ces hautes énergies est pourtant très intéressante, car ces particules ne sont que peu déviées par les champs magnétiques de la galaxie ( $\approx \mu\text{G}$ ) et intergalactiques ( $\approx \text{nG}$ ). Pour une source à une distance  $L$ , la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est déviée de:

$$\theta \approx 3^\circ Z \left( \frac{L}{1 \text{ kpc}} \right) \times \left( \frac{B}{1 \mu\text{G}} \right) \times \left( \frac{10^{19} \text{ eV}}{E} \right) \quad (13.6)$$

L'étude de la direction des particules de hautes énergies va nous apporter des informations sur la localisation et la nature des accélérateurs cosmiques.

#### 13.3.1 Averses de Gerbes de particules

Bien que l'atmosphère empêche les rayons cosmiques primaires et les rayons gammas d'atteindre le sol ou même le sommet des montagnes, il y a une méthode pour les étudier au niveau du sol. Quand les particules primaires frappent l'atmosphère, leur énergie est transférée par une série de collisions en cascade de particules comme cela est montré schématiquement sur la figure 13.3. On peut décrire comme cela : Un rayon gamma par exemple, va donner naissance à une paire électron positron dans un intervalle d'une longueur d'interaction (pour l'interaction électromagnétique, on l'appelle aussi, longueur de rayonnement) . Dans la longueur d'interaction suivante, l'électron et le positron vont émettre un photon de rayonnement de freinage ( Bremsstrahlung), qui à son tour va interagir dans la longueur d'interaction suivante etc.. Pour simplifier, on suppose que l'énergie se répartit également à chaque vertex. Ce processus de foisonnement s'arrête quand l'énergie de l'averse de particules tombe sous un seuil critique  $\epsilon_c$ .



**Figure 13.3** : Vue schématique de la création d'une pluie de particules dans l'atmosphère.

Pour une pluie « électromagnétique, consistant en photons, électrons et positrons exclusivement, l'énergie critique est atteinte quand la section efficace pour le rayonnement de freinage devient inférieure à celle pour l'ionisation. Pour résumer, le nombre de particules le long de la coordonnée  $x$  du profil de l'averse est :

$$N(x) = 2^{\frac{x}{\lambda}} \quad (13.7)$$

où  $\lambda$  est la distance moyenne entre interactions. Quand l'averse est maximum pour une énergie primaire  $E$ , le nombre de particules d'énergie critique  $\epsilon_c$  est :

$$N_{max} = \frac{E}{\epsilon_c} \quad (13.8)$$

Le nombre de particules de l'averse diminue exponentiellement après le maximum, car les particules s'arrêtent successivement. En combinant les équations (13.7) et (13.8) on peut voir que la position du maximum de l'averse croît comme le logarithme de l'énergie primaire

$$x_{max} = \frac{\lambda}{\ln 2} \cdot \ln \frac{E}{\epsilon_c} \quad (13.9)$$

Les caractéristiques générales pour la cascade de particules est approximativement correcte pour les averses hadroniques, générées par des noyaux primaires. En plus de la partie électromagnétique, les cascades incluent des hadrons et des muons. Les muons interagissent électromagnétiquement, mais du fait de leur masse plus élevée, ils ont une portée plus longue



que les électrons et positrons. Alors, au niveau de la mer, les flux de rayons cosmiques sont composés essentiellement de muons d'énergie moyenne d'environ **2 GeV**, mais avec un spectre pentu, atteignant environ les mêmes énergies que les rayons cosmiques primaires.

Des averses très intenses, peuvent donc être utilisées pour étudier les rayons cosmiques au dessus de **1 TeV**. Les principales caractéristiques de ces cascades de particules sont :

(1)  $N_{\max} \propto E$

(2)  $x_{\max} \propto \ln E$

(3) Les temps relatifs d'arrivée des particules de l'averse, peuvent être utilisés pour déterminer la direction des particules frappant le haut de l'atmosphère comme montré dans la la figure 13.4.

tandis que (3) nous dit que des averses très intenses peuvent être utilisées pour retrouver l'origine des rayons cosmiques THE, les propriétés (1) et (2) peuvent être utilisées pour reconstruire l'énergie des particules incidentes au sommet de l'atmosphère.

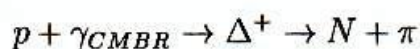
En pratique, des simulations par la méthode de Monte Carlo sont utilisées pour modéliser le développement d'une cascade dans l'atmosphère et la comparer avec les résultats d'expérience. Deux types de techniques sont utilisés pour étudier les averses dans l'air.

Détecteurs de particules ( par exemple scintillateurs) qui comptent les muons, électrons et positrons à la surface. L'expérience AGASA au Japon, avec une surface de détection de **100 km<sup>2</sup>**, est le réseau de détecteurs le plus important en service.

(II) les particules chargées de l'averse excitent l'azote de l'atmosphère, provoquant une émission fluorescente. Des télescopes optiques peuvent être utilisés pour détecter pour reconstruire la cascade de particules. Il existe actuellement un tel instrument opérationnel – l'expérience Fly's Eye dans l'Utah.

### 13.3.2 Interaction avec le RFC

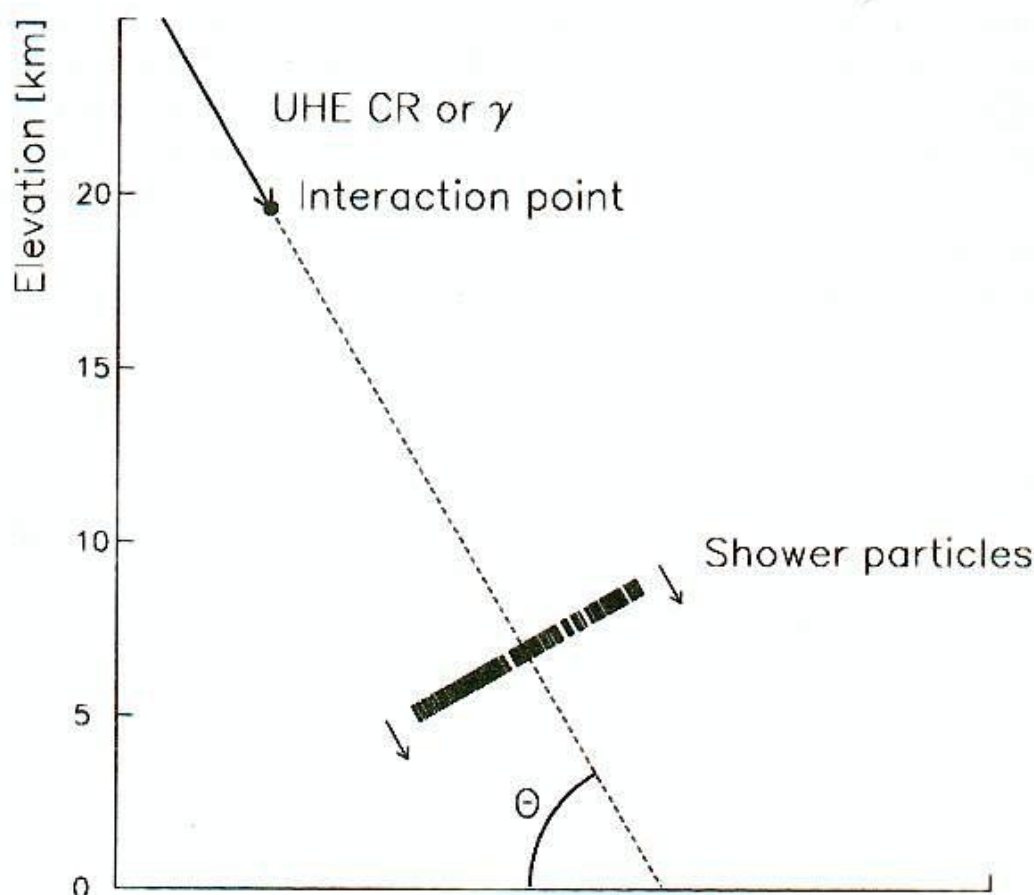
L'univers devient opaque pour les rayons cosmiques quand la réaction « résonnante » avec les photon du RFC



devient énergiquement possible. L'état final peut être soit  $p + \pi^0$  ou  $n + \pi^+$ .

Pour estimer l'énergie de seuil, nous assignons une quadri impulsion aux particules incidentes telle que mesurée par un observateur au repos :

$$\begin{cases} \gamma : & (q, q, 0, 0) \\ \text{proton} : & (\sqrt{p^2 + m_p^2}, p \cos \theta, p \sin \theta, 0) \end{cases} \quad (13.10)$$



**Figure 13.4** : Vue schématique d'une averse dans l'air. Les temps d'arrivée du front d'onde des particules de l'averse à la surface des détecteurs nous renseignent sur l'angle d'incidence de la particule primaire. L'averse de particules arrive au sol sous forme d'étroites « crêpes » comme des feuilletés.

Où le proton d'impulsion  $\mathbf{p}$  interagit avec le photon se déplaçant sur l'axe des  $x$  avec une impulsion  $\mathbf{q}$ , faisant un angle  $\theta$  dans le plan  $xy$ .

La condition d'énergie est satisfaite si l'énergie au centre de masse est au moins égale à la somme des masses du pion et du proton : c.a.d,  $s > (m_p + m_\pi)^2$  ( voir équation 2.58)

Par quelques calculs on peut montrer que cela est satisfait si :

$$m_p m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2} \leq q (\sqrt{p^2 + m_p^2} - p \cos \theta) \quad (13.11)$$

Comme la masse du pion est bien plus faible que celle du proton ( et neutron) l'expression ci dessous se simplifie en :

$$E_p - p \cos \theta \geq \frac{m_p m_\pi}{q} \quad (13.12)$$

Comme, pour un gaz relativiste de bosons  $\langle q \rangle \approx 2.7 T$  ( voir équation (7.25)) et  $T_{\text{RFC}} \approx 2,74\text{K}$ , correspondant à seulement  $2,36 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ , l'énergie de seuil des nucléons devient très grande :

$$E_p \sim 10^{20} \text{ eV} \quad (13.13)$$

Ceci est appelé la limite de Greisen Zatsepin Kusmin ( limite **GZK**)

Ensuite nous devons estimer le parcours libre moyen pour les nucléons au dessus de la limite **GZK**.

L'expression générale d'un libre parcours moyen d'une particule dans un milieu diffusant est construite comme suit : Considérons une particule arrivant dans une région d'aire **A** contenant **n** diffuseurs par unité de volume. Le libre parcours moyen est défini comme la distance moyenne parcourue par la particule avant de frapper un diffuseur. Si un tel diffuseur a une section efficace **σ**, la probabilité de frapper un diffuseur est **p<sub>1</sub> = σ / A**.

La probabilité unitaire, au moins un est frappé, est atteinte quand **N.p<sub>1</sub> = 1**, où le nombre total de diffuseurs dans le volume **Aλ** est **N = Aλn**. Cela se produit quand :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (13.14)$$

La section efficace pour la réaction **p γ<sub>RFC</sub>** est **σ<sub>py</sub> ≈ 10<sup>-28</sup> cm<sup>2</sup>** et la densité de photons du RFC est de **n = 420. (1+z)<sup>3</sup> cm<sup>-3</sup>**. Alors le libre parcours moyen des protons pour **E<sub>p</sub> ≈ 10<sup>20</sup> eV** est de :

$$\lambda_{GZK} \approx 8 \text{ Mpc} \quad (13.15)$$

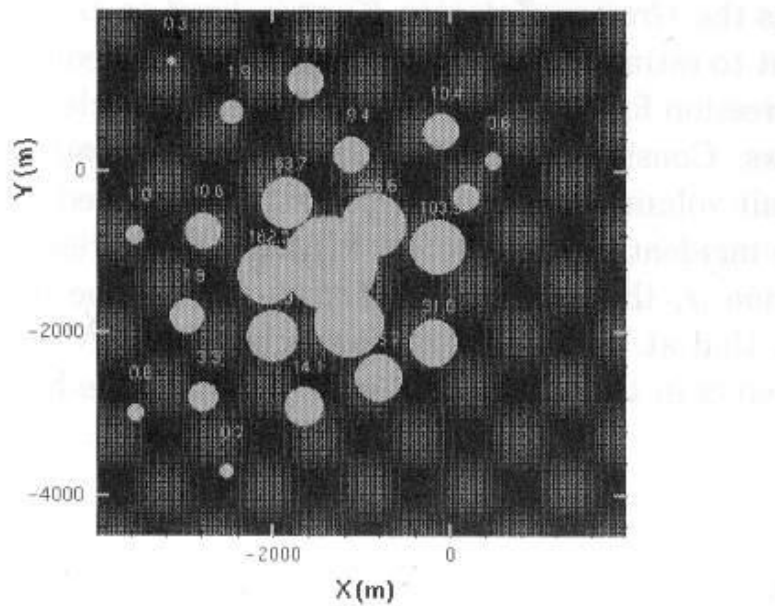
environ la moitié de la distance à Virgo, l'amas de galaxies le plus proche. Si les protons perdent 20% de leur énergie à chaque coup, après **100 Mpc**, ils sont sur les genoux.

Bien que n'étant pas déterminante, l'observation d'évènements d'énergie supérieure à la limite GZK ont été observés. Un tel cas est montré en figure 13.5. Etonnant qu'aucun candidat de source n'ait été trouvé dans la direction correspondante à ces évènements. De nouvelles expériences, de plus de deux ordres de grandeur supérieures sont planifiées. L'expérience AUGER, par exemple, constituée d'un détecteur hybride utilisant des réseaux de surfaces et des télescopes à détection de fluorescence atmosphérique couvre une surface de **6000 km<sup>2</sup>**, est en construction en Argentine pour étudier le RC THE dans l'hémisphère sud.

### 13.4 Accélération des particules

L'origine exacte des rayons cosmiques demeure une énigme. Le fait qu'on détecte des particules d'énergie supérieure à **10<sup>20</sup> eV**, montre qu'il existe des mécanismes d'accélération incroyablement efficaces dans l'univers. En fait il est plausible que les particules d'énergie supérieure à celle du « genou » (**10<sup>16</sup> eV**) ont une origine extra galactique (du fait que les champs magnétiques ne sont pas assez forts pour les confiner), tandis que les sources galactiques doivent correspondre à des énergies plus faibles.

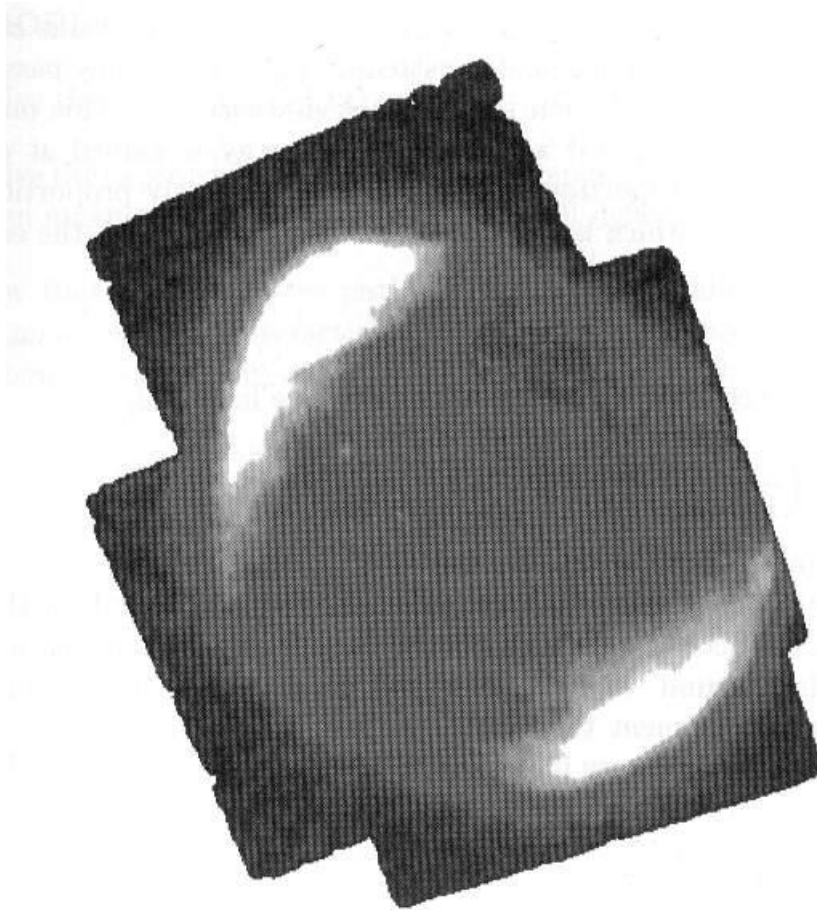
Une explosion de supernova est un événement qui libère une grande quantité d'énergie. La puissance totale sous forme de rayons cosmiques quittant le disque galactique peut être estimée à environ **10<sup>47</sup> W** [7]. Comme l'énergie moyenne libérée par une supernova est de l'ordre de **10<sup>56</sup> J**, et que leur fréquence est de l'ordre de une tous les **50 à 100** ans, un pour cent, de cette énergie, suffit pour réaliser l'accélération des rayons cosmiques.



**Figure 13.5** : Averse très intense observée par le réseau AGASA [16] L'énergie reconstituée de l'averse sur  $4 \times 4 \text{ km}^2$  est de  $2.10^{20} \text{ eV}$ . Les rayons des cercles sont proportionnels au logarithme de la densité de particules par  $\text{m}^2$  à l'endroit du détecteur.

Le mécanisme le plus prometteur est l'accélération près de l'onde de choc qui est générée par l'enveloppe qui s'étend quand elle balaie le milieu interstellaire environnant. Des données récentes en rayonnement  $X$  du résidu de l'explosion en 1006 de la supernova qui fut observée par les astronomes chinois confirme que l'accélération des électrons se produit toujours, rendant plausible l'accélération de protons et d'ions plus lourds dans les mêmes conditions (Voir figure 13.6). (Les électrons sont plus faciles à détecter car ils émettent des rayons  $X$  et  $\gamma$  plus facilement que les protons ne le font).

C'est Fermi qui le premier se rendit compte que les particules pouvaient être accélérées de façon stochastique jusqu'à de très hautes énergies. Par la suite, cette hypothèse a été améliorée, et nous avons aujourd'hui des modèles très convaincants qui décrivent l'accélération dans différents environnements. L'idée de base est plutôt simple. Supposons que les rayons cosmiques qui voyagent dans le milieu interstellaire entrent en collision avec des objets beaucoup plus grands (Par exemple des nuages magnétisés) qui se déplacent à des vitesses et des directions aléatoires. En fonction de la vitesse relative exacte des deux types d'objets, les rayons cosmiques peuvent soit gagner de l'énergie soit en perdre ( en première approximation, la vitesse d'un objet plus grand n'est pas affecté par la collision). On obtient alors une distribution d'énergie. Comme il y a un plancher  $E_{\text{cin}} = 0$ , mais pas de « plafond » pour l'énergie cinétique possible, l'énergie moyenne des rayons cosmiques va tendre à augmenter. La forme de la distribution d'énergie va dépendre des détails, mais Fermi put montrer que dans beaucoup de cas on va trouver une loi de puissance.



**Figure 13.6 :** Emission en rayons X de la supernova de **1006**. Les zones brillantes caractérisent des émissions intenses. L'intensité et la distribution d'énergie sont cohérentes avec l'hypothèse que les électrons sont accélérés jusqu'à de très hautes énergie sur l'onde de choc associée à l'expansion de l'enveloppe qui se poursuit toujours. Crédit : E.Gott helf (GSFC), the ASCA Project NASA.

Un problème dans la version initiale de Fermi était que l'accélération était très lente et peu efficace, avec des gains du deuxième ordre seulement ( $O(v^2)$ ) à chaque collision (appelée accélération de Fermi du deuxième ordre). Du fait des pertes à chaque étape (en particulier les pertes par ionisation, qui sont importantes pour les particules lentes) il était difficile d'obtenir un modèle qui marche.

Plus efficace sont les processus du premier ordre (linéaire en  $v$ ), qui surviennent sur les fronts d'ondes de choc. De nouveau l'idée est simple. Supposons qu'une forte onde de choc se propage dans le milieu interstellaire entourant, par exemple une supernova. L'onde de choc représente une région où un gradient de pression et de densité existe et se propage bien plus vite que le son dans le milieu. Il va y avoir une différence de densité dans le milieu entre ce qui est devant l'onde de choc et derrière d'un facteur, qui dépend de l'équation d'état 5 pour un gaz complètement ionisé, le rapport est égal à 4). De l'énergie cinétique est aussi transférée de l'onde de choc au gaz, qui va entraîner un mouvement d'ensemble du gaz après le choc. Cependant de chaque côté de l'onde, les particules diffusent (suivent un chemin chaotique) avec une constante de diffusion qui dépend entre autres, de l'énergie de la particule et de la valeur moyenne des champs magnétiques présents. Une particule (rayon cosmique) se déplaçant

dans le même sens que l'onde choc, peut ( soit être rattrapée, soit la dépasser) et « surfer » sur cette onde ( matérialisée par le gaz comprimé en mouvement) ce qui l'accélère, et être diffusée en avant du front d'onde ( ce qui change sa direction) et de nouveau elle peut être rattrapée et surfer à nouveau en gagnant de la vitesse. Ceci peut se répéter pendant beaucoup de cycles. Si une fraction de l'énergie  $\xi$  est gagnée à chaque cycle et que la période des cycles est proportionnelle à l'énergie (et inversement proportionnelle à l'intensité du champ magnétique), ce qui est un modèle réaliste, l'équation

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{\xi E_p}{T} \quad (13.16)$$

implique un taux d'accélération constant. Numériquement, on trouve

$$\frac{dE_p}{dt} \sim 10^{12} \left( \frac{B}{1 \text{ Gauss}} \right) v_1^2 \text{ eV s}^{-1} \quad (13.17)$$

où  $v$  est la vitesse du flux de gaz comprimé.

Cette accélération se poursuit jusqu'à ce qu'elle soit neutralisée par les pertes d'énergie (qui dépendent du milieu). Le spectre d'énergie suit une loi de puissance, d'exposant spectral d'environ  $-2$  dans ce type d'accélération. Si on prend en compte les temps de rétention dans le disque galactique (les particules de haute énergie s'échappent plus facilement), l'exposant primaire doit être modifié, sans doute jusqu'à la valeur fatidique de  $2,7$  qu'on observe effectivement.

L'accélération par onde de choc s'exerce dans différentes configurations de choc : le front entre le vent solaire et le vent galactique, le choc d'accrétion près d'un trou noir super massif (comme on suppose qu'il en existe dans les noyaux actifs de galaxies), ondes choc intergalactiques etc..

### 13.5 Résumé

- L'atmosphère terrestre est bombardée par un flux de noyaux atomiques suivant une loi de puissance, non thermique, et atteignant  $10^{20}$  eV, soit huit ordres de grandeurs supérieurs à ce que les accélérateurs les plus puissants sont capables de produire. Cependant le flux suit une loi de puissance à décroissance rapide  $dN/dE \approx E^{-2,7}$ , jusqu' environ  $10^{16}$  eV. Aux plus hautes énergies observées  $10^{21}$  eV, la courbe décroît moins vite, mais le faible nombre d'évènements rend ceci peu significatif.
- Les rayons cosmiques d'ultra haute énergie sont intéressants à étudier, car ils nous renseignent sur leur direction de provenance (peu déviés).
- Une accélération de Fermi au premier ordre, provoquée par les ondes de choc d'explosion de supernovae est un scénario plausible qui permet d'expliquer des rayons cosmiques d'énergie jusqu'à  $10^{16}$  eV

## Chapitre 15 Le rôle des neutrinos

### 15.6 Oscillation des neutrinos

Le problème du déficit de détection des neutrinos  $\nu_e$  solaires a forcé les physiciens et astronomes à revoir leurs calculs et explorer d'autres scénarios possibles. L'approche a été double. D'un côté, on a remis en cause la théorie de production des neutrinos solaire, c'est à dire le modèle décrivant les réactions nucléaires à l'intérieur du Soleil. Mais d'autres observations liées à l'hélio-sismologie ont conforté le modèle solaire. Les physiciens des particules ont alors émis l'hypothèse plutôt originale suivante : Les neutrinos solaires  $\nu_e$  sont bien émis au cœur du Soleil, conformément au modèle connu, mais ils changent d'identité quelque part entre le Soleil et le détecteur. Par exemple une fraction de  $\nu_e$  se convertit en  $\nu_\mu$ , ou même quelque chose d'autre, faisant décroître de ce fait le flux des neutrinos électroniques au niveau de la Terre

[ Les premiers détecteurs de neutrinos n'étaient sensibles qu'aux neutrinos électroniques. Cette faiblesse est maintenant réparée, et la génération actuelle et future de détecteurs SNO au deutérium et Borexino  $^{11}\text{B}$  est ou sera sensible au flux total de toutes les espèces de neutrinos].

Si les neutrinos sont sans masse ils sont par définition stables : ils ne peuvent pas se désintégrer en quelque chose de plus léger. Rien n'impose que les neutrinos n'aient pas de masse. Pour des masses inférieures à 1 MeV, la désintégration radiative d'un  $\nu_a$  en un  $\nu_b$  plus léger par  $\nu_a \rightarrow \nu_b + \gamma$  est cinématiquement possible, mais sa période est plus longue que l'âge estimé de l'univers. Dans un tel scénario, un mélange d'espèces de neutrinos peut se produire si les valeurs propres de l'interaction faible  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  et  $\nu_\tau$  ne sont pas les valeurs propres des masses : en fait, les états dans lesquels les neutrinos se propagent dans le vide.

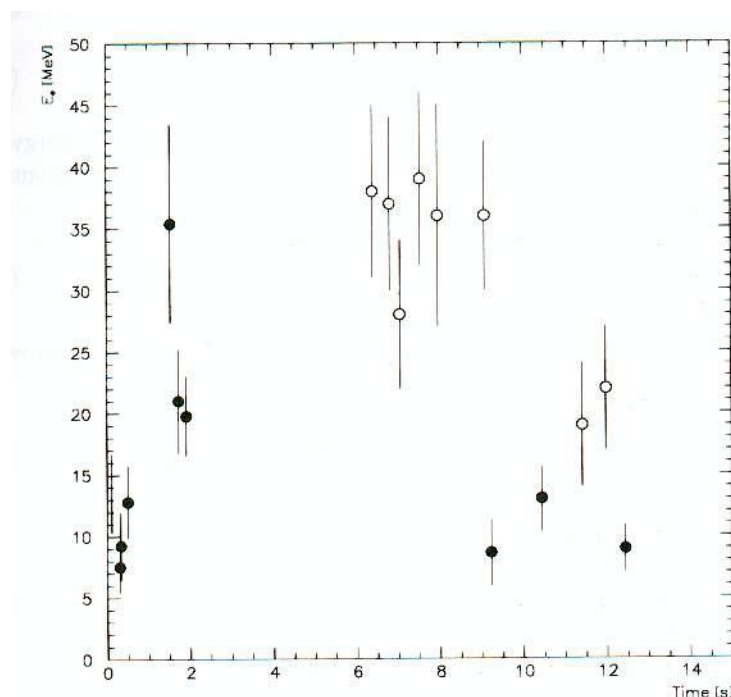


Figure 15.7 : Signaux de neutrinos détectés par Kamiokande ( cercles pleins) et IMB ( cercles simples). La figure montre les énergies des positrons. Il y a sans doute un décalage d'origine entre les horloges des deux expériences.

En général, une saveur quelconque, c'est à dire une valeur propre de l'interaction faible du neutrino,  $\nu_f$ , peut être exprimée comme une superposition linéaire de valeurs propres orthogonales de masses,  $\nu_m$ .

$$|\nu_f\rangle = \sum_m c_{fm} |\nu_m\rangle$$

Par exemple considérons la situation où il y a deux valeurs propres de masses associées à deux valeurs propres de saveurs. La matrice unitaire de transformation, reliant les valeurs propres de masses aux valeurs propres de saveurs peut ne dépendre que d'un seul paramètre, l'angle de mélange  $\theta$ .

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (15.26)$$

Bien que les états  $|\nu_e\rangle$  et  $|\nu_\mu\rangle$  (et leurs antiparticules) sont produits dans l'interaction faible, comme par exemple dans la désintégration  $\mu^- \rightarrow e^- \nu_e \nu_\mu$ , les états physiques : en fait, les états du Hamiltonien avec des masses définies, sont  $\nu_1$  et  $\nu_2$ .

Donc l'évolution temporelle de la fonction d'onde d'un neutrino électronique d'impulsion  $p$  est

$$|\nu_e(t)\rangle = -\sin\theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \cos\theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \quad (15.27)$$

où  $E_1$  et  $E_2$  sont les énergies des deux valeurs propres associées aux masses. Deux niveaux d'énergie différents apparaissent si  $\nu_1$  et  $\nu_2$  ont des masses différentes, car ils doivent avoir la même valeur d'impulsion,  $p$ . Alors pour des masses de neutrinos très faibles : c'est à dire,  $m_i \ll E_i$ ,

$$E_i = p + \frac{m_i^2}{2p} \quad (15.28)$$

La probabilité  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = |\langle \nu_e | \nu_e \rangle|^2$ , qui est qu'un neutrino électronique reste un neutrino électronique  $\nu_e$  après avoir voyagé pendant un temps  $t$  est (facile à vérifier à partir de 15.27)

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left[\frac{1}{2}(E_2 - E_1)t\right] \quad (15.29)$$

Pour des masses de neutrinos très petites, en reportant (15.28) on obtient :

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left[\left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4E}\right)t\right] \quad (15.30)$$

Où  $E$  est l'énergie du neutrino électronique. Il s'ensuit que la probabilité pour qu'un neutrino électronique devienne un neutrino muonique au bout d'un parcours de temps  $t$  est :



$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[ \frac{\Delta m^2}{4E} l \right] \quad (15.31)$$

où  $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$ . De l'équation (15.31) et de la figure 15.8, on voit que la fonction de probabilité pour que la saveur change oscille avec une amplitude donnée par  $\sin^2(2\theta)$  et une fréquence d'oscillation  $\propto \Delta m^2/E$ . donc, pour des masses et des angles de mélange convenables, le déficit présumé des neutrinos électroniques solaires peut s'expliquer par ce phénomène d'oscillation.

Pour résumer, l'amplitude et la longueur de l'oscillation de saveur sont ( en réintroduisant les facteurs dimensionnels  $h$  et  $c$  )

$$\begin{cases} A &= \sin^2(2\theta) \\ L_\nu &= \frac{4\pi E h}{\Delta m^2 c^3} \end{cases} \quad (15.32)$$

Numériquement, la longueur d'oscillation devient :

$$L_\nu = 2.48 \left( \frac{E}{1 \text{ MeV}} \right) \left( \frac{1 \text{ eV}^2}{\Delta m^2} \right) \text{ metres.} \quad (15.33)$$

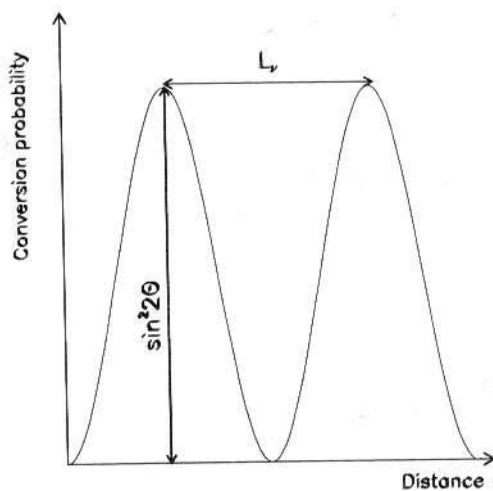


Figure 15.8 : Probabilité d'oscillation pour  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$

Un certain nombre d'expériences terrestres ont été mises en place pour tester cette oscillation. On utilise une source connue de neutrinos, soit un réacteur nucléaire soit un faisceau d'un accélérateur.

Dans l'expérience du réacteur les énergies du  $\nu_e$  sont si petites (typiquement quelques MeV) que la réaction de courant chargé  $\nu_\mu \rightarrow \mu$  est cinématiquement impossible, même si un  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  s'est produite. Donc le signal d'oscillation dans l'expérience du réacteur est caractérisé par la disparition des  $\nu_e$ s en fonction de la distance de la source.

Dans l'expérience de l'accélérateur des faisceaux de  $\nu_\mu$  sont créés par un faisceau secondaire de pions se désintégrant selon  $\pi \rightarrow \mu \nu_\mu$ . On observe alors l'apparition de  $\nu_e$  et  $\bar{\nu}_e$ . A ce jour [le

livre date de l'an 2000], aucun signal convainquant d'oscillation n'a été décelé, à l'exception peut être de l'expérience de Los alamos, qui n'a pas été confirmé par d'autres expériences. On pense pourtant que la solution du déficit des neutrinos solaires est bien liée à ces oscillations de neutrinos. Ce point devrait être résolu prochainement par de nouveaux détecteurs ( SNO ) , permettant des statistiques plus conséquentes.

### 15.10 Télescopes à neutrinos : l'effet Cherenkov

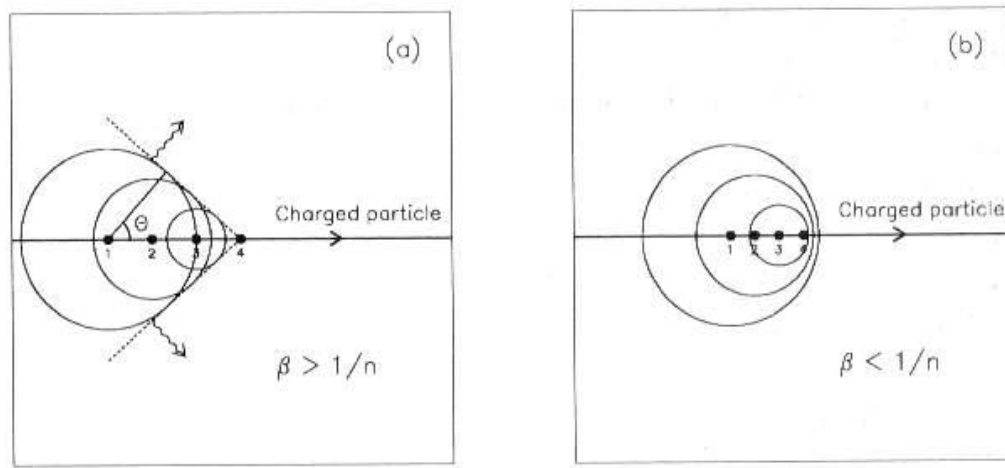


Fig 15.11 : (a) L'émission Cherenkov pour une particule chargée se déplaçant au dessus du seuil  $\beta \geq 1/n$ . Les cercles ( sphères) montrent l'émission isotropique de la lumière le long de la trajectoire de la particule chargée.

Au bout d'un temps  $t$  la particule chargée a parcouru une distance  $\beta ct$ . Pendant ce temps le front d'onde sphérique de l'onde lumineuse a parcouru  $ct/n$ . L'angle de propagation du front d'onde Cherenkov est donc tel que  $\cos \theta = 1/\beta.n$ , ainsi que stipulé dans l'équation 15.43). (b) Sous le seuil ,  $\beta < 1/n$ , les fronts d'onde sphériques lumineux ne présentent pas d'émission cohérente.

## ANNEXE B: Dynamique Relativiste

### B1. Mécanique classique

#### Formulation Lagrangienne.

L'équation du mouvement d'Euler Lagrange s'obtient en exprimant que l'intégrale d'action du Lagrangien entre deux points est extremum sur la trajectoire.

$$\delta \int L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (\text{B4})$$

On en déduit les équations du mouvement

$$\partial L / \partial q_i - (d/dt)(\partial L / \partial \dot{q}_i) = 0 \quad (\text{B8})$$

Que l'on peut exprimer sous sa forme la plus générale si le Lagrangien dépend d'un champ:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

#### Définition du Hamiltonien

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L [q, \dot{q}(p, q)] \quad (\text{B12})$$

Avec les moments conjugués

$$p_i = \partial L (q, \dot{q}) / \partial \dot{q}_i \quad (\text{B11})$$

L'équation du mouvement sous sa forme Hamiltonienne est alors

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i \quad (\text{B15})$$

avec

$$q_i = \partial H / \partial p_i, \quad -\partial L / \partial q_i = \partial H / \partial q_i \quad (\text{B16})$$

Prenons un exemple simple:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (\text{B17})$$

Cela donne

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad (\text{B18})$$

Comme  $\dot{q} = p/m$ . Alors

$$H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + V(q) = T + V \quad (\text{B19})$$

Les équations de Euler Lagrange

$$\left\{ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} = F \right. \quad (\text{B.20})$$

donnent alors  $m\dot{q}'' = F$ , comme on s'y attend.

## B.2 Champs Classiques

### B2-1 Etablissement de l'équation de Klein Gordon

Considérons un exemple important de notre formalisme. Considérons un système de  $N$  particules, se déplaçant sur une dimension, connectées entre elles par des ressorts de masse supposée nulle générant une force de rappel constante  $k$  (voir Fig. B.2). Les particules sont séparées les unes des autres par une distance "a" à l'équilibre. Soit  $\phi_i$  l'écart par rapport à la position d'équilibre de la particule  $i$ . Alors le Lagrangien est

$$L = \sum_i (T_i - V_i) = \frac{1}{2} \sum_i [m\dot{\phi}_i^2 - k(\phi_{i+1} - \phi_i)^2] = a \sum_i \frac{1}{2} \left[ \frac{m}{a} \dot{\phi}_i^2 - ka \left( \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a \mathcal{L}_i \quad (\text{B.21})$$

Où  $\mathcal{L}_i$  est la contribution à la densité de Lagrangien (Lagrangien par unité de longueur) de la particule  $i$ . Nous pouvons passer à la limite,  $i \rightarrow x, \sum_i \rightarrow \int dx, \phi_i \rightarrow \phi(x), (\phi_{i+1} - \phi_i)/a \rightarrow \partial\phi/\partial x, m/a \rightarrow \rho$  (densité de masse) et  $ka \rightarrow \kappa$ , (module de Young). Le Lagrangien continu devient alors

$$L = \int dx \frac{1}{2} \left[ \rho \dot{\phi}^2 - \kappa \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{B.22})$$

Nous pouvons alors écrire l'action

$$S = \int dt L = \int dt \int dx \mathcal{L} \left( \phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (\text{B.23})$$

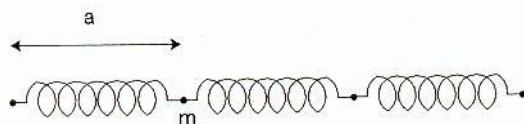


Figure B.2: système de particules classiques identiques de masse  $m$ , connectés par des ressorts de force constante  $k$ . La distance à l'équilibre entre les particules est  $a$ .

Avec la densité de Lagrangien

(B.24)

$$\mathcal{L} \left( \phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[ \rho \dot{\phi}^2 - \kappa \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Dans cet exemple,  $\phi(x, t)$  est le champ de déplacement. Un champ est une fonction de l'espace et du temps: Il contient un nombre infini de degrés de libertés. (Pour spécifier complètement un champ, il faut donner sa valeur en tout point de l'espace et du temps). La construction que nous avons fait dans cet exemple unidimensionnel est facile à généraliser à trois dimensions. Alors

$$S = \int dt L = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \nabla \phi) \quad (\text{B.25})$$

Ce qui nous permet d'écrire les équations d' Euler Lagrange.

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x^k)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial t)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{B.26})$$

Nous remarquons que nous pouvons écrire (B.26) sous sa forme relativiste invariante.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{B.27})$$

Ceci est invariant par transformation de Lorentz, si  $L$  étant une densité de scalaire (on a,  $L'(x'^\mu) = L(x^\mu)$  en RR

Comme premier exemple réaliste nous considérons un champ scalaire réel  $\varphi(x)$  (Ceci peut être par exemple le champ scalaire de Higgs de la physique des particules). La densité de Lagrangien non triviale, la plus simple est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^2 \right] \quad (\text{B.28})$$

L'équation d' Euler Lagrange (B.27) donne l'équation du mouvement.

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \mu^2 \varphi = 0 \quad (\text{B.29})$$

soit

### L'équation de Klein Gordon.

$$(\square + \mu^2)\varphi = 0 \quad (\text{B.30})$$

qui est une équation d'onde relativiste comme nous l'avons déjà remarqué.

[ Remarquons qu'on peut directement dériver cette équation de l'expression de l'énergie en Relativité Restreinte:  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$   
En associant l'opérateur  $i\hbar \partial_t$  pour l'énergie et  $(\hbar/i) \partial_{x_i}$  pour le moment cinétique et en l'appliquant à la fonction d'onde.]

Il y a aussi une formulation Hamiltonienne de la théorie classique des champs. Aux coordonnées généralisées  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  au point  $(t, \mathbf{r})$  de l'espace temps, il y a un moment canonique  $\pi(\mathbf{r}, t)$ , défini par

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{B.31})$$

Pour le champ scalaire réel à potentiel indépendant du temps, cela donne

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{r}, t)} = \dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B.32})$$

La densité de Hamiltonien est alors

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + \mu^2 \varphi^2] \quad (\text{B.33})$$

En intégrant cette densité sur l'espace, nous obtenons le Hamiltonien complet,  $H = \int_V d^3r \mathcal{H}$  qui représente l'énergie totale du champ.

## **B2-2 Quelques rappels généraux sur l'espace de Hilbert et son utilisation en Mécanique quantique**

### **L'espace de Hilbert**

#### ***États et vecteurs, observables et opérateurs***

Le remaniement conceptuel impliqué par le quantum d'action, amorcé par la modification du statut des concepts, poursuivi par l'élaboration du concept d'amplitude de probabilité, atteint sa forme achevée, épanouie, avec *l'espace de Hilbert*. Rarement autant qu'à l'occasion de ce remaniement l'harmonie a été aussi bonne entre les besoins du développement de la physique théorique et les moyens que fournissent les mathématiques. L'espace de Hilbert est, au départ, une pure construction mathématique, mais qui se trouve répondre parfaitement à ce qui était nécessaire à l'élaboration de la théorie quantique. Si l'espace de Hilbert n'avait pas été découvert, il aurait fallu l'inventer pour les besoins de la théorie quantique !

Mathématiquement, l'espace de Hilbert représente une généralisation du concept *d'espace vectoriel métrique* (l'espace ordinaire et l'espace-temps de Minkowski sont des espaces vectoriels métriques).

#### ***L'espace de Hilbert est un espace vectoriel de fonctions.***

Dans notre cas ces fonctions vont être les fonctions d'onde  $\psi$  que l'on considère comme un vecteur, dont une base est fournie par un ensemble ( infini) de fonctions  $\psi_i$  orthogonales et normées au sens où l'intégrale du produit satisfait à  $\int \psi_i \psi_j = \delta_{ij}$

Les transformations qui agissent sur des vecteurs de l'espace et les transforment en d'autres vecteurs du même espace sont des opérateurs\*. Vecteurs et opérateurs ont des propriétés de linéarité : toute combinaison linéaire, à coefficients complexes, de vecteurs est un vecteur ; un opérateur transforme un vecteur en un autre vecteur, et toute combinaison linéaire de vecteurs en un vecteur. Le produit scalaire de deux vecteurs associé à ces deux vecteurs un nombre complexe qui dépend linéairement de chacun des deux vecteurs. Ce produit scalaire généralise les produits scalaires que nous avons rencontrés dans l'espace ordinaire et l'espace-temps de Minkowski. Dans l'espace de Hilbert, le produit scalaire se définit à l'aide de l'intégrale du produit des deux fonctions qui représentent les deux vecteurs.

Comme les concepts quantiques sont adaptés à la description des phénomènes, le formalisme de la théorie quantique s'intéresse d'une part aux *états* du système physique et d'autre part aux grandeurs physiques *observables* relativement à ce système. Les états sont associés aux vecteurs d'un espace de Hilbert, et les observables aux opérateurs qui agissent dans cet espace. Cette double association répond à tous les problèmes que nous avons évoqués plus haut : les amplitudes d'état sont les vecteurs de l'espace de Hilbert, la linéarité de l'espace de Hilbert assure l'additivité des amplitudes d'état ; l'amplitude de transition entre deux états est associée au produit scalaire des deux vecteurs qui les représentent ; l'association d'un opérateur à une observable permet de prendre en compte l'effet sur le système de l'acte de mesure :

### **Mesure d'observable**

Mesurer une observable relativement à un système dans un état donné modifie, en général, l'état du système de la même façon qu'un opérateur transforme un vecteur en un autre vecteur. C'est pourquoi tout état du système ne permet pas nécessairement la mesure de toute observable. Mais une notion essentielle des espaces de Hilbert nous permet de définir les états permettant la mesure des observables. Un vecteur de l'espace de Hilbert est dit vecteur propre\* d'un opérateur si l'action de cet opérateur sur ce vecteur consiste à le multiplier par un nombre appelé valeur propre.

Vecteurs propres et valeurs propres sont très utiles si on veut associer vecteurs et états, opérateurs et observables : puisque, à une constante multiplicative près, un vecteur propre est laissé invariant par l'action de l'opérateur, l'état physique associé à ce vecteur permet la mesure de l'observable associée à l'opérateur dont le vecteur est vecteur propre. Quant à la valeur propre, on pourra l'associer à la valeur de l'observable mesurée dans l'état. Comme la valeur d'une grandeur physique mesurable est un nombre réel, les opérateurs associés aux observables doivent avoir des valeurs propres réelles ; les opérateurs qui ont cette propriété sont dits hermitiques\*.

### **Opérateurs Hermitiques**

[Rappelons qu'un opérateur **Hermitique** est égal à son adjoint ( $A = A^+$ ), l'opérateur adjoint étant le transposé du conjugué ( $f$  et  $g$  étant des fonctions) .

$$\int f.A^+.g .d\tau = \int g.A^*.f .d\tau , \quad A^* \text{ étant l'opérateur complexe conjugué de } A.$$

Si  $A$  est Hermitique, cela implique entre autre que  $\int g^*.(Ag) d\tau = [\int g^*(Ag) d\tau ]^*$

Si  $A$  est Hermitique et linéaire , l'intégrale  $\int g^*.(Ag) d\tau$  est alors réelle.

Ce qui est nécessaire car cette équation représente des grandeurs physiques réelles

Par exemple l'opérateur  $A = \partial^2/\partial x$  est Hermitique,  $\partial/\partial x$  ne l'est pas mais  $i\partial/\partial x$  l'est.



Fait important en mécanique quantique, le Hamiltonien est un opérateur Hermitique. Pour terminer sur ce point signalons que si  $A$  et  $B$  sont des opérateurs Hermitiques, leurs produits  $AB$  et  $BA$  en général ne le sont pas mais que  $(AB + BA)/2$  l'est. Le produit n'est pas nécessairement commutatif. Si  $AB = BA$ , **les opérateurs commutent**, mais si  $AB \neq BA$  **les opérateurs ne commutent pas.**]

### ***Opérateur Hamiltonien***

L'opérateur le plus important de la théorie quantique est l'opérateur hermitique associé à l'énergie totale du système, le **hamiltonien\***. L'ensemble des valeurs propres du hamiltonien est appelé spectre du système. Pour un système atomique, le spectre comporte une suite discrète de valeurs propres, correspondant aux niveaux d'énergie de l'atome (niveau fondamental et niveaux excités), et un continuum correspondant à l'ionisation par arrachement d'électron.

### ***Complémentarité et relations de commutation***

En théorie classique, les observables (les quantités physiques à mesurer) ne sont pas associées à des opérateurs mais à de simples nombres. Le produit de deux nombres est commutatif:

$$ab = ba$$

par contre, le produit de deux opérateurs n'est pas nécessairement commutatif. On dit que deux opérateurs  $A$  et  $B$  commutent si leur commutateur\* noté  $[A,B]=AB-BA$  est nul.

Si deux opérateurs commutent, les vecteurs propres de l'un sont vecteurs propres de l'autre.

Puisque des opérateurs qui commutent partagent leurs vecteurs propres, on peut dire que les **observables qu'ils représentent sont compatibles : on peut mesurer ces observables dans le même état.**

En revanche., on voit clairement qu'une caractéristique de l'incompatibilité entre des observables est **la non-commutation des opérateurs** qui les représentent.

Supposons que deux observables soient quantiquement incompatibles, comme par exemple la position et l'impulsion d'une particule que nous notons  $q$  et  $p$ , les opérateurs qui les représentent  $Q$  et  $P$  ne commutent pas. Un vecteur propre de  $Q$  par exemple représente un état dans lequel la position peut être mesurée. Mais ce vecteur propre n'est pas vecteur propre de  $P$ . L'action de  $P$  sur ce vecteur le transforme en un vecteur qui n'a rien de commun avec lui. Cela signifie qu'on ne peut pas mesurer l'impulsion dans un état où la position peut être mesurée, et vice versa. C'est l'expression rigoureuse de l'inégalité de Heisenberg que nous avons mentionnée au chapitre précédent.

La commutation (et surtout la non-commutation) des observables est l'une des propriétés les plus spécifiques de la théorie quantique. C'est elle qui permet de donner un sens précis à l'idée de la complémentarité.

Une représentation est définie par un ensemble\* complet d'observables qui commutent. Les vecteurs propres communs à toutes ces observables définissent une base\* de l'espace de Hilbert. Si l'ensemble d'observables qui commutent est bien complet, la base de l'espace de Hilbert est aussi complète. Cela signifie que tout vecteur de l'espace de Hilbert, c'est-à-dire l'amplitude d'état de tout état possible du système, peut être obtenu par combinaison linéaire des vecteurs de base. Autrement dit, une représentation est déterminée par un ensemble complet

d'observables compatibles, fournissant toute l'information qu'il est possible de recueillir sur un système quantique.

Ce qui est nouveau par rapport à la théorie classique, c'est qu'il peut exister une deuxième représentation, c'est-à-dire un deuxième ensemble complet d'observables qui commutent, mais qui ne commutent pas avec celles de la première représentation. On dit alors que les deux représentations sont *complémentaires*.

L'espace de Hilbert et la complémentarité représentent une généralisation de la conception de l'espace, de la conception de la covariance et de la conception de l'objectivité face aux contradictions de l'élémentarité. Si on considère l'espace comme un *espace d'objectivité*, permettant d'appréhender les propriétés intrinsèques, indépendantes de la réalité, l'existence du quantum d'action rend insuffisant l'espace ordinaire de la physique classique pour penser la nouvelle objectivité quantique. C'est l'espace de Hilbert qui est l'espace de l'objectivité quantique. Quant à la complémentarité, elle généralise, dans cet espace, le concept de covariance qui fonctionnait dans l'espace ordinaire, les ensembles complets d'observables qui commutent jouant le rôle de référentiels.

## B.3 Champs quantiques Relativistes

Une application importante de la théorie des champs scalaires est dans la physique du solide. Il ressort clairement ( c'est le cas de le dire) de la dérivation de la théorie classique des champs scalaires classiques décrite au § B.2, que ceci décrit les vibrations d'un cristal, qui sont des ondes acoustiques. Si nous remplaçons la vitesse de la lumière par la vitesse du son, nous pouvons utiliser la théorie quantique des champs scalaires que nous allons développer ci après pour décrire les vibrations quantifiées appelées phonons.

### B.3.1 Le Champ de Klein Gordon

Quand nous quantifions une particule ponctuelle en mécanique quantique, nous traitons les coordonnées généralisées  $q$  (les coordonnées cartésiennes  $x_i$  dans le cas le plus simple ) et les moment cinétiques  $p_i$  comme des opérateurs. Ils satisfont les relations de commutation de la mécanique quantique.

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{B.34}$$

Et la fonction d'onde  $\psi$  est la représentation du vecteur d'état sur lequel, ces opérateurs agissent.

L'équation de Klein Gordon étant une équation d'onde, elle doit avoir des solutions de type ondes planes. Nous pouvons imaginer notre système inclus dans une grande boîte de volume  $V$ , et nous imposons des conditions aux limites de la boîte habituelles telles que cela corresponde à un nombre entier de périodes ( nous ferons éventuellement tendre la limite  $V \rightarrow \infty$ , bien sur). Développons le champ scalaire réel  $\phi$  à un instant donné en termes d'ondes planes.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} [a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] \quad (\text{B.35})$$

Où nous avons introduit  $1/\sqrt{2V\omega}$  pour normaliser correctement, et où l'insertion dans l'équation de Klein Gordon montre que  $\omega = \omega(\mathbf{k}) = (\mu^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$  qui décrit l'énergie d'une particule relativiste de masse  $\mu$  et d'impulsion  $\mathbf{k}$ .

Nous pouvons alors écrire les facteurs dans les exponentielles  $kx = k_{\mu} x^{\mu}$  avec  $k_0 = \omega$ .

Comme le champ de  $K-G$  est écrit sous forme de somme de composantes indépendantes qui satisfont une équation d'onde, qui ont un mouvement harmonique, il est naturel de quantifier chaque mode de la même manière que nous le faisons habituellement pour un oscillateur harmonique. En insérant (B.35) dans (B.33) pour la densité de Hamiltonien et en réalisant l'intégration sur tout le volume  $V$ , nous obtenons:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \quad (\text{B.36})$$

où nous avons temporairement réintroduit un facteur  $\hbar$  pour montrer la similitude avec l'expression de l'énergie d'un oscillateur harmonique quantique. En fait si nous interprétons  $a_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}^* \rightarrow a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  comme le fait d'élever ou d'abaisser des opérateurs, remplissant les relations de commutation.

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (\text{B.37})$$

alors  $\varphi$  et  $\pi$  vont satisfaire les relations de commutation (B.34). Si on recalcule le Hamiltonien en utilisant (B.37) on trouve

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega(\mathbf{k}) \left( a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.38})$$

[voir à cet effet la démonstration de l'énergie d'un oscillateur harmonique linéaire à une dimension, par la méthode polynomiale (Sommerfeld): A partir du Hamiltonien correspondant à l'oscillateur harmonique, on commence par chercher les solutions asymptotiques à l'infini (ondes planes), puis on cherche une fonction d'onde  $\psi(x)$  égale au produit de la solution asymptotique par une fonction  $f(x)$ . On développe  $f(x)$  en puissances de  $x$  et avec un peu de calcul on obtient une relation de récurrence entre les coefficients. Pour que cela reste borné, on est amené à imposer des contraintes ( $\lambda = 2n + 1$ ) sur un des paramètres du problème  $\lambda = \varepsilon / \alpha$  avec  $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$  et  $\alpha^2 = (m\omega_0/\hbar)^2$ , ce qui impose  $E = (n + 1/2)\hbar\nu_0$ , où on voit apparaître une énergie minimum pour  $n = 0$ . De cela on peut calculer la fonction d'onde complète ( polynômes d'Hermite ...)...cf cours " notions de mécanique quantique INSA 4° année"]

D'habitude, on ignore la contribution constante issue de la somme des modes zéro (les termes en  $h\omega/2$ ). Il y a des cas où par contre, on devra en tenir compte comme nous le verrons plus loin.

Maintenant nous pouvons utiliser toute la machinerie que nous avons apprise en étudiant l'oscillateur harmonique dans le contexte de la mécanique quantique non relativiste. Nous définissons l'état de base, comme celui annihilé par tous les  $a_k$ : c'est à dire

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad (\text{B.39})$$

pour tout  $\mathbf{k}$ . Un état normalisé avec  $n_k$  excitations dans le mode  $\mathbf{k}$  est donné par

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{[a_{\mathbf{k}}]^{n_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}}|0\rangle \quad (\text{B.40})$$

Comme  $H$  est une somme d'oscillateurs harmoniques indépendants, les valeurs propres sont les produits directs.

$$|\dots n_{\mathbf{k}_1}, \dots n_{\mathbf{k}_j}, \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i} |n_{\mathbf{k}_i}\rangle \quad (\text{B.41})$$

L'énorme espace de Hilbert défini par toutes ces bases s'appelle un espace de Fock.

### ***Compléments sur l'espace de Fock***

[ La quantification du champ électromagnétique est, bien évidemment, un problème de la relativité quantique, puisque les photons se meuvent à la vitesse de la lumière. L'idée essentielle est de traiter comme un opérateur quantique le *quadrivecteur potentiel du champ* électromagnétique. La complémentarité s'applique au champ électromagnétique quantifié : la description en termes de particules (photons) correspond à *la représentation en impulsions*, la description ondulatoire (donnée du champ électrique et du champ magnétique en tout point d'espace-temps) correspond à *la représentation en positions*.

La principale nouveauté par rapport au cas non relativiste (que l'on appelle la première quantification) tient au fait qu'on ne peut plus se contenter de l'espace de Hilbert des états à une particule ou à un nombre fini de particules. Pour décrire les états d'un champ électromagnétique, dans la représentation en impulsions, on a recours à un espace plus vaste que l'espace de Hilbert, l'espace de Fock, qui est une superposition infinie d'espaces de Hilbert, comprenant d'abord le vide, espace à zéro photon, puis l'espace à un photon, puis l'espace à deux photons, etc.

Dans cet espace de Fock, le champ électromagnétique est représenté par des opérateurs dits de création\* et d'annihilation\* de photon : l'opérateur  $a_{\mathbf{k}}^+$  crée un photon d'impulsion  $\mathbf{k}$ , et l'opérateur  $a_{\mathbf{k}}$  annihile un photon d'impulsion  $\mathbf{k}$ . L'opérateur de création fait passer de l'espace de Hilbert à  $n$  photons à celui à  $n + 1$  photons ; et l'opérateur d'annihilation fait, à l'inverse, passer de l'espace de Hilbert à  $n$  photons à celui à  $n - 1$  photons (sur le vide, l'action d'un opérateur d'annihilation donne zéro). On peut définir un *opérateur nombre de photons*. Tout état à  $n$  photons est représenté par un vecteur propre de l'opérateur nombre de photons avec la valeur propre  $n$ .

La dualité onde-corpuscule, étendue par de Broglie aux ondes de matière, conduit aussi au concept proprement quantique de *champ de matière*. Un champ quantique de matière est un ensemble d'opérateurs, de création et d'annihilation de fermions. Le concept d'espace de Fock

peut être étendu aux fermions et aussi aux systèmes mixtes, comportant des fermions et des bosons.

En fait, le formalisme de l'espace de Fock que nous avons introduit à propos de la relativité quantique s'est révélé d'une très grande utilité pour décrire les systèmes quantiques statistiques (à grand nombre de particules), même en dehors des effets relativistes. (C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on parle, à propos des particules indiscernables, des *statistiques* de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac.) L'espace de Fock permet en effet de décrire statistiquement un système quantique à grand nombre de particules en l'absence d'interaction. En théorie statistique, il est très important qu'en l'absence d'interaction il n'y ait pas de corrélations. Or, les effets quantiques induisent des corrélations même en l'absence d'interaction - les propriétés de symétrie ou d'antisymétrie par permutation de particules identiques impliquent l'existence de telles corrélations. Avec le formalisme de l'espace de Fock, on met l'accent, non plus sur les particules qui sont dans tel ou tel état, mais sur les états qui sont occupés ou pas par des particules. L'espace de Fock est un ensemble multiplement infini d'états, chaque état étant caractérisé par un nombre\* d'occupation. Si les particules sont des bosons, le nombre d'occupation est un entier arbitraire positif ou nul, si les particules sont des fermions, le nombre d'occupation vaut zéro ou un (à cause du principe d'exclusion de Pauli). Si on a un système sans interaction, les états peuvent être remplis ou vidés des particules qui les occupent, indépendamment les uns des autres : dans l'espace de Fock, ainsi conçu, il n'y a pas de corrélation quantique en l'absence d'interaction.

Alors que l'espace de Hilbert constitue la généralisation quantique de l'espace de la mécanique classique, on peut avancer l'idée que l'espace de Fock est la généralisation quantique de l'espace temps de la relativité. Les dimensions spatiales sont représentées par la complémentarité qui fonctionne dans chacun des espaces d Hilbert, tandis que la dimension temporelle serait liée au nombre de particules. ]

### ***Opérateurs de création et d'annihilation***

Pour donner une interprétation physique des états (B.41), nous notons

$$H|\dots n_{\mathbf{k}_1}, \dots n_{\mathbf{k}_j}, \dots\rangle = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) |\dots n_{\mathbf{k}_1}, \dots n_{\mathbf{k}_j}, \dots\rangle \quad (\text{B.42})$$

où  $\varepsilon(k) = \hbar\omega(k)$ . Alors nous pouvons interpréter (B.41) comme un état à de multiple particules, chacune de masse  $m$ , où  $n_{\mathbf{k}_1}$ , représente le nombre de celles d'impulsion  $\mathbf{k}_1$ ,  $n_{\mathbf{k}_2}$ , celles d'impulsion  $\mathbf{k}_2$ , etc. C'est pourquoi les opérateurs d'élévation et d'abaissement,  $a^+_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}$ , sont habituellement appelés opérateurs de création et d'annihilation:  $a^+_{\mathbf{k}}$  agissant sur l'état du vide crée une particule avec un vecteur d'onde  $k$ . Avec ce formalisme nous sommes capables de traiter des processus où des particules d'impulsion donnée sont créées ou détruites: des processus de collision par exemple.

### **B.3.2 Champ électromagnétique.**

La méthode utilisée pour quantifier un champ scalaire est très générale. Nous pouvons l'utiliser, pratiquement en l'état pour quantifier le champ électromagnétique  $A^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ . Nous avons vu en (2.80) comment nous pouvons décrire le champ de potentiel quadrivectoriel classique dans la jauge de rayonnement  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0, A^0 = 0$ . Il ne contient que deux degrés de liberté pour un quadrivecteur impulsion donné  $k^\mu$ . Nous avons introduit les vecteurs de polarisation  $\boldsymbol{\varepsilon}^\mu_{1,2}$

orthogonaux entre eux et à la direction de propagation  $\mathbf{k}$ . Le développement en série de Fourier de  $A^\mu$ , peut alors être écrit

$$A^\mu(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} [\epsilon_i^\mu a_{i,\mathbf{k}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \epsilon_i^{\mu*} a_{i,\mathbf{k}}^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] \quad (\text{B.43})$$

Considérons les coefficients de Fourier comme les opérateurs d'annihilation et de création satisfaisant:

$$[a_{i\mathbf{k}}, a_{j\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{ij} \quad (\text{B.44})$$

L'interprétation physique est alors que  $a_{i\mathbf{k}}^\dagger$  crée un photon de vecteur de polarisation  $\epsilon_i^\mu$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Alors l'état de Fock peut être construit de la même manière que pour le champ scalaire.

### B.3.3 Champ scalaire chargé

Il apparaît que nous ne pouvons pas décrire des particules chargées avec un champ scalaire réel. Pour ce faire, nous devons utiliser un champ scalaire complexe. Les calculs sont très similaires cependant. Une densité de Lagrangien qui convient est donnée par:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 |\varphi|^2] \quad (\text{B.45})$$

Si on traite  $\varphi$  et  $\varphi^*$  comme des champs indépendants, les équations de Euler Lagrange deviennent

$$(\square + \mu^2) \varphi(x) = 0 \quad (\text{B.46})$$

( $x$  dénote  $x^\mu$ ) et

$$(\square + \mu^2) \varphi^*(x) = 0 \quad (\text{B.47})$$

Le développement en série de Fourier décrit maintenant un champ non hermitien, et prend la forme:

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}] \quad (\text{B.48})$$

Et des relations de commutation canoniques des champs classiques  $\varphi$  et  $\varphi^*$  on déduit

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\text{B.49})$$

Il apparaît alors que nous avons deux types de "particules" de même masse  $\mu$ , créées par  $a^+$  et  $b^+$ , respectivement. Quand nous couplons l'électromagnétisme à ce champ scalaire complexe, on peut voir que les a-particules et les b-particules ont des signes opposés pour la charge électrique. Ce formalisme inclut donc ( et en fait prédit ) l'existence d'antiparticules.

Le couplage à l'électromagnétisme est réalisé le plus simplement en utilisant la contrainte de couplage minimum  $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$ , où conformément à la mécanique quantique  $p^\mu \rightarrow i\partial_\mu$

[ On retrouve quelque chose qui rappelle la transformation opérée quand nous avons introduit le champ de jauge électromagnétique. Pas étonnant puisqu'on parle du champ électromagnétique associé au couplage de particules chargées, cf document joint en annexe 1].

En Insérant ceci dans (B.45) et utilisant les développements en termes d'opérateurs de création et d'annihilation pour  $\phi$  et  $A^\mu$ , nous trouvons des termes d'interaction de différents types. Quand on les intègre sur l'espace temps certains disparaissent ( dû à la conservation de l'énergie et de l'impulsion), mais nous obtenons, par exemple, un terme qui peut détruire un photon, et créer un boson scalaire positif ou négatif ou vice versa. Ces termes comportent un facteur  $e$ . Des termes en carré de  $A^\mu$  vient une contribution qui correspond à un couplage entre deux photons ou deux bosons  $\phi$  en un point (un terme appelé "mouette" ou de contact). Il est proportionnel à  $e^2$ . Ces termes de couplage fondamentaux sont la base pour déterminer les règles de Feynman de la théorie. Pour l'électrodynamique quantique scalaire ( QED scalaire), nous avons les diagrammes décrits par la Fig. B.3.

De plus les propagateurs que nous avons rencontrés au § 6.10 sont donnés par les inverses (dans l'espace de Fourier ) des formes quadratiques des champs. Elles sont donc les fonctions de Green pour la théorie. Par exemple l'équation de Klein Gordon :

$$\left(\square + m^2\right) \varphi(x) = i\delta^4(x) \tag{B.50}$$

peut être inversée trivialement, car la transformée de Fourier de la fonction  $\delta$  est l'unité. Alors

$$P(k) = \frac{-i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{B.51}$$

Ici, la partie imaginaire est ajoutée pour définir comment traiter le propagateur " dans sa couche de masse" c.a.d quand la condition " dans la couche de masse"  $k^2 = m^2$  est satisfaite. Il apparaît qu'ajouter une petite partie imaginaire permet d'arriver à un état correspondant à une particule libre d'énergie positive. Comme nous savons que le champ du photon dans la jauge de rayonnement ( ou de Feynman) obéit à une simple équation d'onde  $A^\mu = 0$  (2.79), il correspond au propagateur

$$P^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \tag{B.52}$$



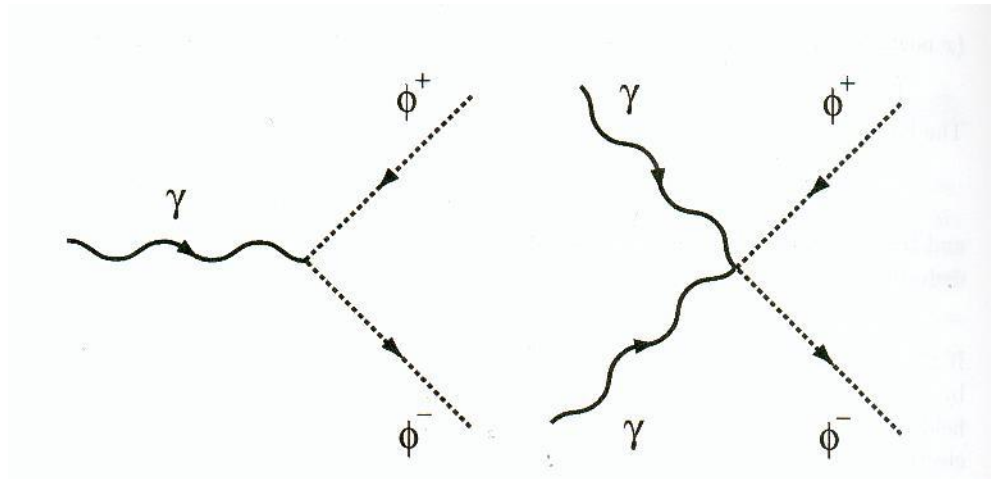


Figure B.3: Diagramme de Feynman pour l'interaction entre photons et un champ chargé scalaire ( QED scalaire). Le diagramme sur la gauche est proportionnel à  $e$ , et celui sur la droite est proportionnel à  $e^2$ .

## B.4 Résumé

L'équation d' Euler Lagrange pour un champ  $\phi$  s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

Pour un champ scalaire la densité de Lagrangien la plus simple invariante relativistement est:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^2].$$

L'équation du mouvement qui en découle est l'équation de Klein Gordon

$$(\square + \mu^2)\phi = 0$$

Une équation d'onde relativiste pour un champ scalaire ( sans spin) de masse  $\mu$ .

La quantification est plus simple sur un développement en série de Fourier, où chaque mode avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  contribue indépendamment au Hamiltonien:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega(\mathbf{k}) (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2})$$

Un champ scalaire électrique chargé est efficacement décrit par un champ complexe  $\phi$  avec la densité de Lagrangien



$$\mathcal{L} = \left[ (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 |\varphi|^2 \right]$$

L'interprétation physique nécessite deux types de particules, chacune de masse  $\mu$ . L'émergence de telles antiparticules est une caractéristique générique de la théorie quantique relativiste des champs.



## Annexe C: Equation de Dirac

### Un peu de phénoménologie ( Cosmology & Particles Astrophysics )

Dans l'Univers aujourd'hui seules subsistent, en tant que reliques du Big bang, les particules stables ou à durée de vie très longues. Pourtant au tout début toutes les particules ont participé activement à l'évolution cosmique. L'objet de ce qui suit est de nous familiariser avec les fondamentaux des théories modernes des particules. Remarquons que les constituants de la matière connus aujourd'hui ont toutes un spin de 1/2 ( en unités  $\hbar$  ) à la différence des médiateurs d'interaction comme par exemple, le photon qui a un spin de 1 et l'hypothétique graviton un spin de 2. Il est donc du plus haut intérêt d'étudier l'équation relativiste qui décrit les particules de spin 1/2.

P.A.M Dirac ( 1902-1984) est un des fondateurs de la théorie moderne quantique des champs. Ses œuvres sont des classiques et sa contribution essentielle est son équation relativiste pour les particules de spin 1/2.

Il est amusant de constater que cette équation, établie, en partie pour de mauvaises raisons, tient toujours la route aujourd'hui. Cette équation a été considérée historiquement comme un avatar de l'équation de Schrödinger d'une particule unique, avant d'être reconnue comme l'équation du mouvement du champ quantique relativiste similaire au champ scalaire que nous avons déjà traité.

Il est curieux de constater que pour des particules de spin 1/2 qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli, on peut obtenir une **équation valide pour une particule unique** (comment le principe d'exclusion qui se réfère au fait que plusieurs particules ne peuvent pas être dans le même état, peut il s'appliquer si on ne considère qu'une particule?), en supposant que tous les états d'énergie négative ( ce qui posait problème pour le champ scalaire) sont occupés ( formant la "mer de Dirac").

Le principe d'exclusion de Pauli va alors interdire aux particules d'énergie positives les transitions les conduisant vers les énergies négatives de la "mer de Dirac".

Pour beaucoup d'applications, il n'est pas nécessaire de sortir le grand jeu de la théorie quantique des champs. Nous allons traiter les particules de Dirac comme nous avons traité le champ classique de rayonnement en mécanique quantique élémentaire ( en utilisant simplement le champ potentiel vectoriel et non pas son opérateur de champ associé). Nous présenterons quelques exemples astrophysiques et vers la fin de cette annexe nous nous intéresserons à la quantification du champ de Dirac . Vous aurez alors toutes les bases pour aborder un cours approfondi de théorie quantique des champs.

#### ***Problème avec l'équation de Klein Gordon qui a conduit Dirac à établir sa propre équation***

Cette équation pose quelques problèmes ( dérivée seconde par rapport au temps, intégrale du carré de la fonction d'onde sur tout l'espace dépend du temps).

Le problème qui a chagriné Dirac à l'époque est le suivant: Avec l'équation de Schrödinger<sup>2</sup>

$$-\frac{\hbar^2 \cdot \nabla^2 \psi (r,t)}{2m} = [i \cdot \hbar \frac{\partial \psi (r,t)}{\partial t}] \quad (C.2)$$

2 L'équation de Schrödinger pour une particule libre ( $V(r)=0$ ) s'appuie sur l'expression non relativiste de l'énergie cinétique,  $E_{kin} = p^2/2m$  qui insérée dans l'équation d'énergie  $H = E_{kin}$  donne l'équation C.2 en substituant aux grandeurs physiques les opérateurs associés:  $H \rightarrow i\hbar \partial/\partial t$  et  $p \rightarrow i\hbar \cdot \nabla$ .

on pouvait définir un courant conservé " le courant de probabilité". L'équation de continuité pour ce courant était facile à établir en multipliant à gauche (C.2) par  $\psi^*$ , et à droite l'équation conjuguée par  $\psi$  et en soustrayant:

$$\partial\rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (C.3)$$

où le courant de probabilité est

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = (-i\hbar/2m)(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (C.4)$$

et la densité de probabilité

$$\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2 \quad (C.5)$$

Donc si nous avons au départ une particule décrite par une fonction d'onde normalisée à l'unité, elle restera normalisée tout au long de son évolution temporelle.

Maintenant si nous regardons ce qui se passe avec l'équation relativiste de Klein Gordon ( B.30)

$$\left(-\hbar^2\nabla^2 + m^2c^2\right)\varphi = -\hbar^2\frac{\partial^2\varphi}{c^2\partial t^2} \quad (C.6)$$

Alors

$$\left(\square + \mu^2\right)\varphi = 0 \quad (C.7)$$

Avec  $\mu = mc/\hbar$ . Si nous posons  $c = \hbar = 1$  alors  $\mu = m$ . Multiplions à gauche (C.7) par  $\varphi^*$ , le conjugué complexe de (C.7) et à droite par  $\varphi$ , et soustrayons, nous trouvons:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (C.8)$$

avec

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{-i}{2m}(\varphi^*\nabla\varphi - \varphi\nabla\varphi^*) \quad (C.9)$$

et

$$\rho(\mathbf{r},t) = i\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right) \quad (C.10)$$

Bien que (C.8) ressemble à une équation de continuité, il n'est pas possible d'interpréter  $\rho$  dans (C.10) comme une densité de probabilité car elle n'est pas définie positive. Par exemple une onde plane dépendant du temps en  $e^{iEt}$  génère une valeur négative de  $\rho$ , alors que la dépendance selon  $e^{-iEt}$  n'aura pas ce problème. La solution, comme nous l'avons vu en annexe B.3, consiste à interpréter  $\varphi$  comme un champ quantique dont les excitations peuvent être un nombre arbitraire de particules. Comme le nombre de particules change, il n'y a pas de raison d'avoir une équation pour une seule particule. Aussi le hamiltonien du champ quantique ( B.38) est en fait défini positif.

Mais cela Dirac ne le savait pas, ce qui fait qu'il essaya une autre solution.

Le problème des énergies négatives vient de la dérivée seconde par rapport au temps ( C.7)

Dans l'équation de Schrödinger, nous avons des dérivées secondes par rapport à l'espace , mais première par rapport au temps.

Pouvons nous trouver une équation du premier ordre ?

On a pensé longtemps que c'était impossible , car la théorie de la Relativité exige qu'on traite le temps et l'espace sur le même pied, et une équation linéaire en dérivée d'espace n'est pas, par exemple invariante par des rotations d'espace contrairement à l'équation de Schrödinger.

Le point crucial de la méthode de Dirac fut d'introduire une fonction d'onde à plusieurs composantes et d'établir un système d'équations différentielles du premier ordre concernant à la fois le temps et l'espace.

Rappelons la forme de l'équation

$$H\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi + \beta m \psi \quad (C.11)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des matrices constantes N x N à déterminer et  $\psi$  est un vecteur colonne de N composantes ( nous n'écrivons explicitement pas la matrice unitaire comme d'habitude).

L'idée est que chacune des composantes de  $\psi$  doit satisfaire l'équation de Klein Gordon ( $\square + m^2$ ) $\psi = 0$ .

En multipliant (C11) par  $i \partial/\partial t$ , et en utilisant l'équation elle même pour remplacer la dérivée temporelle de  $\psi$  dans le membre de droite nous obtenons:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -M_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - i N_j m \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + m^2 \beta^2 \psi \quad (C.12)$$

( Rappelons que nous avons utilisé la convention de sommation), où

$$M_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} \quad (C.13)$$

et

$$N_i = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i \quad (C.14)$$

Nous voyons que (C12) devient l'équation diagonale de Klein Gordon seulement si:

$$M_{ij} = \delta_{ij} \quad (C.15)$$

et

$$N_i = 0 \quad (C.16)$$

Alors en introduisant l'anti-commutateur {,}

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (\text{C.17})$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{C.18})$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (\text{C.19})$$

Nous devons, de plus avoir:

$$\beta^2 = I \quad (\text{C.20})$$

de (C.18) il découle également

$$\alpha_i^2 = I \quad (\text{C.21})$$

pour tous les  $i$

Bien sur nous devons montrer qu'il existe des matrices remplissant ces conditions. Nous devons aussi montrer que (C.12) est invariant de Lorentz, c'est à dire qu'il a la même forme dans tous les référentiels inertiels.

Certaines propriétés de ces matrices sont faciles à trouver. Comme leur carré est la matrice unité, les valeurs propres doivent être  $\pm 1$ .

De (C.19) nous voyons que  $\alpha_i = \beta\alpha_i\beta$ .

Si on prend la trace de cette équation et en utilisant  $Tr(AB) = Tr(BA)$ , on voit que la trace de  $\alpha_i$  doit être nulle ( $\alpha^2 = \beta^2 = I$ ).

De même  $Tr(\beta) = 0$ . Comme la trace est la somme des valeurs propres qui sont +1 ou -1, nous voyons que nous devons avoir un nombre pair de dimensions. Les matrices de Pauli  $\sigma_i$  font presque l'affaire. Comme:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{C.22})$$

Elles peuvent servir pour représenter  $\alpha$ .

Cependant, les matrices de Pauli couvrent l'espace 2x2 avec la matrice unité  $\sigma_0 = I$ .

Les matrices unité ne peuvent pas servir pour représenter  $\beta$ , car elles commutent avec toutes en contradiction avec (C.19). Nous devons donc considérer des matrices 4x4.

Par essai erreur, Dirac a trouvé une solution qui utilise les matrices de Pauli 2x2 comme parties (blocs) dans les matrices 4x4.

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

et

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

La fonction d'onde de Dirac  $\psi$  peut être considérée comme un vecteur colonne constitué de 4 composantes  $\psi_\sigma$ ,  $\sigma = 1, 2, 3, 4$ .

Comme d'habitude, nous définissons la fonction d'onde conjuguée Hermitique  $\psi^\dagger \psi$  comme un vecteur ligne de composantes  $(\psi^*_1, \psi^*_2, \psi^*_3, \psi^*_4)$ .

Vérifions que nous pouvons former une probabilité définie positive à partir de  $\psi^\dagger \psi$ . Nous multiplions (C.11) à gauche par  $\psi^\dagger$  et le conjugué Hermitique de l'équation à droite par  $\psi$ , nous soustrayons les équations obtenues.

Ceci donne (en tenant compte que les matrices  $\alpha_i$  et  $\beta$  sont Hermitiques):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{C.25})$$

où  $\rho$  est en fait la valeur  $\psi^\dagger \psi$  définie positive et :

$$\mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi \quad (\text{C.26})$$

Où nous avons assemblé les matrices "composantes"  $\alpha_i$  en un "vecteur de matrices"  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Pour montrer l'invariance de Lorentz, il faut multiplier (C.11) à gauche par  $\beta$ , et réarranger les termes pour obtenir:

$$i \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi - m\psi = 0 \quad (\text{C.27})$$

Ici nous avons introduit la notation très pratique  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\gamma}^i = \boldsymbol{\beta} \alpha_i$ .

Ceci nous permet les relations d'anti-commutation dans la forme suggestive:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{C.28})$$

Soit en termes de blocs de matrices

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

et

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.30})$$

L'équation de Dirac (C.27) peut maintenant être écrite dans une forme où son invariance de Lorentz est manifeste:

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad (\text{C.31})$$

Où le symbole "Barré" va être utilisé pour désigner une contraction arbitraire du quadri-vecteur avec l'ensemble des matrices  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\not{A} = \boldsymbol{\gamma}^\mu A_\mu$

(Nota: comme je n'ai pas trouvé comment barrer en biais, j'ai barré horizontalement)

### C.3 Solutions d'ondes planes

Considérons les solutions à l'équation libre de Dirac ( C.31) qui décrivent des ondes planes d'énergie positive et de moment  $p$ , alors:

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2EV}} u(p) e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (\text{C.32})$$

où  $u(\mathbf{p})$  est un quadri vecteur colonne. En insérant dans (C.31), nous trouvons l'équation de Dirac dans l'espace des Impulsions pour  $u(\mathbf{p})$  :

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad (\text{C.33})$$

En particulier, nous pouvons chercher des solutions au repos,  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . Alors seul le terme  $\not{p} \partial / \partial t$  contribue et nous trouvons, avec la représentation ( C.30) pour la matrice  $\not{p}$ :

$$-2m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u(0) = 0 \quad (\text{C.34})$$

Ce qui montre que nous ne pouvons prendre comme état de base que

$$u^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.35})$$

et

$$u^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.36})$$

Les deux composantes du bas doivent être nulles pour satisfaire ( C.34), mais ceci nous laisse avec le problème que nous n'avons une base que pour un sous espace à deux dimensions couverts par les deux composantes supérieures.

De nouveau, les états à énergie négative sont appelées à la rescousse. Si nous essayons la solution ondes planes correspondant aux énergies négatives (ce qui transforme  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ )

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2EV}} v(-p) e^{+i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (\text{C.37})$$

Alors l'équation de Dirac au repos devient:



$$2m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v(0) = 0 \quad (\text{C.38})$$

Qui a les solutions

$$v^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

et

$$v^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.40})$$

( Nous verrons plus tard que les solutions à énergie négative sont en relation avec les antiparticules ). Alors nous pouvons développer un **quadri-spineur** quelconque de Dirac ( à quatre composantes ) comme:

$$\psi(t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + e^{+iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{C.41})$$

avec  $\varphi$  et  $\chi$  étant des **bi-spineurs** ( à deux composantes ).

Vérifions ce qui arrive si  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ . Alors nous pouvons toujours écrire

$$u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{C.42})$$

où  $\varphi$  et  $\chi$  dépendent maintenant de  $\mathbf{p}$ . L'équation de Dirac a été construite pour donner  $E = \pm p^0$  où  $p^0$  a une valeur positive  $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Si nous considérons les solutions à énergie positives, en insérant (C.42) dans (C.33) on voit que cela implique:

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \varphi \quad (\text{C.43})$$

En conséquence

$$u(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{C.44})$$

Où N est une constante de normalisation. De même, les solutions à énergie négatives  $\mathbf{v}(-\mathbf{p})$  sont données par:

$$v(-\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{C.45})$$

Pour ces **spineurs** l'équation de Dirac devient:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad (\text{C.46})$$

et

$$(\not{p} + m) v(-p) = 0 \quad (\text{C.47})$$

respectivement.

Définissons le spineur de Dirac  $\bar{\psi}$  conjugué par:

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (\text{C.48})$$

donc

$$\bar{u}(p) \equiv u(p)^\dagger \gamma^0 \quad (\text{C.49})$$

et

$$\bar{v}(-p) \equiv v(-p)^\dagger \gamma^0 \quad (\text{C.50})$$

En utilisant l'identité

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \quad (\text{C.51})$$

qui peut être facilement vérifiée, nous obtenons les équations suivantes pour les spineurs conjugués  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$

$$\bar{u}(p) (\not{p} - m) = 0 \quad (\text{C.52})$$

et

$$\bar{v}(-p) (\not{p} + m) = 0 \quad (\text{C.53})$$

En multipliant (C.46) à gauche par  $\bar{u} \cdot \gamma^\mu$ , (C.52) à droite par  $\gamma^\mu \cdot u$ , en additionnant ces équations et en utilisant la relation d'anti-commutation :

$$\{\gamma^\nu, \not{p}\} = 2p^\nu \quad (\text{C.54})$$

nous trouvons

$$m \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) = p^\mu \bar{u}(p) u(p) \quad (\text{C.55})$$

et

$$m \bar{v}(-p) \gamma^\mu v(-p) = -p^\mu \bar{v}(-p) v(-p) \quad (\text{C.56})$$

En normalisant les **bi-spineurs**  $\varphi$  et  $\chi$  à l'unité ( $\varphi^\dagger \varphi = \chi^\dagger \chi = I$ ), nous choisissons de normaliser les **quadri-spineurs** non pas à l'unité mais plutôt par la condition:

$$\bar{u}(p)u(p) = 2m \quad (\text{C.57})$$

$$\bar{v}(-p)v(-p) = -2m \quad (\text{C.58})$$

qui sont des conditions de covariance relativiste. Ceci signifie , par exemple que  $\mathbf{u}^+ \mathbf{u} = 2E$ . Alors selon (C.55) et (C.56)

$$\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) = 2p^\mu \quad (\text{C.59})$$

et

$$\bar{v}(-p)\gamma^\mu v(-p) = 2p^\mu \quad (\text{C.60})$$

Ceci fixe la constante de normalisation N à  $\sqrt{(p^0 + m)}$ , alors

$$u^r(p) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \varphi^r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \varphi^r \end{pmatrix} \quad (\text{C.61})$$

Où nous choisissons comme valeur des états des bases **bi-spinorielles** :

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.62})$$

et

$$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.63})$$

de même

$$v^s(-p) = \sqrt{p^0 + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p^0 + m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \quad (\text{C.64})$$

#### **C-4 Couplage à l'électromagnétisme**

La manière la plus simple d'introduire l'électromagnétisme est d'opérer la substitution de couplage minimum, comme d'habitude.

$$\mathbf{p}^\mu \rightarrow \mathbf{p}^\mu - e.A^\mu \quad (\text{C.65})$$

Où  $A^\mu$  est le quadri-potentiel électromagnétique. En retournant à l'équation de Dirac dans sa forme Hamiltonienne cela donne:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{A}) + \beta m + e\Phi] \psi \quad (\text{C.66})$$

#### **C.5 Invariance de Lorentz**

Bien que nous ayons écrit l'équation de Dirac ( C.31) sous une forme qui paraît invariante de Lorentz .



$$\Lambda(x^1; \zeta) = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.77})$$

et nous voyons que pour que (C.75) soit satisfait

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^0 S &= (\cosh \zeta)x^0 - (\sinh \zeta)x^1 \\ S^{-1}\gamma^1 S &= -(\sinh \zeta)x^0 + (\cosh \zeta)x^1 \\ S^{-1}\gamma^2 S &= \gamma^2 \\ S^{-1}\gamma^3 S &= \gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

$$\quad (\text{C.79})$$

En utilisant les relations d'anti-commutation des matrices  $\gamma$ , ceci peut synthétisé (comme on peut le vérifier) par:

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \left( \cosh \frac{\zeta}{2} + \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\zeta}{2} \right) \gamma^\mu \left( \cosh \frac{\zeta}{2} - \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\zeta}{2} \right) \quad (\text{C.80})$$

qui montre que

$$S = \cosh \frac{\zeta}{2} - \gamma^0 \gamma^1 \sinh \frac{\zeta}{2} \quad (\text{C.81})$$

les autres matrices de transformation  $S$  pour les autres transformations de Lorentz peuvent être trouvées de la même manière et cela peut être résumé par:

$$S = \cosh \frac{\zeta}{2} - \gamma^0 \gamma^i \sinh \frac{\zeta}{2} \quad (\text{C.82})$$

pour une propulsion de paramètre  $\zeta$  le long de l'axe  $x^i$  et

$$S = \cos \frac{\omega}{2} - \gamma^j \gamma^k \sin \frac{\omega}{2} \quad (\text{C.83})$$

pour une rotation d'angle  $\omega$  autour de l'axe  $x^i$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$  cyclique)

De la même manière on peut montrer que l'équation de Dirac conjuguée

$$i\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu + m \bar{\psi}(x) = 0 \quad (\text{C.84})$$

sera de la même forme dans le système pourvu que:

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} \quad (\text{C.85})$$

### C-6 Formes bilinéaires

Pour résumer nous avons trouvé la matrice de transformation  $S$  qui spécifie comment les 4 composantes d'un spineur de Dirac se combinent par une transformation de Lorentz. Comme  $S$  n'est pas égal à  $\Lambda$ , les spineurs de Dirac ne sont pas des 4-vecteurs (en fait, les 4 composantes du spineur appartiennent à un espace « interne » qui n'est pas l'espace temps). Cependant l'équation (C.75) est intéressante. Comme  $\Psi$  et  $\bar{\Psi}$  se transforment respectivement selon (C.70) et (C.85) nous en tirons que

$$V^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (C.86)$$

se transforme comme un 4-vecteur.

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x) \quad (C.87)$$

De même nous voyons avec

$$s(x) \equiv \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (C.88)$$

$$s'(x') = s(x) \quad (C.89)$$

que  $s(x)$  est un scalaire.

Il existe une matrice 4x4 importante qui est linéairement indépendante de l'ensemble des 4 matrices  $\gamma^\mu$ , mais qui peut être construite à partir de leur produit:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (C.90)$$

Dans notre représentation cela s'écrit:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.91)$$

Elle satisfait aux relations:

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (C.92)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (C.93)$$

La matrice  $\gamma^5$  joue un rôle important dans la transformation par parité des spineurs de Dirac. Examinons si nous pouvons trouver un opérateur  $P$  qui appliqué sur un spineur de Dirac représente cette transformation par parité des coordonnées spatio-temporelles  $t \rightarrow t, \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$  : soit  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (t, -\mathbf{r})$ . La matrice de transformation de Lorentz qui réalise cela est:

$$(\Lambda_P)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (C.94)$$

La contrainte que l'équation de Dirac doit avoir la même forme dans le système « primé » peut être satisfaite par:

$$P = \eta_P \gamma^0 \quad (\text{C.95})$$

où  $\eta_P$  est un facteur de phase<sup>3</sup>.

Comme la matrice  $\gamma^5$  anti-commute avec  $\gamma^0$ :

$$P^{-1} \gamma^5 P = -\gamma^5 = \det(\Lambda_P) \gamma^5 \quad (\text{C.96})$$

La matrice  $\gamma^5$  se transforme par une transformation de Lorentz générale selon:

$$S^{-1} \gamma^5 S = \det(\Lambda) \gamma^5 \quad (\text{C.97})$$

Elle change donc de signe sous une transformation de parité spatiale  $x \rightarrow -x$  mais est invariante par une transformation propre de Lorentz. Elle a les mêmes propriétés que le produit  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  x *bfc* pour les 3-vecteurs. La forme bilinéaire:

$$s^5(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) \quad (\text{C.98})$$

se comporte donc comme un pseudo-scalaire. Le bilinéaire

$$A^\mu \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x) \quad (\text{C.99})$$

se transforme comme un 4-vecteur par une transformation propre de Lorentz, mais est un pseudo-vecteur vis à vis des transformations de parité, soit:

$$A'^\mu(x') = \det(\Lambda) \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad (\text{C.100})$$

Calculons le nombre de matrices 4x4 que nous avons introduite. Chacun des ensembles  $\gamma^\mu$  et  $\gamma^\mu \gamma^5$  contiennent 4 matrices. Avec  $\gamma^5$  et la matrice unité cela fait 10 matrices. Il doit donc exister six autres matrices linéairement indépendantes pour balayer l'espace à 16 dimensions des matrices 4x4. Un choix adéquat des matrices supplémentaires est:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{C.101})$$

Comme cet ensemble est antisymétrique par permutation de  $\mu$  et  $\nu$ , il ne contient en fait que 6 matrices indépendantes. On peut montrer que le bilinéaire construit à partir de  $\sigma^{\mu\nu}$

---

3 On peut montrer qu'une particule de spin  $\frac{1}{2}$  peut avoir les valeurs  $\pm 1$  et  $\pm i$ . Ceci signifie que en général il faut 4 réflexions pour faire revenir la fonction d'onde à son état initial, comme dans le cas des rotations, où pour les fermions il faut une rotation de  $4\pi$ .

$$T^{\mu\nu}(x) \equiv \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) \quad (\text{C.102})$$

se transforme comme un tenseur (antisymétrique) de rang deux.

$$T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \quad (\text{C.103})$$

### Opérateurs de projection de spin et d'énergie

Comme l'équation de Dirac décrit des particules de spin  $\frac{1}{2}$ , nous devrions pouvoir trouver des analogues quadri dimensionnels aux matrices  $2 \times 2$  de Pauli. En fait elles ne sont pas difficiles à trouver. Si nous définissons par:

$$\Sigma^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma_{jk} = \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\gamma_j\gamma_k \quad (\text{C.104})$$

Elles ont la forme ( dans notre représentation usuelles des matrices  $\gamma$ )

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (\text{C.105})$$

Les relations de commutation pour  $\Sigma^i$  sont les mêmes que pour  $\sigma^i$

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\Sigma_k \quad (\text{C.106})$$

ce qui signifie que  $\Sigma^i / 2$  satisfait aux relations de commutation du moment angulaire. Nous trouvons également trivialement ( du fait que c'est identique aux matrices  $\sigma$ ) que:

$$\sum_i \left(\frac{\Sigma^i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \quad (\text{C.107})$$

de sorte que nous traitons en fait des particules de spin  $\frac{1}{2}$ .

Il est souvent utile dans les calculs d'utiliser la formule:

$$\Sigma^i = \gamma^5 \gamma^i \gamma^0 \quad (\text{C.108})$$

qu'on déduit facilement de la définition de  $\gamma^5$ . Dans (C.108) nous n'avons défini que la partie spatiale de l'opérateur de spin. Pour en faire une description covariante nous devons trouver un 4-vecteur qui vaut  $\Sigma^\mu = (0, \Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$  dans le référentiel repos. La généralisation quadri dimensionnelle de  $\epsilon^{ijk}$  est le tenseur quadri dimensionnel de Levi Civita  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Comme la 4-impulsion  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$  dans le référentiel repos nous voyons que:

$$\sigma^\mu = \frac{1}{2m}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \sigma_{\rho\sigma} \quad (\text{C.109})$$



est l'opérateur que nous cherchons. Pour obtenir l'opérateur de spin dans une direction donnée  $\mathbf{\hat{n}}$  ne pouvons de façon similaire introduire un 4-vecteur qui a la valeur  $n^\mu = (0, \mathbf{\hat{n}})$ . Alors l'opérateur covariant  $n^\mu \Sigma_\mu$  se référera à cette direction de spin. En particulier, nous pouvons trouver l'analogue relativiste des opérateurs de projection (spin haut et spin bas ) à deux composantes dans la direction z.

$$P_\pm = \frac{1 + \sigma_z}{2} \quad (\text{C.110})$$

En introduisant  $n_z^\mu = (0, 0, 0, 1)$  et en écrivant:

$$P_\pm = \frac{1 + \Sigma_\mu n_z^\mu}{2} = \frac{1 + \gamma^5 \not{n}_z \gamma^0}{2} \quad (\text{C.111})$$

Ici nous pouvons écrire la matrice  $\not{p}/m$  et utiliser le fait que l'action de  $\not{p}$  sur un spineur libre donne  $\pm m$ . Si nous définissons le spineur  $u^1(p)$  ayant le spin haut dans la direction z et  $v^1(-p)$  ayant le spin bas et vice versa pour  $u^2(p)$ ,  $v^2(-p)$  , (nous motiverons plus loin cette assignation de signe différent), nous pouvons utiliser pour les deux types de spineurs,

$$P_\pm = \frac{1 + \gamma^5 \not{n}_z}{2} \quad (\text{C.112})$$

comme opérateurs de projection.

Nous pouvons aussi trouver des projecteurs pour les énergies positives et négatives.

$$\Lambda^2 = \Lambda_- \Lambda_+ \Lambda_-^2 = \Lambda_+ \Lambda_- \Lambda_+ = 1$$

$$\Lambda_- \Lambda_+ = \Lambda_+ \Lambda_- = 0$$

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (\text{C.113})$$

$$\Lambda_- = \frac{-\not{p} + m}{2m} \quad (\text{C.114})$$

$$\sum_r u_\alpha^r(p) \bar{u}_\beta^r(p) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (\text{C.115})$$

$$\sum_s v_\alpha^s(-p) \bar{v}_\beta^s(-p) = (-\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (\text{C.116})$$

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad (\text{C.117})$$

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad (\text{C.118})$$

$$\psi_{L,R} \equiv P_{L,R} \psi \quad (\text{C.119})$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\alpha \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi] \psi \quad (\text{C.120})$$

$$\psi = e^{-mt} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \quad (\text{C.121})$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2m \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \quad (\text{C.122})$$

$$\chi = \frac{\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{2m} \varphi \quad (\text{C.123})$$

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{2m} + e\Phi \right) \varphi \quad (\text{C.124})$$

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m} [\mathbf{L} + 2\mathbf{S}] \cdot \mathbf{B} \right) \varphi \quad (\text{C.125})$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iS} \psi \quad (\text{C.126})$$

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left( e^{iS} \left[ H - i \frac{\partial}{\partial t} \right] e^{-iS} \right) \psi' = H' \psi' \quad (\text{C.127})$$

$$H' = H + i[S, H] + \frac{(i)^2}{2!} [S, [S, H]] + \dots \quad (\text{C.128})$$

$$H^{2nd} = \beta \left( m + \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} \right) + e\Phi -$$

$$\frac{e}{2m} \beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$- \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{e}{8m^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \tag{C.129}$$

$$\tag{C.130}$$

## Approche historique: INSA (1966) par le professeur F. Davoine<sup>4</sup>

A partir de l'expression relativiste de l'énergie,  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ , on peut construire que la fonction de Hamilton ( en introduisant l'énergie potentielle  $U$ ) qui vaut alors:

$$H = U \pm c \cdot (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$$

On a vu que le signe  $\pm$  est lié à la forme de la formule ( on verra qu'il autorise des énergies négatives, et comment cela est traité par la "mer" de Dirac)

On est tenté d'appliquer les opérateurs associés aux grandeurs physiques pour obtenir l'équation de **Klein Gordon**.

## Solution de Dirac : Linéarisation de l'équation

Cela a conduit Dirac à "linéariser" cette équation en considérant la quantité sous la racine carrée comme un carré parfait.

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2 = (\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \alpha_4 m_0 c)^2$$

les coefficients  $\alpha$  étant à déterminer.

Si on développe, on voit qu'il n'y a pas de solutions avec des scalaires, mais qu'on peut en trouver si on considère les  $\alpha$  comme des matrices ( et qu'on applique les règles opératoires des matrices).

Il existe plusieurs groupes de matrices qui satisfont à ces conditions, qui conduisent à des solutions équivalentes.

Elles doivent anti-commuter  $\alpha_1 \alpha_2 = -\alpha_2 \alpha_1$  etc..et leur carré:  $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = I$

On remarque ( mais est ce important ?) que ces coefficients définissent une base d'un espace constituée d'éléments qui sont comme une racine carré des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel sur lequel est défini le quadri vecteur énergie impulsion.

Celles adoptées par Dirac sont :

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On peut vérifier qu'elles sont solutions de l'équation.

<sup>4</sup> Cette approche ne figure pas dans le livre cité en référence. Elle est donnée de façon à présenter un autre éclairage sur la manière d'établir cette équation.

L'équation de Hamilton devient :

$$H = U - c \cdot \alpha_1 p_x - c \cdot \alpha_2 p_y - c \cdot \alpha_3 p_z - c^2 \cdot \alpha_4 \cdot m_0$$

Et l'opérateur Hamiltonien de Dirac

$$H = U + i \cdot c \cdot \alpha_1 \cdot \hbar \partial / \partial x + i \cdot c \cdot \alpha_2 \cdot \hbar \partial / \partial y + i \cdot c \cdot \alpha_3 \cdot \hbar \partial / \partial z - \alpha_4 \cdot m_0 c^2$$

On peut évidemment le développer sous forme de matrice 4 x 4 en développant les coefficients matriciels.

L'équation de Dirac correspondant à l'équation de Schrödinger s'écrit:

$$H \psi = E \psi$$

Relation entre matrices pour l'équation de Dirac, qu'on appliquera à un vecteur colonne  $\psi$

On est alors conduit à prendre comme fonction  $\psi$  un vecteur à 4 composantes  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ , chacune de ces fonctions étant une fonction ordinaire de  $x, y, z, t$ .

On aura alors:

$$\psi \psi^* = \psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* + \psi_3 \psi_3^* + \psi_4 \psi_4^*$$

Et ce produit aura la signification probabiliste habituelle.

La détermination de  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ , est alors ramenée à la résolution de 4 équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre qu'il n'est pas difficile d'établir.

$$i/\hbar [(E - U)/c + m \cdot c] \psi_1 + (\partial/\partial x - i \cdot \partial/\partial y) \psi_4 + (\partial/\partial z) \psi_3 = 0$$

$$i/\hbar [(E - U)/c + m \cdot c] \psi_2 + (\partial/\partial x + i \cdot \partial/\partial y) \psi_3 - (\partial/\partial z) \psi_4 = 0$$

$$i/\hbar [(E - U)/c + m \cdot c] \psi_3 + (\partial/\partial x - i \cdot \partial/\partial y) \psi_2 + (\partial/\partial z) \psi_1 = 0$$

$$i/\hbar [(E - U)/c + m \cdot c] \psi_4 + (\partial/\partial x + i \cdot \partial/\partial y) \psi_1 - (\partial/\partial z) \psi_2 = 0$$

### ***Le spin d'après la théorie de Dirac.***

Au lieu d'utiliser les matrices  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  ci dessus, on peut envisager d'utiliser les 5 matrices suivantes, également à 4 lignes et 4 colonnes

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \rho_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(Dirac a également introduit une matrice  $\rho_2$  dont nous ne ferons pas usage ici).

On peut remarquer:

que chaque  $\sigma$  commute avec chaque  $\rho$

que les  $\rho$  anti-commutent entre elles

que les  $\alpha$ ,  $\rho$  et  $\sigma$  sont reliées par

$$\alpha_1 = \rho_1 \cdot \sigma_x, \quad \alpha_2 = \rho_1 \cdot \sigma_y, \quad \alpha_3 = \rho_1 \cdot \sigma_z, \quad \alpha_4 = \rho_3$$

L'hamiltonien de Dirac peut donc s'écrire

$$H = U - c \cdot \rho_1 (\sigma_x \cdot p_x + \sigma_y \cdot p_y + \sigma_z \cdot p_z) - \rho_3 \cdot m_0 c^2$$

( $p_x, p_y, p_z$  représentant ici des opérateurs)

**Considérons alors-un électron dans un potentiel électrostatique central  $U(r)$ .**

Soit  $L_z$  son moment, cinétique orbital projeté sur  $Oz$

- En mécanique classique, nous savons que c'est une constante du mouvement.

- En mécanique ondulatoire de Schrödinger, nous savons qu'il a, aussi une valeur bien déterminée :  $m\hbar$  et nous avons remarqué que ceci provenait du fait que les fonctions d'onde correspondant aux états stationnaires sont les fonctions propres de l'opérateur  $L_z$ . En d'autres termes, ceci provient du fait les opérateurs  $L_z$  et  $H$  commutent.

Proposons nous de voir s'il en est encore de même en mécanique de Dirac.

Nous avons déjà montré ( c'est le produit vectoriel de l'impulsion par la distance à l'axe  $Oz$ , projeté sur  $Oz$ , il vaut donc  $x \cdot p_y - y \cdot p_x$ ) que l'opérateur  $L_z$  était égal à ( on a remplacé les " $p$ " par les opérateurs associés ):

$$L_z = \hbar/i (x \cdot \partial/\partial y - y \cdot \partial/\partial x)$$

On peut vérifier facilement ( je l'ai fait), que cet opérateur commute avec  $p_z$  et avec les matrices  $\sigma$  et  $\rho$ , par contre il ne commute pas avec  $p_x$  et  $p_y$  et on a:

$$[L_z, p_x] = i \hbar p_y \quad \text{et} \quad [L_z, p_y] = -i \hbar p_x$$

Formons alors le commutateur

$$\begin{aligned} L_z \cdot H - H \cdot L_z &= -c \cdot \rho_1 [\sigma_x (L_z, p_x - p_x L_z) + \sigma_y (L_z, p_y - p_y L_z)] \\ &= -c \cdot \rho_1 [\sigma_x (i \cdot \hbar \cdot p_y) + \sigma_y (-i \cdot \hbar \cdot p_x)] \\ &= i \cdot \hbar \cdot c \cdot \rho_1 [\sigma_x \cdot p_y - \sigma_y \cdot p_x] \end{aligned} \quad (8)$$

Il est facile de vérifier que la parenthèse n'est pas nulle. Donc, ce commutateur n'est pas nul, et, en mécanique de Dirac le moment cinétique  $L_z$  ne sera pas une constante du mouvement.

Formons alors le commutateur

$$[ \sigma_z, H ]$$

On vérifie aisément que  $\sigma_z$  commute avec  $p_x, p_y, p_z$  mais ne commute pas avec  $\sigma_x, \sigma_y$  et que l'on a

$$[ \sigma_z, \sigma_x ] = 2i \sigma_y \quad [ \sigma_z, \sigma_y ] = -2i \sigma_x$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_z . H - H . \sigma_z &= -c . \rho_1 [ p_x (\sigma_z . \sigma_x - \sigma_x . \sigma_z) + p_y (\sigma_z . \sigma_y - \sigma_y . \sigma_z) ] \\ &= -c . \rho_1 [ p_x 2i . \sigma_y + p_y (2i . \sigma_x) ] \\ &= 2i . c . \rho_1 [ \sigma_x p_y - \sigma_y p_x ] \end{aligned} \quad (9)$$

Ce commutateur n'est pas nul non plus. Mais, en rapprochant (8) et (9) on constate que l'on a :

$$( L_z + \hbar/2 . \sigma_z ) . H - H ( L_z + \hbar/2 . \sigma_z ) = 0$$

Ceci montre que c'est la grandeur associée à l'opérateur

$$L_z + \hbar/2 . \sigma_z$$

Qui est, dans ce cas, une constante du mouvement.

Par analogie avec la mécanique classique et la mécanique ondulatoire non relativiste, on voit que l'on est conduit à dire que l'opérateur spin  $S_z = \hbar/2 . \sigma_z$  vient naturellement se joindre à  $L_z$  pour donner le moment angulaire total, constante du mouvement

On peut montrer que, dans ce cas encore, bien que la fonction  $\psi$  ne soit plus une simple fonction scalaire, le résultat d'une mesure effectuée sur le spin fournit une des valeurs propres  $\hbar/2 . \sigma_z$ , c'est à dire  $\pm \hbar/2$ .

On démontrerait également que le moment magnétique s'introduit, lui aussi, automatiquement dans les équations de Dirac avec la valeur  $e\hbar/2\mu_0.c$ , c'est-à-dire 1 magnéton de Bohr.

(Cette démonstration nécessite l'usage des équations du mouvement dans un champ électromagnétique et non plus électrostatique source qui implique des calculs plus complets).

Les caractéristiques essentielles de l'électron se retrouvent bien dans l'équation de Dirac sans faire appel modèle d'une sphère en rotation sur lequel s'étaient fondées des théories antérieures.

### ***Remarque sur les états à énergie négative. théorie des lacunes***

L'introduction d'un double signe dans l'expression de l'Hamiltonien relativiste amène à voir la possibilité de valeurs négatives de l'énergie (car la fixation de l'énergie potentielle de la particule au repos  $P = mc^2$  fixe l'origine des énergies)

C'est là un point capital de la théorie de Dirac et la considération des énergies des deux signes s'est montrée nécessaire pour interpréter correctement, par la théorie de, Dirac, divers

phénomènes et notamment l'effet Compton. Mais, ce fait du point de vue physique, est difficile à concevoir, et la nature ne semblerait rien montrer qui ressemblait à des corpuscules à énergie négative.

Pour surmonter cette difficulté, Dirac suggéra que les états d'énergie négatives étaient en réalité accessibles eux électrons, mais se trouvaient, d'ordinaires occupés en totalité, un peu comme le sont, dans un métal tous les états d'énergie inférieurs au niveau de Fermi.

Les électrons qui se trouvent dans ces états ne se manifesteraient pas et, notamment, leur charge serait neutralisée par des charges positives qui échappent également à notre observation.

Cette hypothèse laissait prévoir que, sous l'effet d'une excitation convenable (on peut montrer qu'il faut, pour cela dispenser une énergie supérieure à  $2 mc^2$ ), un électron pouvait se trouver porté d'un état d'énergie négative à un état d'énergie positive.

Le résultat d'un tel saut est l'apparition d'un électron normal et la disparition d'un des électrons occultes, ce qui entraîne la création d'une lacune parmi les états à énergie négative.

Oppenheimer devait montrer que le comportement d'une telle lacune dans un champ électromagnétique est le même que celui d'un électron qui serait chargé positivement.

Ces prévisions ont été vérifiées par l'expérience. Nous avons déjà signalé en effet (cf. cours de Physique de la matière) que des photons d'énergie suffisante tombant sur la matière engendrent, avec une certaine probabilité (croissante avec l'énergie) une paire d'électrons de charges opposées\*

Inversement, un électron positif peut se combiner à un électron négatif. Dans le langage précédent, on dit qu'une lacune existant dans le continuum des états d'énergie négative, est-comblée par un électron ordinaire, c'est-à-dire négatif, pour donner de l'énergie, électromagnétique.

Nous signalerons simplement que des propriétés analogues ont été mises en évidence pour d'autres particules que les électrons, mais que le traitement théorique de ces problèmes est des plus compliqué.