5- Implications dynamiques de la RG

Retour Chapitre 3

5.1 Quadri impulsion

Certains aspects qui ont été traités dans le chapitre 3, ne seront pas repris ici (par exemple les deux espèces de quadri vecteur impulsion). S'y référer au cas où. Par ailleurs j'ai traduit « momentum » tantôt par « impulsion, quantité de mouvement ou moment » en supposant que c'était la même chose.

Considérons la distance entre deux évènements le long d'une ligne d'univers dx^μ.

La transformation entre deux référentiels s'écrit.

$$dx'^\mu = (\partial x'^\mu/\partial x^\nu)dx^\nu$$

D'après la loi de transformation des tenseurs, on voit que ceci est un quadrivecteur.

Nous savons qu'un tenseur multiplié ou divisé par un invariant reste un tenseur. Donc $dx^\mu/d\tau$ est un tenseur. Ceci nous incite à définir un quadri vecteur vitesse U^μ

$$U^\mu = dx^\mu/d\tau$$

La relation entre ce quadri vecteur et la vitesse de coordonnée s'obtient en utilisant la règle de chaînage.

$$U^\mu = (dx^\mu/dt)(dt/d\tau)$$

$$U^\mu = (dt/d\tau)u^\mu \tag{5.1.1}$$

Remarquons que $u^0 = c$

le quadri vecteur impulsion (moment) de première espèce s'écrit

$$p^\mu$$

Il est un tenseur de rang *1* à quatre composantes. La composante temporelle p^0 est l'énergie de la particule.

$$p^0 = E_R/c$$

Les autres composantes p^i sont les composantes de la quantité de mouvement (impulsion) de la particule.

Ceci reste vrai que la particule ait une masse ou non. Par exemple les photons n'ont pas de masse, mais ils ont une impulsion et une énergie. L'amplitude de l'impulsion 3D est liée localement à leur longueur d'onde (que la particule ait une masse ou non) par

$$p = h/\lambda$$

et l'impulsion 3D (spatiale) est donnée par

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

La composante temporelle est aussi liée localement à une fréquence (que la particule ait une masse ou non), par

$$p^0 = \frac{\hbar\omega}{c}$$

Où la fréquence est localement liée à la longueur d'onde par

$$\omega = 2\pi c/\beta\lambda$$

Et comme $\beta c = d\omega/dk$, localement nous avons aussi

$$\omega^2 = c^2k^2 + constante$$

Il apparaît que la constante d'intégration est proportionnelle au carré de la masse.

Au cours du temps, la définition de la masse a beaucoup évolué (cinq défintions largement utilisées). La définition la plus moderne, la plus élégante et la plus utile en relativité générale que nous avons de la masse d'une particule est celle correspondant à la racine positive pour *m* dans l'équation

$$m^2c^2 \equiv |g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu|$$

(5.1.3a).

Ici on voit qu'elle est définie comme la "longueur", « l'amplitude » (le « module », résultant du produit scalaire relativiste) du vecteur quadri impulsion. Plus loin, nous restaurerons la définition de la masse comme coefficient d'inertie. (Le « *m* » de l'équation $F^\lambda = mA^\lambda$, entre quadri vecteurs pour les particules massives, qui dit que la quadri accélération est égale à la quadriforce divisée par "*m*" est bien le même que celui que nous venons de définir). En général, on définit la masse à partir de l'énergie relativiste dans le référentiel local au repos ; cependant la définition de la masse par 5.1.3 sera notre préférée, et celle à laquelle nous nous référerons par défaut dans la suite. De cette définition nous voyons que la masse est un invariant. Elle ne dépend ni de la vitesse, ni de l'endroit, ni du champ de gravitation.

L'équation 5.1.3a est appelée la condition de couche de masse

En présence d'un vecteur potentiel, la masse peut être définie de façon équivalente en utilisant le quadrivecteur impulsion de seconde espèce par :

$$m^2c^2 = |g^{\mu\nu}[P_\mu - (q/c)\phi_\mu][P_\nu - (q/c)\phi_\nu]|$$

(5.1.3b)

En RG comme $g_{\mu\nu}$ est en général différent pour chaque particule d'un système, il n'est pas toujours utile de définir une masse d'un système. Il est plus utile de définir une densité de masse dans un référentiel propre local ρ_0 ou une densité de masse totale dans un référentiel local propre ρ_{Tot} de la manière suivante. (Remarquons que comme discuté en 3.1 la masse du système n'est pas égale à la masse "totale"). L'indice zéro sur le premier indique que c'est la densité de la masse (comme définie ci dessus) selon un observateur dans un référentiel local qui se déplace avec ce morceau de la masse. Remarquons « se déplaçant avec » car nous parlons d'une densité qui change avec la contraction de Lorentz. C'est ce ρ_0 qui entre dans le tenseur énergie de masse.

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$$

(5.1.4)

Pour des tenseurs énergie impulsion plus généraux on définit habituellement ρ_0 comme dans l'équation 3.1.16

$$\rho_0 = T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu/c^4$$

Si ρ_0 est positif alors $T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu$ doit être positif aussi. Si ce n'est pas le cas, on dit qu'il y a violation de la condition d'énergie faible. De façon plus générale la condition d'énergie faible correspond à :

$$T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0$$

(3.1.17)

Pour tout vecteur V_μ de type temps. La matière ne peut violer cette condition que dans les limites données par l'inégalité de Pfenning – voir :

http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9805037

Les champs sans masse comme le champ électromagnétique, contribuent au tenseur énergie impulsion et ainsi à la gravitation, mais pas selon l'équation ci-dessus. A la place, et en général la densité de masse totale est en relation avec le tenseur énergie impulsion par :

$$\rho_{Tot} \equiv g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}/c^2$$

(5.1.5)

L'indice "tot " signifie "total", indiquant que les effets de la pression entre autres sont pris en compte.

Mais, selon cette définition de la masse, un système de photons n'a pas de masse totale (le tenseur électromagnétique est de trace nulle). Le tenseur impulsion énergie du champ électromagnétique est tel que $\rho_{Tot} = 0$. Comme c'est précisement la définition d'une masse nulle, cela vaudra zéro pour tout champ de masse nulle. La terminologie peut paraître étrange, mais il est important de bien distinguer un champ de masse nulle $m_{tot} = 0$, $\rho\, t_{ot} = 0$ d'un système de particules sans masse qui qui a une masse totale non nulle $m_{tot} \neq 0$, $\rho\, t_{ot} \neq 0$. Un système de particules captives a une masse système définie par l'énergie au centre d'inertie (centre de moment) $m = E_{cm} / c^2$ qui peut être non nulle, même si le total des masses des particules est nul.

Nous savons qu'un tenseur multiplié par un invariant est toujours un tenseur.

Comme « m » est un invariant et que U^μ est un quadrivecteur, alors mU^μ est aussi un quadrivecteur. Ce quadrivecteur a les dimensions d'une quadri-impulsion dont les composantes spatiales sont la quantité de mouvement bien connue à la limite Newtonienne. Regardons ce qui se passe si nous contractons ce tenseur.

$$g_{\mu\nu}(mU^\mu)(mU^\nu) = m^2 g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = m^2 c^2$$

En se référant à notre définition de la masse 5.3.1a $(m^2c^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu)$ nous voyons que cela devient

$$g_{\mu\nu}(mU^\mu)(mU^\nu) = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$$

Donc nous trouvons que pour les particules massives la relation est

$$p^\mu = mU^\mu$$

Exercices

Problème 5.1.1

La fréquence d'un neutrino, une particule très faiblement massive, se déplaçant presque à la vitesse de la lumière, mesurée par un observateur proche de la particule à proximité d'un trou noir. Comment un observateur distant peut il utiliser cette information et une transformation de coordonnée pour calculer les composantes de l'énergie et de l'impulsion du quadrivecteur du référentiel distant ? Comment l'observateur local calcule t'il la quadri-impulsion covariante? Comment l'observateur distant calcule t'il la quadri-impulsion covariante à partir de la quadri-impulsion contravariante calculée précédemment?

Problème 5.1.2

Calculer ρ_{Tot} pour $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ où diag$[T^{\mu\nu}] = [T^{00}, a, b, d]$ pour montrer que $a + b + d = T^{00}$ est le cas de tous les champs de masse nulle dans la limite locale ou de la RR.

5.2 Mouvement géodésique et non géodésique

En RR, la force ordinaire (pas la force de Minkowski) sur une particule est définie comme la dérivée du quadri-moment par rapport à la coordonnée temps soit : $f^\lambda_{r.r.} = dP^\lambda/dt$. En RG le quadri-moment est bien un quadri vecteur mais sa dérivée par rapport à la coordonnée temps, ne l'est pas. En RG pour pouvoir écrire nos équations sous forme tensorielle nous devons définir une quadri force de type quadri vecteur. Donc, nous définissons la quadri force comme la dérivée covariante du quadri vecteur moment, de première espèce, par rapport au temps propre (temps propre qui est un invariant, et nous savons que la dérivée d'un quadri vecteur par rapport à un invariant est un quadrivecteur).

$$F^\lambda = Dp^\lambda/d\tau \qquad (5.2.1a)$$

$$F^\lambda = dp^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}U^\mu p^\nu \qquad (5.2.1b)$$

Nous pouvons établir une relation entre le quadri vecteur force et la force ressentie par un objet la subissant. Pour cela, nous réalisons la transformation vers le référentiel accéléré comme suit:

$$F'^\mu_{ress} = (\partial x'^\mu/\partial x^\nu)F^\nu$$

La transformation inverse vaut:

$$F^\mu = (\partial x^\mu/\partial x'^\nu)F'^\nu_{ress}$$

Remarquons que le module de la force ressentie peut s'écrire:

$$|F| = (-g_{\mu\nu}F^\mu F^\nu)^{1/2} = m(-g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu)^{1/2} \qquad (5.2.2)$$

La pseudo "force de gravitation" peut s'écrire

$$f^\lambda_{grav} = - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu p^\nu$$

Alors, à partir de l'équation de la quadri force, nous pouvons écrire l'équation du mouvement sous la forme:

$$dp^\lambda/dt = (d\tau/dt)(\partial x^\lambda/\partial x'^\nu)F'^\nu_{ress} + f^\lambda_{grav}$$

Et en définissant f^i_{ext}

$$f^i_{ext} \equiv (d\tau/dt)(\partial x^i/\partial x'^\nu)F'^\nu_{ress}$$

Nous pouvons écrire l'équation du mouvement comme suit (notez que nous sommes en indices latins):

$$dp^i/dt = f^i_{ext} + f^i_{grav}$$

(5.2.3)

Tant que l'observateur du référentiel de coordonnée est local par rapport à l'objet en question, et que l'objet se déplace seulement dans la direction de la force externe, nous pouvons écrire:

$$f_{ext} = F'^{i}_{ress}$$

et de même tant que l'observateur du référentiel de coordonnée est local (au voisinage) par rapport à l'objet en question, et que l'objet se déplace seulement dans la direction de la force externe, nous pouvons écrire l'équation du mouvement :

$$dp^i/dt = F'^{i}_{ress} + f_{grav}$$

Remarquons que dans ce référentiel local, si aucune quadri force n'est appliquée sur l'objet, alors nous avons:

$$dp^i/dt = f_{grav} = - \Gamma^{i}_{\mu\nu}u^{\mu}p^{\nu}$$

Maintenant si nous sommes en chute libre avec l'objet considéré, alors $dp/dt = 0$ donc dans un référentiel chute libre nous allons aussi avoir:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

Donc pour un référentiel local, chute libre l'équation du mouvement pour une particule voisine est :

$$F^{\lambda} = dp^{\lambda}/d\tau$$

Ce qui est l'équation de la force de Minkowski en RR. Nous voyons que la dynamique se ramène à celle de la RR dans un référentiel chute libre. En fait nous définissons un référentiel local chute libre comme un référentiel dont l'observateur est local aux évènements considérés et dans lequel la physique se ramène à la dynamique de la RR. Insistons sur le fait que cette définition implique que pour que la dynamique d'une particule soit celle de la RR, ses déplacements dans l'espace et dans le temps doivent rester locaux, par exemple :

Si on a percé un trou passant par le centre de la Terre et que sur la même verticale, on lâche au même moment deux particules qui n'interragissent pas, séparées par une petite distance en hauteur, si on néglige le frottement de l'air, elles vont avoir toutes les deux un mouvement oscillant avec la même période. Pour un observateur en chute libre, local aux particules (à petite distance), il va les voir osciller par rapport à un point selon une dynamique qui n'est pas celle de la RR. Ceci est dû au fait que la période est trop longue et ne possède donc pas le caractère « local » requis. Si nous nous intéressions à ce qui se passe dans un intervalle de temps beaucoup plus petit, le caractère « local » serait satisfait et on pourrait alors retrouver la dynamique de la RR. Autrement, bien que le déplacement spatial des particules soit faible, il est suffisament grand pour que le référentiel de l'observateur en chute libre ne puisse plus être considéré local avec celui des particules, ceci invalidant les conditions requises.

Dans un référentiel local chute libre nous avons à la fois

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

et

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

Dans un référentiel local mais pas en chute libre nous avons

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

mais

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \neq 0$$

Donc selon que le référentiel est chute libre ou non nous définissons un référentiel local comme un référentiel qui possède un observateur suffisament proche des évènements considérés de sorte que la métrique s'y réduise à celle de la RR.

Nous savons, par le principe d'équivalence, que les objets qui ne sont soumis à aucune force autre que la gravitation suivent des chemins qui maximalisent leur temps propre. Nous pouvons mettre cela sous forme d'équation :

$$\delta\int d\tau = 0 \tag{5.2.4}$$

Comme $cd\tau = ds$, nous pouvons écrire cette équation en termes de chemin appelé géodésique.

$$\delta\int ds = 0$$

Cette équation donne à l'équation son interpretation moderne. La géométrie intrinsèque de l'espace temps lui est conférée par la matière (la matière et l'espace temps sont unifiés en une même entité) conformément à l'équation d'Einstein, et les particules suivent des chemins géodésiques de cette géométrie. Ce concept de mouvement géodésique explique l'inertie (pour la gravitation en tout cas) et remplace le concept plus primitif d'inertie qui statuait que les objets « en mouvement inertiel » devaient conserver une vitesse constante. C'est ainsi que la RG donne une explication macroscopique de la gravitation. Nous pouvons maintenant paramétriser l'équation comme suit :

$$\delta\int (ds/d\tau)d\tau = 0$$

soit encore

$$\delta\int [(ds/d\tau)^2]^{1/2} d\tau = 0$$

Puis, remarquons qu'on peut obtenir le même chemin qui maximalise τ aussi par l'équation:

$$\delta\int[(ds/d\tau)^2]d\tau = 0$$

(5.2.5)

Utilisons alors la definition de la quadrivitesse

$$U^\mu = dx^\mu/d\tau$$

Ainsi que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

On obtient

$$\delta\int g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu d\tau = 0$$

(5.2.6)

Utilisons l'équation de Euler-Lagrange, nous obtenons alors le résultat suivant

$$(d/d\tau)[(\partial/\partial U^\lambda)(g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)] = (\partial/\partial x^\lambda)(g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)]$$

(5.2.7)

En exécutant les operations et en simplifiant on arrive à:

$$d^2x^\lambda/d\tau^2 + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau) = 0$$

(5.2.8)

Ceci est appelé l'équation géodésique.

Vérifions que ceci est bien cohérent avec notre équation de la quadri force (ou l'équation du mouvement non géodésique d'une particule massive ponctuelle)

$$F^\lambda = dp^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu p^\nu$$

Si la gravitation est la seule interaction présente, $F^\lambda = 0$ et nous avons

$$dp^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu p^\nu = 0$$

Rappelons nous la relation entre la quadri impulsion et la quadri vitesse

$$P^\mu = mU^\mu$$

Nous avons donc

$$dU^{\lambda}/d\tau + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = 0$$

Rappelons nous alors la définition de la quadri vitesse.

$$U^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$$

Nous pouvons vérifier que cela donne bien l'équation géodésique.

$$d^2x^{\lambda}/d\tau^2 + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(dx^{\mu}/d\tau)(dx^{\nu}/d\tau) = 0$$

Exercices

Problème 5.2.1

On maintient un observateur immobile dans un espace temps défini par :

$$ds^2 = (1 + 2\alpha z/c^2)dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2/(1 + 2\alpha z/c^2)$$

Où α est constant. Calculer la force ressentie par l'observateur en utilisant Eqn 5.2.2.

Problème 5.2.2

Si une particule se déplace parallèlement à l'axe z dans l'espace temps défini en 5.2.1, calculer $d^2z/d\tau^2$ en utilisant l'équation géodésique 5.2.8. Conseil : commencer avec :

$$1 = (1 + 2\alpha z/c^2)(dctdc\tau)^2 - (dz/dc\tau)^2/(1 + 2\alpha z/c^2)$$

et intégrer le terme $d^2ct/dc\tau^2$ de l'équation géodésique pour obtenir une expression pour dct/dτ . Une fois inséré, différencier l'équation.

Problème 5.2.3

Etablir une équation d'écoulement du temps $dt/d\tau$, en integrant $d^2x^0/dc\tau^2$ dans l'équation géodésique Eqn.5.2.8 pour l'espace temps de Schwarzschild

$$ds^2 = (1 - r_0/r)dct^2 - dr^2/(1 - r_0/r) - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

Pour simplifier on ne considère que le movement radial. Remarquez le changement de signe de $dt/d\tau$ pour $r < 2GM/c^2$. Que cela signifie t'il ?

Problème 5.2.4

Une particule se déplace sur une géodésique dans l'espace temps

$$ds^2 = dct^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

Trouver d^2r/dt^2pour le mouvement équatorial. Est-ce bien ce qui est escompté ?

5.3 Types d'acceleration

Nous avons défini la masse de sorte qu'elle soit un invariant. Cependant en mécanique Newtonienne, d'où le concept de masse est tiré, la masse est définie comme l'inertie d'un objet autrement dit, la masse caractérise la résistance au changement de mouvement qu'ont les objets sous l'action d'une force. La masse est le coefficient de proportionnalité entre la force et l'accélération.

$$f = ma$$

Rappelons l'équation du mouvement non géodésique Eqn 5.2.1.

$$F^\lambda = dp^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu p^\nu$$

Nous pouvons l'écrire

$$F^\lambda = m(dU^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)$$

Remarquons que l'expression entre parenthèses est la dérivée covariante de la quadri vitesse. Ceci est un tenseur que nous appellerons quadri accélération.

$$\boldsymbol{A^\lambda = dU^\lambda/d\tau + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} \tag{5.3.1}$$

Nous pouvons donc écrire l'équation non géodésique:

$$\boldsymbol{F^\lambda = mA^\lambda} \tag{5.3.2}$$

Nous voyons que la masse est la résistance d'une particule à la déviation du mouvement géodésique.

Si nous définissons l'inertie relativiste comme la résistance à la déviation de l'équation géodésique, nous retrouvons le concept de masse comme inertie pour les particules massives.

En ces termes, l'accélération propre A' correspond à l'accélération dans le référentiel local inertiel où la masse de test est « instantanément » au repos. Son amplitude est égale à l'accélération invariante, $|A| = (-g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu)^{1/2}$. Ceci est la valeur de l'accélération "ressentie" par l'observateur accéléré et est l'amplitude de l'accélération de coordonnées dans un référentiel inertiel, dans lequel le référentiel propre accéléré de l'observateur est instantanément au repos (accélération telle que définie en RR). Nous définissons aussi une accélération $\boldsymbol{\alpha}$ parce que l'équation 5.3.3 est utile. Dans le cas où la force est dans la direction du mouvement et que les connexions affines sont nulles, l'accélération $\boldsymbol{\alpha}$ définie en (5.3.3) est aussi égale à l'accélération propre. Il peut sembler étrange de prime abord, de définir ce type d'accélération $\boldsymbol{\alpha}$, mais c'est très utile quand on veut faire le parallèle avec la RR.

En RR la force « ordinaire » sur une particule est la dérivée de la quadri-impulsion par rapport à la coordonée temps, pas par rapport au temps propre. Le chapitre sur la quadri-impulsion, sa relation avec la quadri vitesse, nous a montré que la quadri impulsion était égale à la quadrivitesse multipliée par la masse. Ceci signifie qu'en RR, et comme observé par un observateur dans un référentiel local chute libre, la force « ordinaire » sur une particule est égale à l'accélération $\boldsymbol{\alpha}$ multipliée par la masse, comme définie dans ces textes. Dans tout référentiel dans lequel les connexions affines sont nulles, et où l'objet se déplace dans la direction de la force exercée, l'accélération $\boldsymbol{\alpha}$ du mouvement d'un observateur est le poids « ressenti » par cet observateur divisé par *« m »*. Par exemple, vous pouvez entendre quelque chose comme « la force (en g) d'une fusée en accélération dans l'espace est de *4 g* ». C'est alors de l'accélération $\boldsymbol{\alpha}$ qu'on parle. Autrement dit, un passager de masse *« m »* sur une balance, verrait la balance indiquer un poids de :

$$W = m\alpha$$

Où

$$\alpha = 4g = 4(9.80m/s^2)$$

Remarque: On peut généralement écrire l'amplitude de la force ressentie:

$$|F| = m(-g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu})^{1/2}$$

Interessons nous maintenant à l'expression de l'accélération propre. La définition exacte que nous allons utiliser pour cela est :

$$\boldsymbol{\alpha^{\lambda} \equiv dU^{\lambda}/dt} \qquad (5.3.3)$$

Donc, en termes de force ordinaire, il vient:

$$\alpha^{\lambda} = dU^{\lambda}/dt = (dp^{\lambda}/dt)/m$$

$$\alpha^{\lambda} = f^{\lambda}/m \qquad (5.3.4)$$

En termes de quadriforce nous allons procéder comme suit. Nous avons vu que l'équation du mouvement non géodésique est :

$$F^{\lambda} = dp^{\lambda}/d\tau + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}p^{\mu}U^{\nu}$$

Soit

$$dp^{\lambda}/d\tau = F^{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}p^{\mu}U^{\nu}$$

En termes de quadri-vitesse ceci devient:

$$dU^{\lambda}/d\tau = F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}$$

(5.3.5)

Utilisons la règle de chaînage:

$$(dU^{\lambda}/dt)(dt/d\tau) = F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}$$

Soit

$$dU^{\lambda}/dt = (d\tau/dt)(F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu})$$

(5.3.6)

Rappelons la définition de l'accélération propre en RG:

$$\boldsymbol{\alpha^{\lambda} = dU^{\lambda}/dt = (d\tau/dt)(F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu})}$$

Continuons à simplifier:

$$\alpha^{\lambda} = (d\tau/dt)F^{\lambda}/m - (d\tau/dt)\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}$$

$$\boldsymbol{\alpha^{\lambda} = (d\tau/dt)F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}u^{\mu}U^{\nu}}$$

(5.3.7)

Ne pas confondre avec **l'accélération de coordonnée** de la masse. Ce type d'accélération n'est pas défini pour cet usage. Il est utile quand nous étudions certains problèmes d'équivalence.

Puis, déduisons l'équation pour l'accélération de coordonnée:

$$\boldsymbol{a^{\lambda} = (d\tau/dt)^2[F^{\lambda} - (u^{\lambda}/c)F^0]/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} + (u^{\lambda}/c)\Gamma^{0}_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}$$

(5.3.8)

Tenons compte de l'équation (5.3.6)

$$dU^{\lambda}/dt = (d\tau/dt)(F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu})$$

Continuons le développement de l'accélération de coordonnée de la masse *m*:

$$(d/dt)(dx^{\lambda}/d\tau) = (d\tau/dt)(F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu})$$

Utilisons la règle de chaînage

$$(d/dt)[(dx^{\lambda}/dt)(dt/d\tau)] = (d\tau/dt)(F^{\lambda}/m - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu})$$

Utilisons maintenant la règle du produit (Leibnitz):

$$(d^2x^\lambda/dt^2)(dt/d\tau) + (dx^\lambda/dt)(d/dt)(dt/d\tau) = (d\tau/dt)(F^\lambda/m - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)$$

$$(d^2x^\lambda/dt^2)(dt/d\tau) + (dx^\lambda/dt)(d\tau/dt)(d^2t/d\tau^2) = (d\tau/dt)(F^\lambda/m - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)$$

soit

$$d^2x^\lambda/dt^2 = (d\tau/dt)^2(F^\lambda/m - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu) - (d\tau/dt)^2(dx^\lambda/dt)^2(d^2t/d\tau^2)$$

Ecrivons maintenant l'accélération de coordonnée a^λ

$$\boldsymbol{a^\lambda = d^2x^\lambda/dt^2 = (d\tau/dt)^2(F^\lambda/m - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu) - (d\tau/dt)^2(dx^\lambda/dt)(d^2t/d\tau^2)}$$

Continuons à simplifier:

$$a^\lambda = (d\tau/dt)^2(F^\lambda/m) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(d\tau/dt)U^\mu(d\tau/dt)U^\nu - (d\tau/dt)^2u^\lambda(d^2t/d\tau^2)$$

$$a^\lambda = (d\tau/dt)^2(F^\lambda/m) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - (d\tau/dt)^2u^\lambda(d^2t/d\tau^2)$$

L'Eqn 5.3.5 nous dit:

$$d^2t/d\tau^2 = (1/c)(F^0/m - \Gamma^0{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)$$

En l'insérant, cela donne:

$$a^\lambda = (d\tau/dt)^2(F^\lambda/m) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - (d\tau/dt)^2u^\lambda(1/c)(F^0/m - \Gamma^0{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)$$

$$a^\lambda = (d\tau/dt)^2(F^\lambda/m) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - (d\tau/dt)^2(u^\lambda/c)(F^0/m) + (u^\lambda/c)\Gamma^0{}_{\mu\nu}(d\tau/dt)U^\mu(d\tau/dt)U^\nu$$

Cela nous permet d'obtenir l'expression générale de l'accélération de coordonnée en termes de quadri force. Eqn 5.3.8

$$a^\lambda = (d\tau/dt)^2[F^\lambda - (u^\lambda/c)F^0]/m - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + (u^\lambda/c)\Gamma^0{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

Exercices

Problème 5.3.1

Considérons une particule dans l'espace temps de la RR, dans un problème de force ordinaire constante à masse constante. Trouver les accélérations de coordonnée, propre et la quadri accélération. Laquelle est constante?

Problème 5.3.2

Quelles sont les accélérations de coordonnées, propres et quadrivectorielles pour un objet dans le problème 5.2.2.

Remarquez qu'aucune n'est équivalente à $d^2z/d\tau^2$, qui est un autre type d'accélération.

5.4 Complément sur le mouvement

Repartons de l'équation 5.3.8

$$a^\lambda = (d\tau/dt)^2[F^\lambda - (u^\lambda/c)F^0]/m - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + (u^\lambda/c)\Gamma^0_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

Si la quadri force est nulle ceci devient

$$a^\lambda = - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + (u^\lambda/c)\Gamma^0_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

Remarquons que cette équation ne dépend plus de la masse. Donc, même pour une particule de masse nulle, comme un photon, se déplaçant dans le vide, cette équation doit être valide pour décrire le mouvement. Il suffit de déterminer les conditions initiales (incluant la vitesse de coordonnée initiale) pour prédire le mouvement. Cependant, ceci n'est pas une équation tensorielle et nous désirerions écrire l'équation du mouvement sous forme tensorielle. Nous pouvons le faire de la manière suivante.

Rappelons l'équation géodésique (5.2.8)

$$d^2x^\lambda/d\tau^2 + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau) = 0$$

Le problème soulevé est que nous voulons que notre équation géodésique puisse s'appliquer pour les particules sans masse. Telle qu'elle est, l'équation diverge (le temps propre d'une particule sans masse est nul) et n'est pas utilisable dans ce cas. Nous pouvons en changer la forme pour la rendre utilisable même dans le cas de particules sans masse de la manière suivante. D'abord introduisons le **paramètre de chemin** *q*. Pour une particule massive il est lié au temps propre par:

$$q = \tau/m \tag{5.4.1}$$

En utilisant cela, la définition de la quadri vitesse et sa relation avec la quadri-impulsion, on voit facilement que l'équation géodésique devient:

$$dp^\lambda/dq + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \tag{5.4.2}$$

Nous avons obtenu une équation tensorielle qui va nous permettre de décrire le mouvement géodésique et qui est utilisable aussi pour les particules sans masse.

Les transformations dépendantes du temps que nous présentons ne sont pas à vrai dire celles du groupe de Lorentz. Nous les appelons ainsi parcequ'elles ressemblent et se comportent comme les équations de transformation de Lorentz. Mais pour être rigoureux, c'est un cas du groupe de Poincaré. La RR peut être étendue pour traiter des référentiels accélérés. Misner Thorne &Wheeler *Gravitation* p.173 montrent comment une transformation locale de coordonnée relie les coordonnées d'un référentiel accéléré aux coordonnées d'un référentiel inertiel local. La transformation (notre version de leur équation 6.17) peut s'écrire

$$ct = (c^2/\alpha + x')\sinh(\alpha ct'/c^2)$$
$$x = (c^2/\alpha + x')\cosh(\alpha ct'/c^2) - c^2/\alpha$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

(α est l'accélération propre. Dans ce cas elle est liée à l'accélération "a" par $\alpha = \gamma^3 a$)
L'intervalle invariant dans le référentiel accéléré,

$$ds^2 = (1 + \alpha x'/c^2)^2 dct'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \tag{5.4.3}$$

transforme la forme dans le référentiel inertiel pour donner:

$$ds^2 = dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.2.3}$$

Malheureusement pour α dépendant du temps, la transformation de coordonnée ci dessus n'est pas valide. Cependant, il y a une transformation de coordonnées globale pour laquelle cet intervalle invariant est aussi valide globalement. Il ressemble bigrement à une équation de transformation de Lorentz.Les équations de transformation de Lorentz s'écrivent :

$$ct = \gamma ct' + \gamma\beta x'$$
$$x = \gamma x' + \gamma\beta ct'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

La transformation globale d'un référentiel accéléré dont l'accélération dépend du temps vers un référentiel inertiel s'écrit :

$$ct = \int^{t'} \gamma dct' + \gamma\beta x'$$
$$x = \gamma x' + \int^{t'} \gamma\beta dct'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

γ et β doivent être exprimés en fonction du temps propre ct'

Ce sont les équations de Lorentz modifiées pour traiter les référentiels accélérés.

Cette transformation globale de coordonnées transforme globalement l'équation.5.4.3 dans la forme de l'équation 2.2.3. Ceci n'est pas seulement un résultat local. Le résultat est également valide globalement, pour n'importe quel temps propre dépendant de α.

Considérons deux référentiels de coordonnées Cartésiens en mouvement relatif. La transformation adéquate entre les deux, pour une direction arbitraire du mouvement, est simplement celle du groupe de Lorentz. Ensuite, considérons le cas où un est accéléré alors que l'autre est inertiel. Une transformation du référentiel accéléré vers le référentiel inertiel cohérente avec la transformation ci-dessus peut simplement être construite en réalisant une transformation de Lorentz et en remplaçant les termes $\gamma\beta ct'$ $\gamma ct'$ résultants par $\int^{t'}\gamma\beta dct'$ et $\int^{t'}\gamma dct'$ et en exprimant γ et β en fonction du temps propre ct'.

Exemple:

Considérons un référentiel accéléré S' se déplaçant par rapport à un référentiel inertiel avec une vitesse dépendant du temps propre (de l'observateur accéléré) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta}c$. La transformation appropriée entre les deux est :

$$ct = \int^{t'}\gamma dct' + \gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}' \tag{5.4.4a}$$

$$\boldsymbol{r} = \int^{t'}\gamma\boldsymbol{\beta} dct' + \boldsymbol{r}' + (\gamma - 1)(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}'/\beta^2)\boldsymbol{\beta} \tag{5.4.4b}$$

Le référentiel inertiel peut être choisi arbitrairement. On al'impression qu'un référentiel inertiel particulier serait préférable, il n'en est rien. Avec un référentiel inertiel quelconque, la transformation va être parfaitement utile. Ce choix ne fait que fixer les coordonnées que nous allons utiliser globalement pour décrire le référentiel accéléré. Il existe des référentiels localement inertiels dans lesquels on va toujours pouvoir utiliser les transformations de Lorentz, et ceci est un exemple de pseudo transformation de Lorentz pour référentiels accélérés, et la RG nous autorise à utiliser n'importe quelle transformation globale à notre convenance. De fait, le choix n'est pas unique pour un référentiel de coordonnées global associé à un observateur, mais c'est un choix plutôt simple et général.

Exemple d'utilisation de 5.4.4,

Mouvement circulaire accéléré de S' par rapport à S qui va être le centre inertiel du référentiel du moment cinétique.

Considérons l'observateur du référentiel S' qui part à $(x,y) = (0,-r_0)$ et qui tourne autour de l'origine x,y sans rotation propre avec la vitesse donnée par :

$$\boldsymbol{\beta} = (v/c)[\cos(\omega\gamma t')\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega\gamma t')\boldsymbol{e}_y]$$

Cet observateur du référentiel S' va aussi choisir les coordonnées de sorte qu'il soit toujours à $(x, y') = (0,0)$

Les vecteurs *3D* radiaux pour 5.4.4 sont définis comme suit:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{5.4.5a}$$

$$\boldsymbol{r'} = x'\boldsymbol{e}_x + y'\boldsymbol{e}_y + z'\boldsymbol{e}_z \tag{5.4.5b}$$

En utilisant l'équation 5.4.4a ci dessus on obtient :

$$t = \gamma t' + \gamma(v/c^2)[x'\cos(\omega\gamma t') + y'\sin(\omega\gamma t')]$$

l'équation 5.4.4b donne :

$$x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = \int^{t'}\gamma(v/c)[\cos(\omega\gamma t')\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega\gamma t')\boldsymbol{e}_y]dct' + x'\boldsymbol{e}_x + y'\boldsymbol{e}_y + z'\boldsymbol{e}_z + (\gamma - 1)((v/c)[x'\cos(\omega\gamma t') + y'\sin(\omega\gamma t')]/\beta^2)(v/c)[\cos(\omega\gamma t')\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega\gamma t')\boldsymbol{e}_y]$$

simplifions :

$$t = \gamma t' + \gamma(v/c^2)[x'\cos(\omega\gamma t') + y'\sin(\omega\gamma t')]$$

$$x = x'[\gamma\cos^2(\omega\gamma t') + \sin^2(\omega\gamma t')] + r_0\sin(\omega\gamma t') + (\gamma - 1)y'\sin(\omega\gamma t')\cos(\omega\gamma t')$$

$$y = y'[\cos^2(\omega\gamma t') + \gamma\sin^2(\omega\gamma t')] - r_0\cos(\omega\gamma t') + (\gamma - 1)x'\sin(\omega\gamma t')\cos(\omega\gamma t')$$

$$z = z'$$

Il est intéressant de remarquer que la même équation de contraction de longueur sort du cadre du cas de l'accélération arbitraire lorsqu'on se rapproche du mouvement à vitesse constante.

Preuve:

Différentions l'équation 3.3.8

$$dct = \gamma dct' + d(\gamma\beta x')$$
$$dx = d(\gamma x') + \gamma\beta dct'$$

$$dct = \gamma dct' + \beta x'd\gamma + \gamma x'd\beta + \gamma\beta dx'$$
$$dx = x'd\gamma + \gamma dx' + \gamma\beta dct'$$

$$dct = \gamma dct' + \beta x'(d\gamma/d\beta)(d\beta/dct')dct' + \gamma x'(d\beta/dct')dct' + \gamma\beta dx'$$
$$dx = x'(d\gamma/d\beta)(d\beta/dct')dct' + \gamma dx' + \gamma\beta dct'$$

$$dct = \gamma dct' + \beta^2 x'\gamma^3(d\beta/dct')dct' + \gamma x'(d\beta/dct')dct' + \gamma\beta dx'$$
$$dx = \beta x'\gamma^3(d\beta/dct')dct' + \gamma dx' + \gamma\beta dct'$$

$$dct = \gamma dct' + \gamma(\beta^2\alpha x'/c^2)dct' + \gamma^{-1}(\alpha x'/c^2)dct' + \gamma\beta dx'$$
$$dx = \gamma(\beta\alpha x'/c^2)dct' + \gamma dx' + \gamma\beta dct'$$

$$\gamma dct'[1 + (\beta^2\alpha x'/c^2) + \gamma^{-2}(\alpha x'/c^2)] + \gamma\beta dx' = dct$$
$$dx = \gamma dx' + \gamma\beta(1 + \alpha x'/c^2)dct'$$

$$\gamma dct'[1 + (\beta^2\alpha x'/c^2) + (1 - \beta^2)(\alpha x'/c^2)] + \gamma\beta dx' = dct$$
$$dx = \gamma dx' + \gamma\beta(1 + \alpha x'/c^2)dct'$$

$$\gamma dct'(1 + \alpha x'/c^2) + \gamma\beta dx' = dct$$
$$dx = \gamma dx' + \gamma\beta(1 + \alpha x'/c^2)dct'$$

$$\gamma\beta(1 + \alpha x'/c^2)dct' = \beta dct - \gamma\beta^2 dx'$$
$$dx = \gamma dx' + \gamma\beta(1 + \alpha x'/c^2)dct'$$

substituons :

$$dx = \gamma dx' + \beta dct - \gamma\beta^2 dx'$$

$$dx = \gamma(1 - \beta^2)dx' + \beta dct$$

$$dx = \gamma^{-1} dx' + \beta dct$$

Supposons un pétard jeté à chaque extrémité du vaisseau en accélération. Il est évident que la longueur du vaisseau dans le référentiel (entre les pétards) est : $L_0 = \Delta x'$. S'ils sont jetés simultanément selon le référentiel inertiel $(\Delta ct = 0)$ alors Δx va être la distance L dans le référentiel inertiel entre eux. Donc, considérons le cas $dct = 0$,

$$dx = \gamma^{-1} dx'$$

qui alors implique:

$$L = \gamma^{-1} L_0$$

Exercices

Problème 5.4.1

Montrer que localement, $q = c^2t / h\_bar.\omega$ pour des particules de masse nulle.

Problème 5.4.2.

Montrer que l'équation 3.3.8 est cohérente avecc l'équation 1.3.1.

Problème 5.4.3

Montrer que

$$ds^2 = (1 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}/c^2)^2 dct^2 - d\sigma^2$$

est une solution de champ du vide avec un tenseur de Riemann nul *si* $\alpha = \alpha_x \boldsymbol{e}_x + \alpha_y \boldsymbol{e}_y + \alpha_z \boldsymbol{e}_z$ où $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sont des fonctions du temps propre, et $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ et $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Cet intervalle représente donc l'espace temps dans un référentiel associé à un observateur soumis à une accélération dépendante du temps dans une direction arbitraire dans l'espace temps de la RR.

Problème 5.4.4

Considérons l'équation 3.3.8 qui relie les coordonnées de référentiel inertiel non primé au coordonnées primées du référentiel accéléré.

$$ct = \int^{t'} \gamma dct' + \gamma\beta x'$$
$$x = \gamma x' + \int^{t'} \gamma\beta dct'$$

a. Montrer que ces transformations de coordonnées impliquent

$$dt/dt' = \gamma^{1} (1 + \alpha x'/c^2)/(1 - \beta u_x/c)$$

où $\alpha = \gamma^2 dv/dt'$ est l'accélération propre, et $u_x = dx/dt$ est la composante x de la coordonnée de vitesse pour un objet dans le référentiel inertiel

b. Montrer que pour u_x décrivant une horloge du référentiel accéléré $(u_x = \beta c)$, à l'origine du référentiel accéléré $(x' = 0)$ ceci se réduit à:

$$dt = \gamma dt'$$

ce qui correspond à la dilatation temporelle classique de la RR.

c. Montrer que pour u_x décrivant une horloge d'un référentiel inertiel ($u_x = 0$) ceci se réduit à:

$$dt/dt' = \gamma^{1} (1 + \alpha x'/c^2)$$

(Remarquons sur cette expression que la dilatation temporelle mutuelle ne se produit que quand l'horloge est instantanement à $x' = 0$, mais que les horloges du référentiel inertiel, loin dans la direction de l'accélération avancent à un rythme frénétique. C'est cette brisure de symétrie entre les référentiels qui fait que les observateurs du référentiel accéléré et du référentiel inertiel sont d'accord sur la différence d'âge entre un voyageur qui fait un aller retour (qui a moins vieilli) et un autre qui n'a pas bougé du référentiel inertiel.)

d. Si X est la distance dans le référentiel inertiel entre l'horloge à l'origine du référentiel inertiel et l'origine du référentiel accéléré ($X = \int^{t'} \gamma\beta dct'$), et que que nous considérons l'horloge du référentiel inertiel qui est à l'origine ($x = 0$), montrer que de « c » on peut déduire

$$dt/dt' = \gamma^{1} - \gamma^{2}\,\alpha X/c^{2}$$

Problème 5.4.5

Référons nous à l'exemple pour utiliser l'équation 5.4.4 pour un observateur en rotation. Considérons un second observateur accéléré doublement "primé" qui tourne autour du même point central, à la même vitesse, mais dans une direction opposée. En changeant les signes de façon appropriée, la transformation pour le référentiel de cet observateur peut être déterminée à partir des autres résultats. Utiliser les transformations pour relier les coordonnées des deux référentiels accélérés et considérer l'horloge de l'observateur « double prime » observée depuis le référentiel « simple prime » pour montrer que le temps qu'elle affiche, tel que vu par l'observateur « simple prime » est donné par :

$$\gamma t' - r_0(v/c^2)\sin[\omega\gamma(t'' + t')] - \gamma t'' = 0$$

Remarquons que quand les montres se resynchronisent et montrent que lorsqu'ils se croisent, chaque observateur observe le temps de l'autre dilatée en temps conformément à la RR.

++

Réponse au problème 5.4.5

Référons nous à la réponse simplifiée pour la transformation entre le référentiel non prime et le référentiel accéléré primé.

$$t = \gamma t' + \gamma(v/c^2)[x'\cos(\omega\gamma t') + y'\sin(\omega\gamma t')]$$

$$x = x'[\gamma\cos^2(\omega\gamma t') + \sin^2(\omega\gamma t')] + r_0\sin(\omega\gamma t') + (\gamma - 1)y'\sin(\omega\gamma t')\cos(\omega\gamma t')$$

$$y = y'[\cos^2(\omega\gamma t') + \gamma\sin^2(\omega\gamma t')] - r_0\cos(\omega\gamma t') + (\gamma - 1)x'\sin(\omega\gamma t')\cos(\omega\gamma t')$$

La transformation du référentiel en contre rotation vers le référentiel inertiel va aussi être :

$$t = \gamma t'' - \gamma(v/c^2)[x''\cos(\omega\gamma t'') - y''\sin(\omega\gamma t'')]$$

$$x = x''[\gamma\cos^2(\omega\gamma t'') + \sin^2(\omega\gamma t'')] - r_0\sin(\omega\gamma t'') - (\gamma - 1)y''\sin(\omega\gamma t'')\cos(\omega\gamma t'')$$

$$y = y''[\cos^2(\omega\gamma t'') + \gamma\sin^2(\omega\gamma t'')] - r_0\cos(\omega\gamma t'') - (\gamma - 1)x''\sin(\omega\gamma t'')\cos(\omega\gamma t'')$$

De ceci établissons la relation entre les deux référentiels accélérés

$$\gamma t' + \gamma(v/c^2)[x'cos(\omega\gamma t') + y'sin(\omega\gamma t')] = \gamma t'' - \gamma(v/c^2)[x''cos(\omega\gamma t'') - y''sin(\omega\gamma t'')]$$

$$x'[\gamma cos^2(\omega\gamma t') + sin^2(\omega\gamma t')] + r_0 sin(\omega\gamma t') + (\gamma - 1)y'sin(\omega\gamma t')cos(\omega\gamma t') = x''[\gamma cos^2(\omega\gamma t'') + sin^2(\omega\gamma t'')] - r_0 sin(\omega\gamma t'') - (\gamma - 1)y''sin(\omega\gamma t'')cos(\omega\gamma t'')$$

$$y'[cos^2(\omega\gamma t') + \gamma sin^2(\omega\gamma t')] - r_0 cos(\omega\gamma t') + (\gamma - 1)x'sin(\omega\gamma t')cos(\omega\gamma t') = y''[cos^2(\omega\gamma t'') + \gamma sin^2(\omega\gamma t'')] - r_0 cos(\omega\gamma t'') - (\gamma - 1)x''sin(\omega\gamma t'')cos(\omega\gamma t'')$$

Considérons ce que la montre de l'observateur du référentiel doublement primé indique dans le référentiel simplement primé. Il est à l'origine du référentiel doublement primé, donc :

$$\gamma t' + \gamma(v/c^2)[x'cos(\omega\gamma t') + y'sin(\omega\gamma t')] = \gamma t''$$

$$x'[\gamma cos^2(\omega\gamma t') + sin^2(\omega\gamma t')] + (\gamma - 1)y'sin(\omega\gamma t')cos(\omega\gamma t') = - r_0[sin(\omega\gamma t'') + sin(\omega\gamma t')]$$

$$y'[cos^2(\omega\gamma t') + \gamma sin^2(\omega\gamma t')] + (\gamma - 1)x'sin(\omega\gamma t')cos(\omega\gamma t') = r_0[cos(\omega\gamma t') - cos(\omega\gamma t'')]$$

Résoudre la dernière équation pour y', insérer dans les deux autres et simplifier.

$$y'= \{r_0[cos(\omega\gamma t') - cos(\omega\gamma t'')] - (\gamma - 1)x'sin(\omega\gamma t')cos(\omega\gamma t')\}/ [cos^2(\omega\gamma t') + \gamma sin^2(\omega\gamma t')]$$

$$\gamma t'[1 +(\gamma - 1)sin^2(\omega\gamma t')] + \gamma(v/c^2)x'cos(\omega\gamma t') + \gamma(v/c^2)sin(\omega\gamma t')r_0[cos(\omega\gamma t') - cos(\omega\gamma t'')] = \gamma t''[1 +(\gamma - 1)sin^2(\omega\gamma t')]$$

$$x'\gamma = - r_0 sin(\omega\gamma t'')[1 + (\gamma - 1)sin^2(\omega\gamma t')] - \gamma sin(\omega\gamma t')r_0 + (\gamma - 1)sin(\omega\gamma t')cos(\omega\gamma t')r_0 cos(\omega\gamma t'')$$

Substituons la dernière dans l'équation précédente et simplifions

$$\gamma t' - r_0(v/c^2)sin[\omega\gamma(t'' + t')] - \gamma t'' = 0$$

Ceci indique que la montre se resynchronise avec celle de l'observateur simplement primé à:

$$\omega\gamma t' = \omega\gamma t'' = n\pi/2$$

Ceci inclut les endroits où les fusées se rencontrent.

Différentions

$$dt' - \omega(dt'' + dt')r_0(v/c^2)cos[\omega\gamma(t'' + t')] - dt'' = 0$$

Considérons ces points de resynchronisation où ils se rencontrent à $\omega\gamma t' = \omega\gamma t'' = m\pi$

$$dt' - \omega(dt'' + dt')r_0(v/c^2)cos(2m\pi) - dt'' = 0$$

$$dt' - \omega(dt'' + dt')r_0(v/c^2)cos(2m\pi) - dt'' = 0$$

Simplifions en

$$dt' = (1 + v^2/c^2)dt''/(1 - v^2/c^2)$$

Soit : $u = 2v/(1 + v^2/c^2)$

Insérons et simplifions, cela donne:

$$dt' = dt'/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$$

Cela démontre qu'un observateur dans le référentiel d'une fusée va observer l'autre à temps dilaté conformément à la RR lorsqu'ils se croisent.

Fin de la réponse

+++
+____
_

5.5 Paramètres conservés du mouvement géodésique

En mécanique Newtonienne l'énergie et la quantité de mouvement sont des paramètres conservés. En RG, c'est un point souvent débattu, ces paramètres tels qu'on les imagine, étant des composantes du quadri vecteur impulsion énergie et ne sont pas conservés dans le cas général. Cependant il y a un paramètre d'énergie et des paramètres d'impulsion qui sont conservés en RG dans le cas où la métrique présente des isométries et nous allons discuter de la manière de trouver ces paramètres conservés du mouvement géodésique. De la dérivation de l'équation géodésique à partir du principe extrémal du temps propre, nous pouvons définir **le Lagrangien correspondant pour la gravitation L**

$$L^2 = g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}. \tag{5.5.1}$$

Dans certains textes il est défini sans l'exposant 2.. De ceci nous povons déduire du calcul différentiel que :

$$(d/d\tau)(\partial L/\partial U^{\zeta}) = (d/d\tau)(g_{\zeta\nu}U^{\nu}) \tag{5.5.2}$$

pour une coordonnée x^{ζ}.

Si par exmple la métrique et en conséquence le Lagrangien L est indépendant de la coordonnée x^{ζ}, alors

$$(d/d\tau)(\partial L/\partial U^{\zeta}) = 0$$

Et

$$\partial L/\partial U^{\xi} \textit{ et } g_{\zeta\nu}U^{\nu} \text{ sont constants.}$$

Ils sont alors les paramètres conservés du mouvement géodésique..

Un quadri vecteur de Killing unitaire va être défini comme un quadri vecteur unitaire qui est dans la direction d'une isométrie de la métrique. Par exemple si la métrique est indépendante de la coordonnée x^{ζ} alors le quadri vecteur unitaire dans la direction x^{ζ}, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{e_\zeta}$ est un quadri vecteur de Killing unitaire et cela implique que :

$$g_{\mu\nu}K^{\mu} = g_{\zeta\nu}$$

(5.5.3)

Compte tenu du résultat ci dessus qui implique que $g_{\zeta\nu}U^{\nu}$ doit être constant, nous allons aussi avoir

$$g_{\zeta\nu}U^{\nu} = g_{\mu\nu}K^{\mu}U^{\nu} = constante$$

(5.5.4a)

Nous pouvons aussi définir un **tenseur de Killing de rang 2** conformément à cette équation qui correspond aussi à une transformation d'isométrie et qui donne:

$$g_{\mu\kappa}g_{\rho\nu}K^{\mu\rho}U^{\kappa}U^{\nu} = constante$$

(5.5.5)

En général , un quadri vecteur va être un **quadri vecteur de Killing** si et seulement si il satisfait :

$$K^{\mu}{}_{;\nu} + K^{\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

(5.5.6)

et pour tout quadri vecteur de Killing **en général** nous avons :

$$g_{\mu\nu}K^{\mu}U^{\nu} = constante$$

999999(5.5.4b)

Problème 5.5.1

Utliser les vecteurs de Killing pour montrer qu'en RR l'énergie et la quantité de mouvement sont des paramètres du mouvement conservés pour : $ds^2 = dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Problème 5.5.2

Trouver les isométries d'espaces temps variés de votre choix et utilisez les pour trouver les paramètres conservés du mouvement géodésique.