

COSMOLOGIE, le modèle Standard :

Plan du document :

Présentation	6
Présentation.....	7
Introduction : Naissance de la Cosmologie contemporaine.....	9
Quelle métrique pour décrire l'univers ? : Hypothèse sur le contenu de l'univers	11
Principe Cosmologique.....	11
Conséquences de l'homogénéité et de l'isotropie	12
Type de métrique générale associée.....	12
Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique	13
Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D.....	13
Solution: La métrique de Robertson Walker (RW) (<i>postérieure à Eq. Friedmann</i>)	14
Description de la métrique de Robertson Walker (RW) (<i>postérieure à Eq. Friedmann</i>)	15
La métrique de Robertson Walker définit un référentiel Cosmique spatio temporel "absolu".	15
Types d'univers associés à la métrique RW	16
Cas plat, $k = 0$: la métrique sur Σ est.....	16
Cas fermé $k = + 1$: On définit $r = \sin\chi$ pour écrire la métrique sur Σ comme suit	16
Expansion de L'univers (la vitesse de récession est proportionnelle à la distance).....	17
A- Les propriétés extraordinaires des coordonnées de la Métrique de Robertson Walker (RW) :	18
a) Observateurs Comobiles : La Coordonnée "t" de temps cosmologique est la même	18
b) Distances: Coordonnée "r"	18
Calcul des paramètres géométriques : Tenseur d'Einstein (membre de gauche).....	18

Calcul des symboles de Christoffel ($\Gamma_{ij}^k = 1/2 \cdot G^{kl} \cdot (\partial G_{il} / \partial x^j + \partial G_{jl} / \partial x^i - \partial G_{ij} / \partial x^l)$) pour la métrique RW	19
Calcul du tenseur de RICCI ($R_{ij} = \partial \Gamma_{ij}^k / \partial x^k - \Gamma_{il}^k \cdot \Gamma_{jk}^l$) pour la métrique RW ,	19
Calcul scalaire de RICCI ($R = G^{ij} R_{ij}$) pour la métrique RW	19
Le Tenseur Energie Impulsion d'un fluide parfait (membre de droite)	20
Equation d'état.....	20
Relation entre la densité de matière et la pression.....	20
Fluides galactiques	21
Fluide de type "matière"	21
Fluide de type "rayonnement".....	22
Fluide de type " énergie du vide".....	23
Résolution de Equation d' Einstein	24
Equation de Friedmann (1922)	24
Les Univers possibles.....	25
Terminologie:.....	26
Constante de Hubble	26
Facteur d'échelle "a", paramètre de décalage spectral "z"	26
Paramètre de décélération	26
Paramètre de densité Ω	26
Etude qualitative de l'équation de Friedmann.....	27
Rappels généraux.....	27
Singularité initiale : le big bang	28
Evolution de l'univers	28
Si $k \leq 0$, (Univers plats et ouverts) : Expansion éternelle	29
<i>Cosmologie: le Modèle Standard: Mai 2002 , Jacques FRIC</i>	

Vitesse d'expansion	29
Si $k = 1$, Univers fermés : Expansion jusqu'à un maximum puis contraction.....	30
Solutions exactes de l'équation de Friedmann	30
Univers de FRW dominés par la matière	31
Univers ouverts	31
Univers plats	31
Univers fermés	31
Univers dominés par le rayonnement:.....	32
Univers ouverts	32
Univers plats	32
Univers fermés	32
Univers dominés par le vide.....	33
Synthèse des Solutions exactes	34
Dans quel Univers vivons nous :	35
Cas de l'expansion critique (1995, justification criticité: inflation), $k=0$, $\Omega_m=1$: Les paramètres sont :	35
Cas d'univers dominé par la matière et une constante Cosmologique non nulle	36
Synthèse de l'évolution de l'Univers ref [6].....	37
Cas particulier $\Omega_{0m} (\sim 0,3) + \Omega_{\Lambda} (\sim 0,7) \sim 1$ (hypothèse en fonction des observations récentes).....	38
Aujourd'hui quelle que soit sa topologie, aujourd'hui l'Univers accélère (après avoir longtemps décéléré).....	39
Quelle topologie pour l'Univers ?	39
Remarque sur la variation de Ω_{tot} au cours du temps.....	39
Rôle de l'inflation primordiale	40
Bien que les différents Ω varient énormément, avec l'expansion, l'Univers ne change pas de topologie !	40
Constante Cosmologique positive correspond à une "répulsion"	40

Influence de la densité sur le destin de l'Univers	40
Les paramètres Cosmologiques	42
Discussion sur les méthodes d'évaluation des paramètres cosmologiques	42
Distance de luminosité	42
Effet de courbure	42
Rappel des méthodes classiques et des résultats : Situation en 1995 (univers avec $\Lambda=0$).....	42
Estimation directe de ρ	43
L'âge de l'Univers (1995)	44
Nucléosynthèse primordiale	44
La valeur de la constante de Hubble mesurée.....	44
L'observation directe révèle un Univers beaucoup trop léger.....	44
A la recherche de la matière invisible	45
Il y a donc de la matière indétectable par son rayonnement	45
La masse manquante détectée ?.....	45
Tout semble pour le mieux dans le meilleur des mondes , et pourtant	45
Approche actuelle	46
D'où la mise en place de nouvelles stratégies	46
Le paramètre de décélération q	46
Méthode de mesure	48
Décalage vers le rouge.....	49
Rapport des facteurs d'échelle	50
Distance de luminosité.....	50
Méthode de calcul de H_0 et q a partir de la distance de luminosité et du Décalage vers le rouge z	51
Calcul Rigoureux de D_L	53

Age de l'univers (calcul en fonction du rapport Ω_m , Ω_Λ en négligeant l'énergie du rayonnement (fig 4.3)	53
Distance d'horizon en fonction du décalage spectral.	56
Où on a introduit pour être complet, une contribution du rayonnement et d'une matière hypothétique X qu'on néglige en général	56
Supernova Cosmology project :.....	57
Projet Boomerang (mesure fine de l'anisotropie du RFC).....	59
Conclusion.....	62
Glossaire.....	62
Références.....	66

COSMOLOGIE, le modèle Standard :

Plan du document : Accès direct aux chapitres

[Présentation](#)

[Introduction](#)

[Hypothèses sur la structure de l'Univers](#)

Détermination de la métrique applicable, "Robertson Walker":

Types d'univers à priori

[Utilisation de l'équation d'Einstein](#),

Calcul du tenseur d'Einstein,

Modélisation des fluides galactiques, équation d'état ,

Le tenseur énergie Impulsion

[Résolution de l'équation d'Einstein](#) : l'équation de Friedman ,

[L'équation de Friedmann-Lemaitre](#)

[Les Univers possibles](#) :Discussion qualitative de l'équation de Friedman,

Solutions exactes de l'équation de Friedman

[Dans quel univers vivons nous ?](#): Expansion critique avec $\Lambda = 0$,

Expansion critique avec $\Lambda \neq 0$

[Les paramètres cosmologiques qui déterminent le destin de l'univers et](#)

les méthodes de mesure.

[Situation avant 1995](#)

[Situation actuelle](#),

Cosmologie: le Modèle Standard: Mai 2002 , Jacques FRIC

Nouvelles stratégies,

paramètre q ,

Mesures de distances dans un Univers FLRW,

Distance de luminosité,

Formule distance luminosité,

Age de l' Univers

Supernova cosmology project ,

Projet Boomerang RFC,

Synthèse des deux projets

Conclusion ,

Glossaire avec accès aux rubriques en hypertexte,

Références

Présentation

La présentation est très allégée vis à vis du document de référence qui sera en ligne.

Elle met l'accent sur :

- La **genèse de la Cosmologie contemporaine**, qui montre que très tôt, même sur des hypothèses contestables mais dont le caractère heuristique mérite attention, tous les éléments étaient déjà réunis pour son développement.

- La **métrie de Robertson Walker**, son établissement intuitif et ses propriétés extraordinaires (Référentiel Cosmique "absolu")

- Les **contraintes apportées par l'équation d'Einstein** (détermination des paramètres de la métrie de RW, déterminant les Univers possibles), la solution de **Friedman** d'abord (pour commencer par le plus simple) dont on fera une discussion qualitative simple.

La solution de **Lemaître** avec constante cosmologique qui étend la gamme des Univers possibles. Discussion qualitative de cette solution.

Nous essaierons de déterminer dans **lequel de ces univers possibles nous vivons**, cas critique sans constante cosmologique ou avec, et qu'est ce que cela change.

Nous regarderons plus en détail le deuxième cas et **quel genre de mesures peut nous renseigner** sur ce sujet.

Monsieur Picard présentera et commentera l'état des connaissances actuellement. Puis nous conclurons

Introduction : Naissance de la Cosmologie contemporaine

Après avoir établi l'équation de la Relativité générale, Einstein tente de l'appliquer à la Cosmologie, dans le contexte de l'époque (en 1916 l'univers connu est constitué des étoiles fixes, des nébuleuses), avec comme hypothèses :

- **Univers homogène et isotrope** (hypothèse à priori quasi obligée), rempli d'un **fluide parfait de densité ρ , de pression p** .
- **Il est clos** (satisfaction du principe de Mach*)
- **Il est statique** (arbitraire, pour se conformer à ce qui est observé),

Pas de solution statique , en 1917, il va ajouter une constante à son équation : la fameuse constante Cosmologique Λ **.

Sa publication "**Kosmologische Betrachtungen**" en février 1917 marque le début de Cosmologie contemporaine, il y tente de justifier (à posteriori) cette constante épistémologiquement par le principe de Mach qu'il sépare en deux parties : Le principe de relativité générale et la définition totale de la géométrie l'Univers par son contenu.

En 1917 de Sitter montre qu'un univers vide avec constante cosmologique est en expansion, battant en brèche ce dernier principe (on a fait pire depuis). Le côté "ad hoc" de cette constante donne lieu à de nombreuses polémiques.

En 1922 **Friedmann** (alors que la vision de l'Univers n'avait pas changé) propose à Einstein sa solution sans cette constante Λ qu'il juge arbitraire, c'est un Univers dynamique. Einstein mettra plus de 10 ans à l'admettre, puis **Lemaître** (1925-1927) pour allonger l'âge de l'Univers **réintroduit Λ** , permettant d'enrichir les solutions.

Indépendamment de la validité des hypothèses, tous les ingrédients de la Cosmologie Contemporaine étaient déjà là....

Einstein est très influencé par le **principe de Mach** (1883) qui stipule que **l'inertie de la matière naît de l'interaction entre les corps "massifs" cf ref [10]**. Notons qu'Einstein a renié par la suite ce principe de Mach (comme il a renié L)

On se rappelle que le fondement du principe de Relativité Générale repose sur la **réfutation du caractère absolu** d'un mouvement de rotation, autour d'un axe les reliant, entre deux corps isolés. (par réfutation de l'espace absolu fictif de Newton). S'il y a une dissymétrie, il doit y avoir une cause physique: (les masses distantes)

Mais si **l'Univers et sa géométrie est déterminé par l'ensemble des masses** qui le composent alors un mouvement inertiel "absolu" reprend son sens dans ce contexte (puisque l'espace temps dépend de ces masses). Le **pendule de Foucault**, système inertiel, **nonobstant la gravitation terrestre largement dominante localement**, bat dans un **plan fixe par rapport** à ce référentiel déterminé par toutes les masses de l'Univers!) . *Nous verrons qu'avec la métrique de Robertson Walker, un référentiel cosmique spatio temporel privilégié existe. Est ce un retour de l'espace absolu de Newton. Non selon Einstein puisque cet espace là est physique (déterminé par la matière)*

La fermeture de l'Univers (**dans le contexte statique**) est **lié au problème à l'infini**, où à la limite de Minkowski, l'inertie s'annulerait . La métrique de Schwarzschild lui posait déjà ce problème.

La Cosmologie moderne procède d'une **matérialisation (physicalisation) de la chrono-géométrie** et non pas de l'inverse

Pas de cadre imposé comme en mécanique Newtonienne, on définit ce cadre dans le contexte formel imposé par la RG, choix à faire parmi une infinité d'univers possibles.

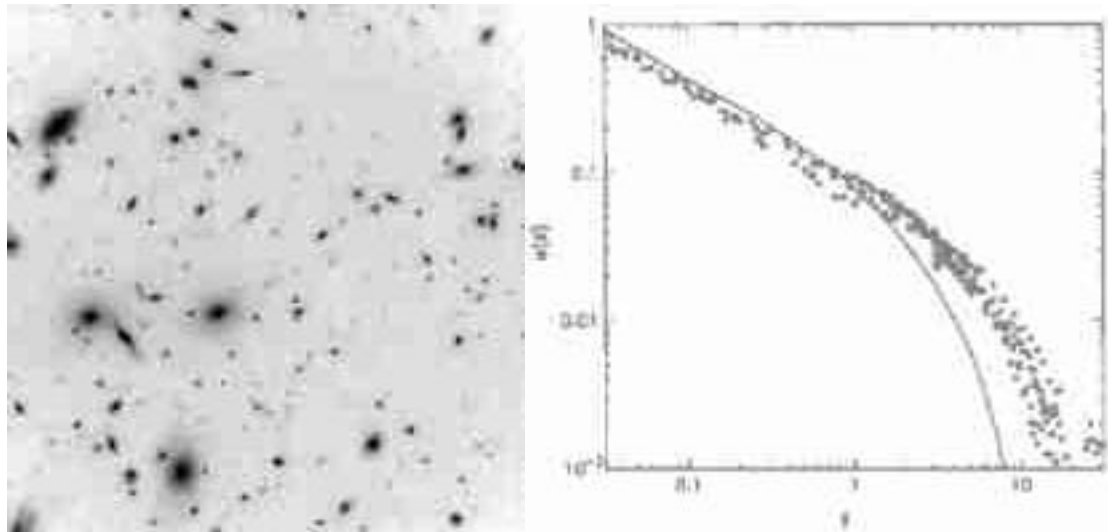
La démarche d'Einstein est très philosophique (ses détracteurs diront dogmatique).

Aujourd'hui, on considère **l'introduction d'une constante Cosmologique parfaitement fondée, comme une **généralisation constructive de l'équation d'Einstein** (le cas $\Lambda=0$ n'étant qu'un cas particulier qui conduit à une limite de Minkowski en cas de d'Univers vide). A l'époque les scientifiques étaient des découvreurs, amenés à faire certaines opérations dont ils ne saisissaient pas toujours la portée à plus long terme.

Quelle métrique pour décrire l'univers ? : Hypothèse sur le contenu de l'univers

Principe Cosmologique

L'univers est homogène (identique à lui même partout) et isotrope (identique à lui même dans toutes les directions). Ce qui fait que chacun croit être le centre de l'univers. Malgré les inhomogénéités locales, à grande échelle, l'Univers paraît satisfaire à ce principe qui est corroboré par le comptage des galaxies, les rayonnements X diffus, le rayonnement de fond γ et le RFC à 3° , la décroissance (moins rapide que prévue par le modèle théorique de la matière noire froide : CDM) de la fonction de corrélation de distribution des galaxies sur la voûte céleste . Par ailleurs le fait qu'il n'y ait pas de point privilégié dans l'Univers , ni centre , ni bords est une hypothèse plutôt élégante sur le plan intellectuel.



L'observation des galaxies lointaines nous indique que l'univers n'est pas statique, non homogène en temps (passé \neq du futur).

Conséquences de l'homogénéité et de l'isotropie

Type de métrique générale associée

En Relativité Générale, cela conduit une foliation (découpe en tranches d'espace homogène et isotrope) de l'univers par le temps , ce qui permet de séparer les variables.

L'Espace temps est alors de type $R \times S$ ou R représente la direction du temps et S est une variété topologique homogène et isotrope de dimension 3, représentant l'espace.

Ces deux contraintes confèrent à l'espace une symétrie maximum, en conséquence la métrique est de la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a(t) g_{ij}(u) du^i du^j \quad (1)$$

t coordonnée de temps, u coordonnée d'espace de S , g_{ij} est la métrique associée de symétrie maximum sur \hat{a} .

La fonction $a(t)$ est le facteur d'échelle qui indique la taille à l'instant t . Les coordonnées u sont appelées coordonnées "comobiles"

Un observateur dont les coordonnées "u" ne changent pas est appelé comobile (sur géodésique).

Seuls les observateurs comobiles vont constater l'isotropie et homogénéité de l'espace.

Ils vont de surcroît observer l'univers au même âge (temps universel mesuré par la température du RFC par exemple) comme conséquence de la structure de l'Univers

Sur Terre, ce n'est pas le cas, on observe une anisotropie dipolaire du RFC (10^{-3}) dans le sens du mouvement global de la Terre (qu'on sait corriger). L'expansion tend à annuler les mouvements propres

Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique

Si on s'intéresse aux métriques 3D à symétrie maximum g_{ij} , elle obéissent à la loi

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (2)$$

ou k est une constante et l'indice ⁽³⁾ sur le tenseur de Riemann nous rappelle que c'est une métrique 3D, g_{ij} n'est donc pas la métrique de l'espace temps.

Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D

Le tenseur de Ricci dont la forme générale est $R_{mn} = \nabla_n G_m^a - \nabla_m G_n^a$ peut s'exprimer plus simplement compte tenu du haut degré de symétrie de l'espace.

Ses composantes d'espace s'écrivent dans ce cas

$${}^{(3)}R_{ij} = 2k \cdot g_{ij} \quad (3)$$

Si l'espace est à symétrie maximale il possède nécessairement une symétrie sphérique : Elle est de forme

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = e^{2b(r)} dr^2 + r^2 (dq^2 + \sin^2 q dF^2) \quad (4)$$

Les composantes du tenseur de Ricci associé sont :

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{11} &= (2/r) \cdot \frac{1}{r} \\ {}^{(3)}R_{22} &= e^{-2b} (r \cdot \frac{1}{r} - 1) + 1 \\ {}^{(3)}R_{33} &= [e^{-2b} (r \cdot \frac{1}{r} - 1) + 1] \sin^2 q \end{aligned} \quad (5)$$

On les pose proportionnels à la métrique en utilisant (3), et on résout pour $b(r)$:

$$b = -(1/2) \cdot \ln(1 - kr^2) \quad (6)$$

Solution: La métrique de Robertson Walker (RW) (postérieure à Eq. Friedmann)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot [(dr^2 / (1 - kr^2)) + r^2(dq^2 + \sin^2 q \cdot dF^2)] = -dt^2 + a^2(t) \cdot ds^2 \quad (7)$$

$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n$ avec $g_{mn} = g^{mn} = 0$ si $m \neq n$ et

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = a^2(t) / (1 - kr^2), \quad g_{22} = a^2(t) r^2, \quad g_{33} = a^2(t) r^2 \sin^2 q, \quad g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$$

$$dx^0 = dt, \quad dx^1 = dr, \quad dx^2 = dq, \quad dx^3 = dF.$$

t, r, q, F. Coordonnées par rapport à l'observateur local

Notons que les substitutions : $k \otimes k / |k|, r \otimes r \cdot (|k|^{1/2})$ et $a \otimes a / (\hat{k} \hat{e}^{1/2})$ (8)

laissent (7) invariant, donc le seul paramètre pertinent est $k/|k|$, et il y a 3 cas intéressants:

$k = -1, k = 0$, et $k = +1$.

Le cas $k = -1$ qui correspond à une courbure constante négative sur \hat{a} , est appelé **ouvert**.

Le cas $k = 0$ qui correspond à une courbure nulle sur \hat{a} , est appelé **plat**.

Le cas $k = +1$ qui correspond à une courbure positive sur \hat{a} , est appelé **fermé**.

Description de la métrique de Robertson Walker (RW) (*postérieure à Eq. Friedmann*)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot [(dr^2 / (1 - kr^2)) + r^2(dq^2 + \sin^2 q \cdot dF^2)] = -dt^2 + a^2(t) \cdot ds^2 \quad (7)$$

t, r, q et f Coordonnées par rapport à l'observateur local, où "r" est une grandeur "sans dimension", à multiplier par a(t): $0 \leq r \leq 1$.

Les autres coordonnées sphériques angulaires q et f sont classiques

Déterminée sans l'équation d'Einstein.

Cette métrique **dynamique, invariante par translation et rotation, mais pas par une transformation de Lorentz**, définit une variété de **type R.S** avec R réel (temps), S espace symétrie Max fonction de:

a(t) facteur d'échelle qui **décrit l'évolution temporelle de l'univers** et de **k** qui décrit sa **géométrie spatiale**

A priori les paramètres a(t) et k sont **indépendants**, mais comme l'équation **d'Einstein doit être satisfaite** (contraintes en fonction de T_{mn}) les valeurs possibles déterminées par cette équation vont limiter cette liberté.

La métrique de Robertson Walker définit un référentiel Cosmique spatio temporel "privilegié"

Seuls les observateurs de coordonnées r, q et f fixes, dits "**comobiles**" (sur une géodésique), constateront l'isotropie et homogénéité de l'espace (comme s'ils étaient au centre de l'Univers!), et observeront l'univers au même âge (temps universel mesuré par la température du RFC par exemple) .

Le pendule de Foucault va s'aligner sur ce référentiel.

Sur Terre, on observe **une anisotropie dipolaire** du RFC (10^{-3}) dans le sens du mouvement **global** de la Terre (qu'on sait corriger).

Par ailleurs, l'expansion décale la lumière vers le rouge et ralentit les mouvements propres des galaxies.

Rappelons qu'il y a **3 cas intéressants**: $k = -1$, $k = 0$, et $k = +1$.

Types d'univers associés à la métrique RW

Cas plat, $k = 0$: la métrique sur S est

$$ds^2 = dr^2 + r^2.dW^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

Elle caractérise un Espace Euclidien. Globalement il peut décrire \mathbb{R}^3 ou une Variété topologique plus complexe comme un Hyper Tore $S^1 \times S^1 \times S^1$ sans limites mais de volume fini, par exemple (cf univers de Luminet).

Cas fermé $k = + 1$: On définit $r = \sin c$ pour écrire la métrique sur S comme suit

$$ds^2 = dc^2 + \sin^2 c.dW^2 \quad (10)$$

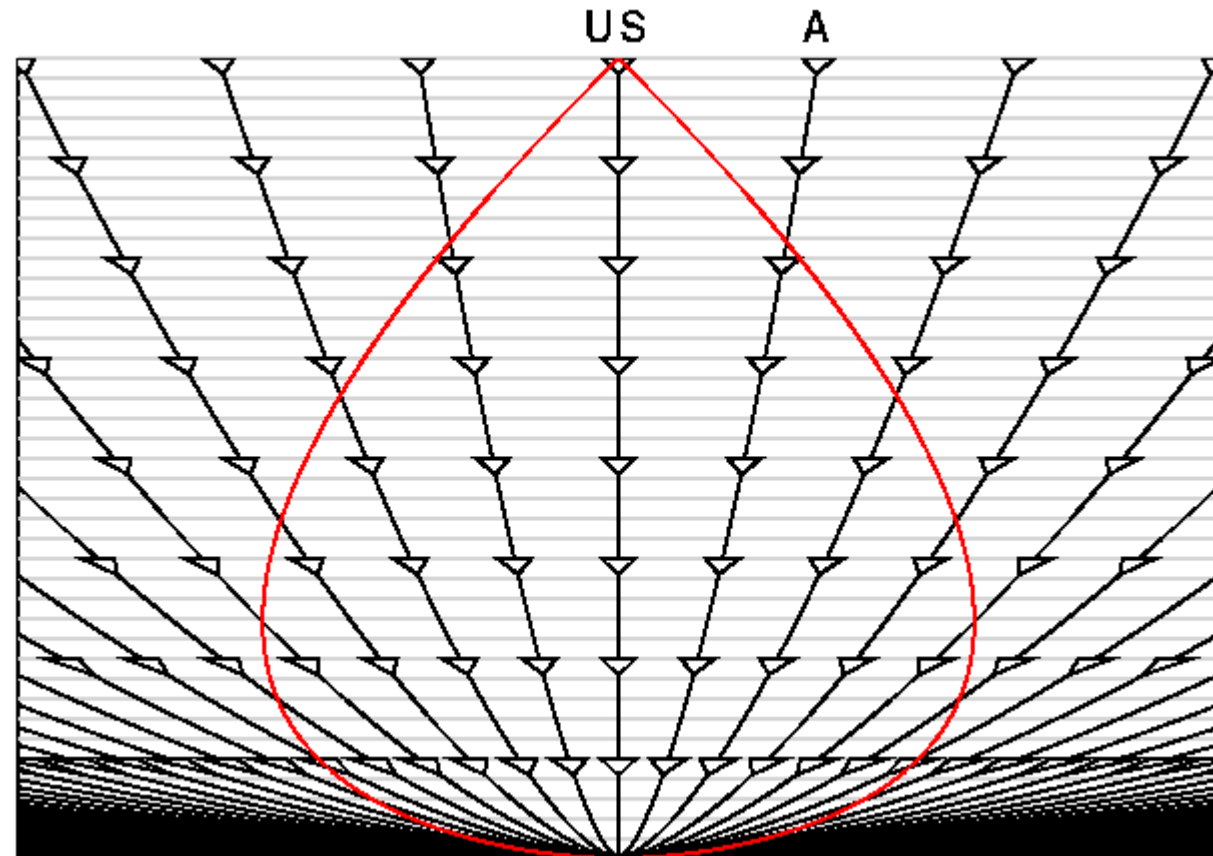
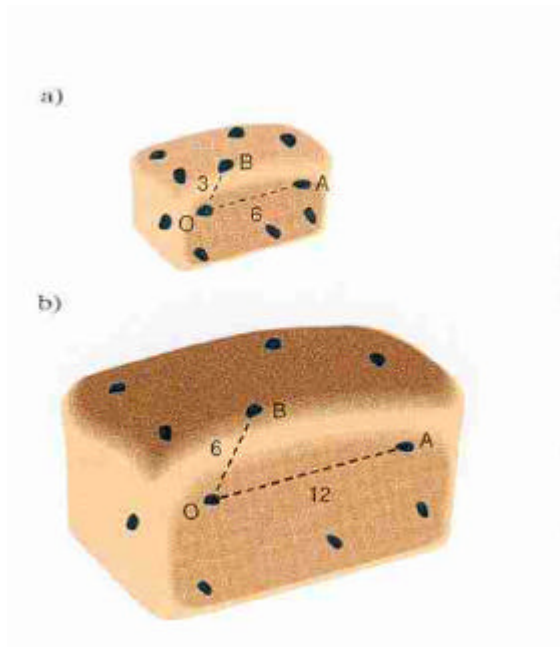
Qui est la métrique d'une Hyper Sphère, $a(t)$ est physiquement le rayon de l'hypersphère à l'instant t . C'est la seule possibilité pour la structure globale, (exception faite de Variétés topologiques non orientables).

Cas ouvert $k = - 1$: on pose $r = \sinh y$ et on obtient

$$ds^2 = dY^2 + \sinh^2 Y.dW^2 \quad (11)$$

C'est la métrique d'un espace 3D à courbure négative constante, difficile à visualiser (penser à la selle de cheval en 2D). Globalement un tel espace peut s'étendre indéfiniment (d'où le qualificatif d'ouvert), mais il peut aussi décrire un espace topologique compact non simplement connecté fini, ce qui fait que le terme "ouvert" est impropre.

Expansion de L'univers (la vitesse de récession est proportionnelle à la distance)



$OA = 6, OB = 3$ à t_1 (fig a), facteur d'échelle double à t_2 , $OA = 12, OB = 6$ à t_2 (fig 2), $V = dOA(B)/dt$ ® $V(OA) = 2 V(OB)$

Les propriétés extraordinaires des coordonnées de la Métrique de Robertson Walker (RW) :

a) Observateurs Comobiles : La Coordonnée "t" de temps cosmologique est la même

Par exemple l'explosion d'une supernova lointaine ne sera pas vue en même temps par deux observateurs comobiles mais sera datée (dans le passé) au même temps Cosmologique 't'.

Ceci ne serait pas le cas si les observateurs comobiles (donc en mouvement relatif) utilisaient localement les coordonnées de Lorentz (relativité restreinte) On peut par transformation de coordonnées (la RG est faite pour cela) s'en persuader.

Mais en métrique de RW la propriété "Comobile correspond à la propriété "repos" en RR.

b) Distances: Coordonnée "r"

Rappelons la loi de Hubble : $V = H_0 \cdot D$

$D = a_0 \cdot r$ (on ne connaît pas en général "r")

Où D est la distance au temps t_0 (par rapport à nous) de la galaxie fuyant à la vitesse V, comment mesure t'on D et V ?

Pour D c'est la distance " actuelle " au temps t_0 , ceci peut se faire avec l'aide d'une "infinité " d'observateurs comobiles qui mesurent de proche en proche au même temps t_0 et nous rappatrient les mesures (qu'on reçoit et exploite à $t_1 > t_0$)!

Distance angulaire D_A d'une galaxie de taille connue d vue sous un angle q avec $D_A = d/q$.

Distance de luminosité D_L , d'un objet de luminosité absolue L connue à partir du flux lumineux reçu : $\text{Flux} = L/4\pi D_L^2$.

Distance parcourue par la lumière entre le temps d'émission (non connu en général) et de réception !

Enfin heureusement il y a "z" , le décalage spectral , facile à mesurer mais à manipuler avec circonspection!

L'équation d'EINSTEIN (1916) avec la métrique RW

Calcul des paramètres géométriques : Tenseur d'Einstein (membre de gauche)

Maintenant que nous disposons de la métrique on peut calculer les symboles de Christoffel et le tenseur de courbure

Calcul des symboles de Christoffel ($G_i^k{}_j = 1/2 \cdot G^{kl} \cdot (\partial G_{il} / \partial x^j + \partial G_{jl} / \partial x^i - \partial G_{ij} / \partial x^l)$) pour la métrique RW

$$G_{11}^0 = a \cdot a' / (1 - kr^2)$$

$$G_{22}^0 = a \cdot a' \cdot r^2$$

$$G_{33}^0 = a \cdot a' \cdot r^2 \cdot \sin^2 q$$

$$G_{01}^1 = G_{10}^1 = G_{02}^2 = G_{20}^2 = G_{03}^3 = G_{30}^3 = a' / a$$

$$G_{22}^1 = -r \cdot (1 - kr^2)$$

$$G_{33}^1 = -r \cdot (1 - kr^2) \cdot \sin^2 q$$

$$G_{12}^2 = G_{21}^2 = G_{13}^3 = G_{31}^3 = 1/r$$

$$G_{33}^2 = -\sin q \cdot \cos q \quad G_{23}^3 = G_{32}^3 = \cot q \tag{12}$$

Calcul du tenseur de RICCI ($R_{ij} = \partial G_{ij}^k / \partial x^k - G_{il}^k \cdot \partial G_{jk}^l$) pour la métrique RW ,

$$R_{00} = -3a'' / a,$$

$$R_{11} = (aa'' + 2a'^2 + 2k) / (1 - kr^2),$$

$$R_{22} = r^2 (aa'' + 2a'^2 + 2k),$$

$$R_{33} = r^2 (aa'' + 2a'^2 + 2k) \sin^2 q, \tag{13}$$

Calcul scalaire de RICCI ($R = G^{ij} R_{ij}$) pour la métrique RW

$$R = 6(aa'' + a'^2 + k) / a^2 \tag{14}$$

Le Tenseur Energie Impulsion d'un fluide parfait (membre de droite)

Considérons ce tenseur Energie Impulsion (La composante T^{mn} du tenseur Energie Impulsion est le flux de la composante p^m de la quadri Impulsion à travers une hyper surface définie par x^n constant), d'abord sous sa forme la plus simple, dans un référentiel inertiel (15 bis).

$$T_{mn} = (\rho + p) U_m \cdot U_n + p \cdot g_{mn} = \text{diag}(\rho, p, p, p) \quad (15 \text{ bis})$$

On rappelle que sa généralisation dans un référentiel quelconque, dans l'hypothèse d'un fluide parfait isotrope dans son référentiel repos, vaut:

$$T_{mn} = (\rho + p) U_m \cdot U_n + p \cdot g_{mn} \quad (15)$$

ou ρ et p sont respectivement la densité d'énergie et la pression mesurées dans le référentiel repos et U_m est la quadri -vitesse du fluide.

Il est clair qu'à un fluide isotrope dans un référentiel on peut faire correspondre une métrique isotrope dans un référentiel.

Faisons coïncider ces deux référentiels. Le fluide sera alors au repos en coordonnées comobiles:

La trace est donnée par :

$$T = T^m_m = -\rho + 3p \quad (19)$$

Avant de le reporter dans l'équation d'Einstein, il est instructif de considérer la composante zéro de l'équation de conservation de l'énergie (ceci va nous être utile ultérieurement) :

$$0 = \tilde{\nabla}_m T^m_0 = \int_m T^m_0 + G_{m0} \cdot T^0_0 - G_{m0}^1 \cdot T^m_1 = -\int_0 \rho - 3(a'/a)(\rho + p) \quad (20)$$

Equation d'état

Relation entre la densité de matière et la pression

Il faut une équation d'état, relation entre ρ et p . Tous les fluides parfaits, applicables en Cosmologie, conduisent à l'équation d'état très simple(21) où w est une constante dépendant seulement du fluide :

$$p = w \cdot \rho \quad (21)$$

On rappelle que : $T_{mn} = (p + r) U_m \cdot U_n + p \cdot g_{mn}$ (15) est le tenseur énergie impulsion du fluide parfait

$$d(r \cdot a^3) / dt = a^3 (r' + 3p \cdot a'/a) = -p \cdot d(a^3) / dt \quad \text{d'après (20). (20 bis)}$$

La variation d'énergie dans un volume donné, quand l'univers s'étend, est égale à la variation volume multipliée par la pression (l'expansion est adiabatique), où w est une constante indépendante du temps dépendant du fluide. L'équation de conservation de l'énergie devient :

$$r' / r = -3 (1 + w) a'/a \quad (22)$$

$$r \sim a^{-3 \cdot (1+w)} \quad (23)$$

C'est l'équation (23) qui résulte de (22) par intégration qui détermine l'évolution de la densité liée à la variation du facteur d'échelle, en fonction des proportions relatives de matière et de rayonnement (et de vide).

1- Univers composé de matière seulement ($w = 0$), la variation est évidemment en a^{-3} . ($r \cdot a^3 = \text{constante}$)

2- Univers composé de rayonnement seulement ($w=1/3$), alors la variation est en a^{-4} . ($r \cdot a^4 = \text{constante}$) : *Les photons subissent une variation d'énergie supplémentaire linéaire en a^{-1} décalage de la longueur d'onde.*

3- Univers composé de vide seulement ($w = -1$) : $r = \text{constante}$

Fluides galactiques

La poussière et le rayonnement sont les deux exemples les plus connus de fluides galactiques.

Fluide de type "matière"

La poussière est de la matière non relativiste sans collision (ni viscosité) qui conduit à $w = 0$.

Les galaxies et les étoiles classiques sont les exemples typiques de "poussière" ou la pression est négligeable devant la densité d'énergie à grande échelle. On qualifie de matière cette poussière et les Univers dont l'énergie est constituée majoritairement de "poussière" sont dit "dominés par la matière".

La densité d'énergie décroît naturellement en: $r \sim a^{-3}$ (24)

Correspondant à la dilution d'une quantité constante de poussières. L'énergie, essentiellement constituée de l'énergie au repos de cette matière, est proportionnelle à la densité.

Fluide de type "rayonnement"

Le rayonnement peut être utilisé pour décrire soit du rayonnement électromagnétique présent soit des particules massives relativistes se comportant alors comme des photons, du moins pour l'équation d'état.

Bien que le rayonnement soit un fluide parfait et ait à ce titre un tenseur énergie Impulsion donné par (15), nous savons que : T_{mn} peut aussi être exprimé en terme d'intensité de champ par (25), dont la trace est donnée par (26)

$$T^{mn} = (1/4 p) (F^{ml} \cdot F^{nl} - (1/4) \cdot g^{mn} \cdot F^{ls} \cdot F_{ls}) \quad (25)$$

$$T^m_m = (1/4 p) (F^{ml} \cdot F_{ml} - (1/4) \cdot (4) \cdot F^{ls} \cdot F_{ls}) = 0 \quad (26)$$

Comme il est aussi égal à $T_{mn} = (p+r) U_m U_n + p \cdot g_{mn}$, (15) dont la trace :

$$T = T^m_\mu = -r + 3p, \quad (19),$$

L'équation d'état est

$$p = r / 3 \quad (27)$$

Un Univers dont la densité d'énergie est majoritairement sous forme de rayonnement est dit "dominé par le rayonnement.

Sa densité d'énergie décroît comme:

$$r \sim a^{-4} \quad (28)$$

On voit que la densité d'énergie de rayonnement décroît plus vite que celle de la matière du fait que les photons dilués en a^3 comme la matière non relativiste subissent une perte d'énergie supplémentaire en a^{-1} par décalage vers le rouge lorsque l'Univers s'étend.

De même les particules relativistes sont ralenties du même facteur en coordonnées comobiles.

Fluide de type " énergie du vide"

L'équation d' Einstein, avec métrique de signature $(-, +, +, +)$ et avec une constante cosmologique est

$$G_{mn} = 8\pi G \cdot T_{mn} - L \cdot g_{mn} \quad (29)$$

Elle a la même forme que sans constante cosmologique mais avec un tenseur énergie Impulsion supplémentaire pour le vide qui vaut

$$T_{mn}^{\text{vide}} = - g_{mn} \cdot L / 8\pi G \quad (30)$$

Il est calculé à partir de $T_{mn} = - h_{mn} \cdot L / 8\pi G = \text{diag} (L/8\pi G, -L/8\pi G, -L/8\pi G, -L/8\pi G)$ dans référentiel repos

Ceci a la forme d'un fluide parfait conformément à (15) :

$$T_{mn} = (p + r) U_m \cdot U_n + p \cdot g_{mn} \text{ avec}$$

$$r = - p = L / 8\pi G \quad (31)$$

Nous avons donc $w = - 1$, (référentiel repos) avec une densité d'énergie indépendante de "a", conforme à ce qu'on doit escompter d'une énergie du vide (**à noter que à $L > 0$ correspond une pression "négative"**).

Comme la densité d'énergie de la matière et du rayonnement décroissent lorsque l'Univers s'étend , à long terme l'énergie du vide même faible mais constante l'emporte sauf si une contraction intervient avant le point "critique". Si on dépasse ce point critique, on dit que l'Univers est dominé par l'énergie du vide.

Résolution de Equation d' Einstein .

Rappelons qu'elle peut aussi s'écrire:

$$R_{mn} = 8p G (T_{mn} - (1/2).g_{mn}.T) \quad (32)$$

En reportant les résultats trouvés en (13) pour le tenseur de Ricci R_{mn} , en (7) pour le tenseur métrique de Robertson Walker g_{mn} , en (15) pour le tenseur énergie impulsion T_{mn} et (19) pour sa trace T .

Soit $R_{00} = -3a''/a$ et $T = -r + 3p$, $g_{00} = -1$, $U_0 = 1$, donc $T_{00} = r$, l'équation $mn = 00$ (temps) est :

$$-3a''/a = 4p G (r + 3p) \quad (33)$$

Et $R_{11} = (aa''+2a'^2 + 2k)/(1-kr^2)$ et $g_{11} = a^2/1-kr^2$, $U_1 = 0$, donc $T_{11} = p.(a^2/1-kr^2)$, l' équation $mn = 11$ (espace) donne

$$a''/a + 2(a'/a)^2 + 2k/a^2 = 4p G (r - p) \quad (34)$$

(Du fait de l'isotropie de l'espace, les autres $mn = 22 = 33$, produisent la même équation).

Pourquoi Einstein n'a t'il pas dérivé cette équation ? Controverse avec De Sitter

Equation de Friedmann (1922)

Utilisons (33) pour éliminer les dérivées secondes de (34), et simplifions on obtient

$$a''/a = - (4p G/3).(r+ 3 p) \quad (35)$$

$$(a'/a)^2 = 8p G.r/3 - k/a^2 \quad (36)$$

Remarquons que r représente dans le cas général $r_{\text{tot}} = r_{\text{mat}} + r_{\text{rad}} + r_L$, que l'on peut calculer séparément:

r_{mat} est la densité de matière non relativiste,

r_{rad} se calcule à partir de l'expression du tenseur énergie impulsion exprimé par le tenseur intensité champ électromagnétique cf (25), (27) ,

r_L est donné par (30) et (31).

Cet ensemble de deux équations forme l' équation de Friedmann, associé à la métrique de la forme (7), il définit les Univers de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) . Lemaître a généralisé cette équation en réintroduisant L (1925-27)

Il est remarquable de penser que cette équation a été établie alors que l'univers se réduisait aux étoiles fixes!

Les Univers possibles

Terminologie:

Constante de Hubble

Le taux d'expansion est caractérisé par le paramètre de Hubble qui a les **dimensions de l'inverse d'un temps**,

$$H = \dot{a}/a \quad (37)$$

Sa valeur aujourd'hui est la constante de Hubble, H_0 . Sa valeur est controversée, les estimations variant 40 à 90 km/sec/Mpc. ("Mpc" "Mégaparsec", soit 3×10^{24} cm.). Notons que nous devons diviser \dot{a} par a pour obtenir une quantité mesurable car l'échelle globale " a " qui est le "rayon de l'Univers" n'est pas accessible directement.

Facteur d'échelle " a ", paramètre de décalage spectral " z "

On voit dans l'expression de la métrique que le facteur $a(t)$ donne l'échelle de la métrique d'espace. Lorsqu'on détecte un signal électromagnétique (le RFC par exemple) aujourd'hui à t_0 alors que le rayon de l'univers est de a_0 , il a été émis à un temps t_1 alors que le rayon de l'univers était de a_1 . On appelle a_1/a_0 le **facteur d'échelle** ($\sim 10^{-3}$ pour le RFC par exemple)

et $z = (1/a_1 - 1/a_0) / (1/a_1) = (a_0/a_1) - 1$ ne dépend que des facteurs d'échelle à l'émission et à la réception

Paramètre de décélération

$$q = a \cdot \ddot{a} / \dot{a}^2 = (\ddot{a}/\dot{a}) / (\dot{a}/a) \quad (38)$$

On verra le **rôle essentiel** que joue ce paramètre dans l'approche contemporaine de **détermination du type d'Univers** dans lequel nous vivons (**il indique la manière dont le facteur d'échelle évolue !!**)

Paramètre de densité W

$$W = 8\pi G r / 3H^2 = r / r_{\text{crit}} \quad (39)$$

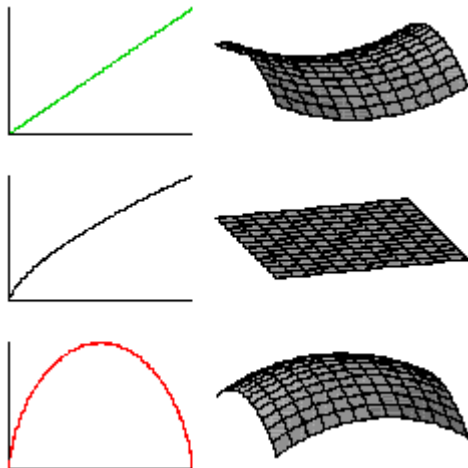
$$\text{avec } r_{\text{crit}} = 3H^2 / 8\pi G \quad (40)$$

r est la densité d'énergie totale toutes formes confondues hors L pour l'équation de Friedmann. Ce paramètre (qui change au cours du temps) est dit critique car l'équation de Friedmann (36) peut être écrite :

$$W - 1 = k/H^2 a^2 \quad (41)$$

W est le paramètre de densité total avec $W_L = 0$ dans l'équation de Friedmann et $W_L = 1$ dans l'équation de Lemaître.

Le signe de k est déterminé en fonction de la valeur de W par rapport à 1 ($H^2 a^2$ est positif). Nous avons:



$r < r_{\text{crit}} \ll W < 1 \ll k = -1 \ll$ Univers ouvert fig ref [9]

$r = r_{\text{crit}} \ll W = 1 \ll k = 0 \ll$ Univers plat (marginalement ouvert)

$r > r_{\text{crit}} \ll W > 1 \ll k = 1 \ll$ Univers fermé

Le paramètre de densité nous indique donc laquelle des trois géométries de Robertson-Walker décrit notre Univers. On comprend l'intérêt que suscite sa détermination précise qui est l'objet d'une intense activité.

Etude qualitative de l'équation de

Rappels généraux

On peut résoudre rigoureusement l'équation de Friedmann dans quelques cas simples.

Avant de le faire, il est très utile d'étudier le comportement qualitatif de ses différentes possibilités.

Cas $L=0$, et Univers rempli de fluides d'énergie positive. ($r > 0$) et de pression non négative ($p \geq 0$): L'Univers "décélère".

Posons pour le moment $L=0$, et considérons le comportement d'Univers remplis de fluides d'énergie positive. ($r > 0$) et de pression non négative ($p \geq 0$).

$$a''/a = - (4\pi G/3).(r + 3p) \quad (35)$$

Alors (35) impose $a'' < 0$. Comme nous observons l'Univers en ($a' > 0$), cela implique que l'Univers "décélère".

Cela est logique, car la gravitation (attractive) agit contre l'expansion.

Cela nous indique que son taux d'expansion était beaucoup plus important dans le passé, et si on remonte suffisamment loin on tombe sur une singularité pour $a = 0$. Notons que si a'' vaut exactement zéro, $a(t)$ serait linéaire, et l'âge de l'Univers serait H_0^{-1} . Comme a'' est en fait négatif, l'univers doit être plus jeune que cela.

Singularité initiale : le big bang

Cette singularité pour $a = 0$ est le "Big Bang" (cette théorie porte en français le doux nom de "Théorie de la Création Soudaine").

Le Big Bang représente la création de l' univers "Ex Nihilo".

Ce n'est pas une explosion de matière pré existante dans un espace temps pré existant (cf théorème de singularité de Penrose avec $r > 0$ et $p \geq 0$).

Evolution de l'univers

Si $k \neq 0$, (Univers plats et ouverts) : Expansion éternelle

L' évolution de l'univers est différente selon les valeurs de k .

Pour les cas ouvert et plat, $k \neq 0$, (36) implique (42)

$$(a'/a)^2 = 8\pi G \cdot r/3 - k/a^2 \quad (36)$$

$$a'^2 = (8\pi G/3) \cdot r \cdot a^2 + \hat{e} k \hat{e} \quad (42)$$

Le membre de droite est strictement positif (car $r > 0$), donc a' ne s'annule jamais. Comme nous observons $a' > 0$, il doit le rester indéfiniment.

De ce fait les univers plat et ouvert sont en expansion "éternelle" ouverts temporellement et spatialement.

Rappelons l'hypothèse de densité d'énergie strictement positive. Une densité d'énergie négative ne conduit pas à une expansion sans fin de l'univers même s'il est ouvert.

Vitesse d'expansion

$d(r \cdot a^3)/dt = a^3 (r' + 3ra'/a) = -3pa^2a' = -p \cdot d(a^3)$ (en appliquant (20) (La quantité $d(r \cdot a^3)/dt$ est donc négative ou nulle si $p > 0$, ce qui est le cas d' Univers non dominé par le vide). Cela implique que $r \cdot a^2$ doit s'annuler dans un univers en expansion infinie car $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Alors (42) nous indique que

$$a'^2 \in \hat{e} k \hat{e} \quad (45)$$

(Rappelons que ceci est vrai pour $k \neq 0$.) ,donc pour $k = -1$, la vitesse d'expansion a' tend vers 1, alors que pour $k = 0$ l'univers poursuit son expansion de plus en plus lentement.

Cosmologie: le Modèle Standard: Mai 2002, Jacques FRIC

Si $k = 1$, Univers fermés : Expansion jusqu'à un maximum puis contraction

Pour les univers fermés ($k = +1$) l'équation (36) devient (46)

$$(a'/a)^2 = 8\pi G \cdot r/3 - k/a^2 \quad (36)$$

$$a'^2 = (8\pi G/3) \cdot r \cdot a^2 - 1 \quad (46)$$

L'argument $r \cdot a^2 \geq 0$ quand $a \geq 0$ s'applique toujours; mais dans ce cas (46) devient négatif, ce qui ne peut arriver. Donc l'univers ne s'étend pas indéfiniment, a possède une limite supérieure a_{\max} .

Quand a approche a_{\max} , (35) implique

$$a'' \leq - (4\pi G/3) \cdot (r + 3p) \cdot a_{\max} < 0 \quad (47)$$

Donc a'' atteint une valeur finie et négative à ce point, lorsque a atteint a_{\max} il commence à décroître, (et comme $a'' < 0$) il va inexorablement se contracter vers zéro - le Big Crunch .

De ce fait les univers fermés (sous réserve des hypothèses r positif et p non négatif) sont fermés en temps et en espace.

A noter que $a(t)$ peut être interprété comme le rayon physique de l'hypersphère à l'instant t .

Solutions exactes de l'équation de Friedmann

Univers de FRW dominés par la matière

Pour les univers dominés par la matière ($p = 0$), on peut utiliser l'angle de développement $F(t)$, plutôt que t comme paramètre direct. Les solutions sont alors (avec C défini par 51) :

Univers ouverts

$$a = C/2 (\cosh F - 1), \quad t = C/2 (\sinh F - F), \quad k = -1 \quad (48)$$

Univers plats

$$a = (9C/4)^{1/3} \cdot t^{2/3}, \quad k = 0 \quad (49)$$

Univers fermés

$$a = C/2 (1 - \cos F), \quad t = C/2 (F - \sin F), \quad k = +1 \quad (50)$$

où on a posé :

$$C = (8\pi G/3) \cdot r \cdot a^3 = \text{Constante} \quad (51)$$

Univers dominés par le rayonnement:

Alors $p = r/3$, on a de nouveau des:

Univers ouverts

$$a = \{ C' [(1 + t \cdot C'^{-1/2})^2 - 1] \}^{1/2} \quad k = -1 \quad (52)$$

Univers plats

$$a = (9C/4)^{1/4} \cdot t^{1/2}, \quad k = 0 \quad (53)$$

Univers fermés

$$a = \{ C' [1 - (1 - t \cdot C'^{-1/2})^2] \}^{1/2} \quad k = +1 \quad (52)$$

Où cette fois nous avons défini

$$C' = (8p G/3) \cdot r \cdot a^4 = \text{Constante} \quad (51)$$

Ces solutions exactes possèdent bien les propriétés que nous leur avons attribuées à priori.

Univers dominés par le vide

Soit r soit p va être négatif, en contradiction avec les hypothèses faites avant pour déterminer le comportement général de $a(t)$. Dans ce cas la correspondance entre ouvert / fermé et expansion sans fin et re-contraction ne s'applique plus.

Commençons par considérer $L < 0$. Dans ce cas W est négatif, et de (41), ceci ne peut arriver que si $k = -1$:

La solution est dans ce cas.

$$a = (-3/L)^{1/2} \cdot \sin [(L/3)^{1/2} \cdot t] \quad (56)$$

Il y a aussi une solution ouverte ($k = -1$) pour $L > 0$, donné par :

$$a = (3/L)^{1/2} \cdot \sinh [(L/3)^{1/2} \cdot t] \quad k = -1 \quad (57)$$

Un Univers plat dominé par le vide doit avoir $L > 0$, et la solution est (Univers de De Sitter)

$$a \sim \exp \pm [(L/3)^{1/2} \cdot t] \quad k = 0 \quad (58)$$

Tandis qu'un univers fermé doit aussi avoir $L > 0$, et satisfaire

$$a = (3/L)^{1/2} \cdot \cosh [(L/3)^{1/2} \cdot t] \quad k = 1 \quad (59)$$

Ces solutions sont d'apparence trompeuse car toutes sauf (56: anti De Sitter) représentent l'espace temps De Sitter.

Synthèse des Solutions exactes

Type d'espace	Univers dominés par la matière ($r_m > 0, r_r = 0, L = 0$)	Univers dominés par le rayonnement ($r_m = 0, r_r > 0, L = 0$)	Univers dominés par le vide ($r_m = r_r = 0, L > 0$ ou $L < 0$)
Espace Ouvert $k = -1$	$a = C/2 (\cosh F - 1),$ $t = C/2 (\sinh F - F),$ Expansion \forall	$a = \{ C' [(1 + t \cdot C'^{-1/2})^2 - 1]^{1/2}$ Expansion \forall	$a = (3/L)^{1/2} \cdot \sinh [(L/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $L > 0,$ Expansion \forall
			$a = (-3/L)^{1/2} \cdot \sin [(-L/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $L < 0$ Espace oscillant
Espace plat $k = 0$	$a = (9C/4)^{1/3} \cdot t^{2/3},$ Expansion \forall critique	$a = (9C/4)^{1/4} \cdot t^{1/2},$ Expansion \forall critique	$a \sim \exp \pm [(L/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $L > 0$ (en expansion \forall)
Espace fermé $k = +1$	$a = C/2 (1 - \cos F),$ $t = C/2 (F - \sin F),$ Expansion finie, contraction	$a = \{ C' [1 - (1 - t \cdot C'^{-1/2})^2] \}^{1/2}$ Expansion finie, contraction	$a = (3/L)^{1/2} \cdot \cosh [(L/3)^{1/2} \cdot t]$ avec $L > 0, ($ en expansion $\forall)$
Paramètre	$C = (8\pi G/3) \cdot r \cdot a^3 = \text{Constante}$	$C' = (8\pi G/3) \cdot r \cdot a^4 = \text{Constante}$	

Dans quel Univers vivons nous :

Cas de l'expansion critique (1995, justification criticité: inflation), $k=0$, $\Omega_m=1$:

Les paramètres sont :

$H_{crit} = (8\pi G\rho/3)^{1/2}$: Constante de Hubble critique (65 km/s par Mpc)

$T = 2/3H_{crit}$: T est l'âge de l'univers en fonction de H_{crit}

$e = (t/t_a)^{2/3}$: e est le facteur d'échelle , " t_a " l'âge aujourd'hui, " t " l'âge à considérer

Pendant l'ère radiative cette loi était : $e = (t/t_a)^{1/2}$

$D(Ga.l) = 3c.t_a(1-e^{1/2}) = 30(1-e^{1/2})$: à noter que la distance maximum est le triple de l'âge (a.l)

$d(Ga.l) = e.D$: D distance actuelle, d distance au moment de l'émission des photons

Horizon: il s'accroît plus vite que la taille de l'univers s'il est critique: déduit de $ds^2(RW)=0$, soit $\dot{d}t/a(t) = \dot{d}r.(1-kr^2)^{-1/2}$

En fait l'expansion a enchaîné une phase radiative (très courte), une inflation (brève mais intense), reprise de la phase radiative (300 000 ans) puis phase domination matière. Quid de L ?

Exemple: Les photons du RFC que nous captions maintenant ont été émis à $T_0 + 300\,000$ ans, lorsque le facteur d'échelle "e" de l'univers était de 1/1000 , la constante de Hubble valait 2,1 millions de km/s par méga parsec (30 000 fois sa valeur actuelle) ce qui veut dire que deux objets distants de 470 000 a.l avaient une vitesse de récession égale à "c". Comme le point qui dans le futur (après expansion) allait abriter la terre était distant de 29 Millions d'années lumière à cette époque, la vitesse de récession était supérieure 60 "c". Ce qui fait qu'ils ont commencé à s'éloigner emportés par l'expansion , avant de commencer à se rapprocher lorsque le rythme d'expansion s'est ralenti. Ils sont aujourd'hui distant de 29 milliards d'années lumière .

Cas d'univers dominé par la matière et une constante Cosmologique non nulle

Ce cas semble revenir d'actualité selon un certain nombre d'observations récentes. Dans ces conditions : les équations de Friedmann (36) et (35) deviennent les équations de Friedmann Lemaître (on rappelle qu'on posé c=1):

$a'^2(t)/a^2(t) = 8p G.r/3 - k/a^2(t) + L/3$: (36')**si on exprime le rayonnement, la matière, cette équation peut aussi être écrite

$a'^2(t) = \{(8p/3)(G.r_{0rad} .a_0^4)\} . a'^2(t) + \{(8p/3)(G.r_{0m} .a_0^3)\} . a^{-1}(t) - \{k\} . a^0 + \{(L/3)\} . a^2(t)$ (36 bis)* ou encore

$W_{tot} - 1 = k/H^2 a^2$ (41 bis), cf (41) $W_{tot} = 8pG/3H^2 . r_{tot}$ avec : $W_{tot} = W_m + W_L + \{W_{ray}\}$ (41 bis) ou encore

$W_m + W_L + W_k = 1$ ($W_m = 8pG/3H^2 . r_m$, $W_L = L/3H^2$, $W_k = -k/a^2_0 H^2 =$ paramètre de densité de courbure) (41 ter)**

$$a''/a = -(4p/3)G(r_m + 3p) + L/3 \quad (35 \text{ bis})^{**}$$

Discussion générale des types d'Univers possibles, dans ce cas, à partir de (36 bis)

Si $L < 0$ alors $a(t)$ a une limite supérieure, " k , car le terme de gauche doit être positif ($a'' < 0$ pour a_{max} univers oscillant

Si $L > 0$ et $k=0$ ou $k=-1$, on voit que quand a est grand, l'univers entre dans une phase d'expansion exponentielle

Si $L > 0$ et $k = +1$, nous avons toutes les possibilités suivantes selon les valeurs relatives de L et r .

Si $L = L_{crit}$: Univers statique (Einstein)*si $a'=a''=0$ simultanément, ce qui correspond à $L_{crit} = 1/a_0^2 = 4p Gr$

Si $L > L_{crit}$ alors la force répulsive l'emporte: Expansion infinie et exponentielle sur la fin,


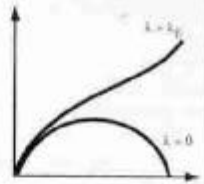
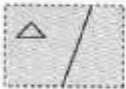
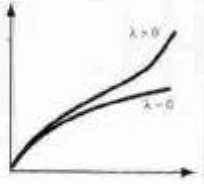


Si $L < L_{crit}$, il y a un intervalle de a qui rendrait (36 bis) négatif (interdit).

Selon les conditions initiales, on peut avoir un Univers oscillant ou en expansion éternelle et même une contraction avec rebond (pas de Big bang). * Remarquons que (36 bis), en négligeant l'énergie de rayonnement et la pression de la matière, est de la forme : $a'^2 = C_1 . a(t)^{-1} - k + C_2 . a^2(t)$, avec C_1, C_2 constantes, donc le problème revient à étudier le signe de cette fonction pour $k = 1, -1, 0$ correspondant aux différentes topologies pour $a(t) > 0$ et C_1, C_2

** En supposant l'énergie de rayonnement négligeable, on néglige $\Omega_{ray} = 8\pi G/3H^2 . \rho_{ray} \sim \Omega_m . 10^{-6}$ aujourd'hui).

Synthèse de l'évolution de l'Univers ref [6]

Matière + Rayonnement, $\Lambda=0, \Lambda < 0$						Matière + Rayonnement, $\Lambda > 0, V_{limite} = \Lambda^{1/2} ac/3$											
t	a	a''	a'	Ω	k	t	a	a''	a'	Ω	k	Λ					
0	0	< 0	$+\infty$	> 1	1	0	0	< 0	> 0	> 1	1	$+\epsilon$					
\downarrow	\downarrow		\downarrow			> 0	\downarrow	tM	aMin			< 0	$= 0$				
			\downarrow					tc	0			< 0	$-\infty$				
								aMin < a < aMax Interdit									
								0	aMax			\forall	> 0				
tM	aMax					$= 0$	ou $\forall \Omega$	ou $\forall k$	∞			$\rightarrow \infty$	> 0	V_{limit}			
						\downarrow	si $\Lambda < 0$	si $\Lambda < 0$	0			a- init	> 0	< 0			$< \Lambda c$
\downarrow	\downarrow					< 0			tr			aMax	> 0	$= 0$			
						\downarrow			∞			$\rightarrow \infty$	> 0	V_{limite}			
tc	0					$-\infty$			\forall			$\Lambda^{-1/2}$	$= 0$	$= 0$			$= \Lambda c$
						0	0	\forall	> 0			$> \Lambda c$					
0	0		$+\infty$	≤ 1						≤ 1	0,-1	$+\epsilon$					
$+\infty$	$+\infty$		0, c		0, -1	$+\infty$	$+\infty$	> 0	V_{limite}			$+\infty$					

$K > 0$  elliptique	fini		ouvert si λ grand fermé
$K = 0$  Euclidien	fini ou infini		ouvert
$K < 0$  hyperbolique	fini ou infini		ouvert

Cas particulier $W_{0m} (\sim 0,3) + W_L (\sim 0,7) \sim 1$ (hypothèse en fonction des observations récentes)

Aujourd'hui quelle que soit sa topologie, aujourd'hui l'Univers accélère (après avoir longtemps décéléré)

En reportant ces valeurs dans (35 bis) on constate que $a''/a > 0 : a'' = 0$ ® paramètres point d'inflexion.

Remarquons que s'il n'avait pas décéléré nous ne pourrions pas voir de galaxies avec $z > 1$, ni le RFC.

Quelle topologie pour l'Univers ?

On en déduit qu'aujourd'hui $W_k \sim 0$, ce qui ne veut pas dire que l'Univers est de topologie plate ($k=0$)!, car comme W_k ne peut pas strictement être égal à 0, il est soit inférieur ($k= -1$) soit supérieur ($k=1$).

On a vu qu'il y avait des solutions pour les 3 valeurs de k .

Remarque sur la variation de W_{tot} au cours du temps

Par contre $W_{tot}(t) = W_{0m}(t) + W_L(t) = 1 \pm |e(t)|$ implique que W_{tot} était incroyablement proche de 1, au tout début de l'univers : la différence par rapport à 1 va être multipliée par la puissance du rapport des temps par exemple 10^{46} depuis $t=10^{-30}$ sec

En négligeant W_k au début de l'univers (là où les facteurs d'échelle ont le plus varié), et en écrivant:

$$W_{tot}(t) - 1 = d(t),$$

en fonction du modèle d'expansion, (41 bis) donne: $d(t) = (k/a^2)/8\pi G\rho/3$,

ρ = densité d'énergie varie en a^{-4} (rayonnement) ou a^{-3} (matière), (41 quater)

$d(t) \sim a^2(t) \sim t$, en période de domination rayonnement, $d(t) \sim a(t) \sim t^{2/3}$ en période de domination matière

Rôle de l'inflation primordiale

De la même formule, on constate que l'inflation a eu un effet contraire, en effet pendant l'inflation, le facteur "a" s'est accru exponentiellement ($\sim 10^{43}$) alors que la densité d'énergie est restée constante (L).

La même formule (41 quater) donne: $d(t) \sim a^{-2}(t)$ soit une réduction de l'écart à 1 de 10^{86} .

Ceci a lissé l'Univers. Remarquons que si la constante cosmologique redevient prépondérante **d va diminuer**.

Bien que les différents W varient énormément, avec l'expansion, l'Univers ne change pas de topologie !

En effet **d(t) ne change pas de signe** d'après (41 quater), seule sa valeur absolue change (beaucoup).

Constante Cosmologique positive correspond à une "répulsion"

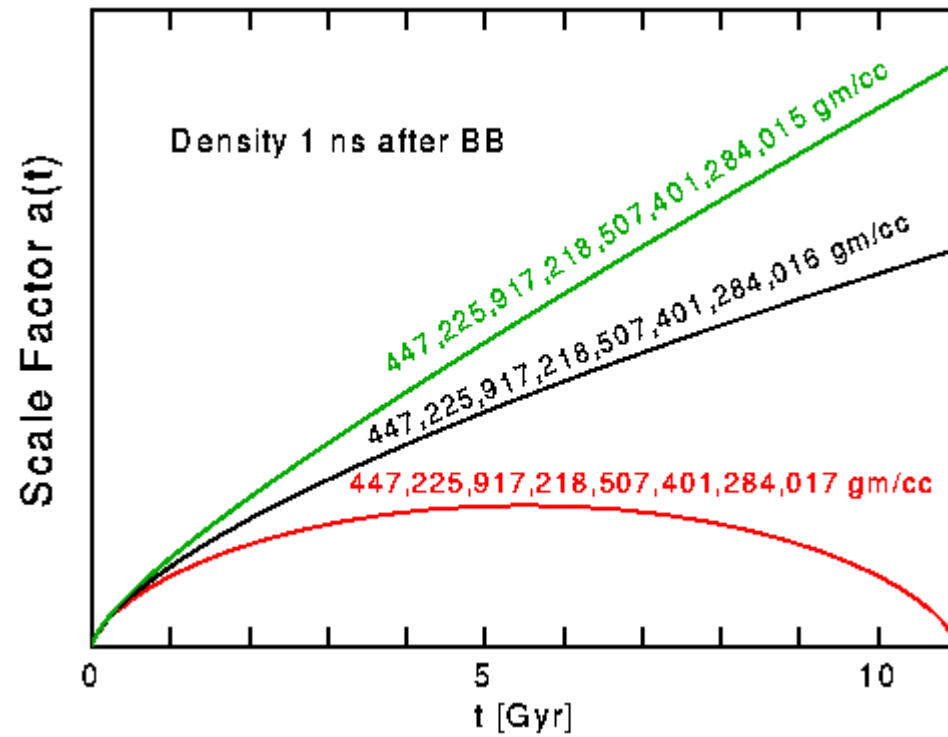
Si on place à la surface d'une sphère de coordonnée comobile r (rayon physique a.r, masse M) une particule de test de masse m, cette particule va être accélérée par "l'expansion" selon (35 bis) :

$d^2(a.r)/dt^2 = -4\pi \cdot a.r \cdot G r_m / 3 + a.r \cdot L / 3$, avec $M = 4\pi r_m (a.r)^3 / 3$, on obtient : $d^2(a.r)/dt^2 = -GM/(a.r)^2 + a.r \cdot L / 3$

On reconnaît la force d'attraction Newtonienne ($-GM/(a.r)^2$), la constante cosmologique (si $L > 0$) qui suit est de signe opposé et agit donc répulsivement: (L introduite pour équilibrer la gravitation*).

.

Influence de la densité sur le destin de l'Univers



Les paramètres Cosmologiques

Discussion sur les méthodes d'évaluation des paramètres cosmologiques

Nous aimerions déterminer avec précision la valeur des paramètres clés pour savoir quel destin nous attend.

En particulier H_0 , du fait de sa relation avec l'âge de l'Univers.

Pour un Univers de matière pure, avec $k = 0$, (49) implique que l'âge est $2 / (3H_0)$.

D'autres possibilités permettraient de prédire des relations similaires. Connaître W , détermine k par (41).

D'après la définition (39) de W , ceci signifie que nous voulons à la fois H_0 et r_0 .

Malheureusement ces paramètres sont difficiles à mesurer précisément en particulier le paramètre r .

Distance de luminosité

Lorsqu'on connaît la luminosité absolue (chandelles standards telles que Céphéides, supernovas, galaxies selon type), la luminosité apparente permet de déterminer la distance.

Mais attention du fait de l'expansion, la longueur d'onde est décalée vers le rouge, mais ce n'est pas le seul effet : le nombre de photons également reçu par un détecteur est réduit dans le même rapport (par rapport à un espace statique du fait que le temps entre deux photons émis s'allonge).

Effet de courbure

On suppose dans la suite un effet de courbure négligeable (l'Univers paraît plat, et il l'était plus hier qu'aujourd'hui)

Rappel des méthodes classiques et des résultats : Situation en 1995 (univers avec $L=0$)

La détermination de r et de H_0 dont dépend W sont essentiels pour le devenir de l'Univers.

Estimation directe de r

La densité cosmique r a d'abord été estimée par observation " directe" et comptage des objets cosmiques dans un large spectre (des ondes radio aux rayons γ), en étalonnant la masse de ces objets.

La masse des galaxies par exemple dépend de leur type, de leur nombre d'étoiles estimé, de leur comportement gravitationnel lorsqu'ils sont en interaction avec d'autres galaxies.

De même, on a estimé la masse des étoiles, du gaz des poussières, le tout étant affiné par un traitement statistique.

Compte tenu du nombre d'hypothèses sur lesquelles repose cette estimation, donc de la fragilité de ces estimations, il est essentiel de recouper un maximum d'informations provenant de méthodes si possible indépendantes pour les crédibiliser.

Cette observation ne donne qu'une projection en 2D sur la voûte céleste, il faut d'autres informations pour déterminer la distance qui permet de calculer le volume et donc la densité.

La méthode directe géométrique ne s'applique que pour les proches distances.

La loi de Képler permet de déterminer avec précision la masse des étoiles doubles ou multiples à une échelle un peu plus lointaine.

Les céphéides (2 types), chandelles standards caractérisées par leur signature spectrale permettent d'aller beaucoup plus loin.

Enfin le Décalage vers le rouge est appliqué pour les objets très lointains (à appliquer r avec circonspection comme l'illustre la suite).

La spectrométrie galactique s'est révélée très productive à cet effet (heureusement que les raies ne sont pas "équidistantes" on n'aurait pas pu observer de décalage)

A noter que tout cela ne donne pas des résultats très précis et présuppose beaucoup ce qui fait l'objet de beaucoup de débats passionnés.

On dispose également d'autres informations " génériques" qui permettent de borner certains paramètres

L'âge de l'Univers (1995)

Comme l'univers est suffisamment vieux (il a au moins l'âge du système solaire, on lui prête avec une certaine fiabilité un âge de au moins 10 milliards d'années) on peut raisonnablement penser que sa densité est proche de la densité critique .

Tous les modèles montrent qu'avec une densité, surtout au début, même très peu différente de la densité critique la durée de vie des univers est fugace Soit ils se re-contractent soit ils s'évaporent très rapidement.

Et un âge tel que celui qu'on connaît prouve qu'au début de l'univers la densité devait être incroyablement proche de cette densité critique. Avec l'expansion l'écart initial avec la densité critique (s'il n'est pas strictement nul) s'accroît car instable.

Nucléosynthèse primordiale

La composition en éléments légers (Hydrogène, Deuterium, Tritium, Hélium) résultant de la nucléosynthèse primordiale dans le modèle du "Big bang" chaud prédit que la masse volumique de la matière ordinaire doit représenter environ 6 % de la masse critique.

La valeur de la constante de Hubble mesurée

Même si la fourchette est large, de 40 à 90 km/sec /Mparsec , avec une moyenne à 65 km/s/Mparsec qui correspond à l'âge de 10^{10} ans dans un Univers critique, ceci encadre les possibilités.

L'observation directe révèle un Univers beaucoup trop léger

On sait que cette estimation directe de matière visible ne rend compte au mieux que de 1 % de la matière qui correspond à la densité critique estimée à partir de la constante de Hubble..

A la recherche de la matière invisible

Il y a donc de la matière indétectable par son rayonnement .

L'étude des rotations des galaxies (lois de Képler, la vitesse de rotation à une distance donnée dépend de la masse "centrale") nous indique une masse cachée d'au moins 5 fois la masse visible. On suppose donc un halo de matière qui doit s'étendre au delà. Donc, de bonnes présomptions existent sur l'existence de matière ordinaire invisible (planètes géantes, naines brunes, MACHOs, nuages de gaz ténus, trous noirs , masse des neutrinos) , à hauteur de cinq fois la matière visible. L'étude du mouvement local d'amas de galaxies nous conduit à porter ce chiffre à 50. Ce qui conduit à 50 % de la densité critique.

Une étude d'envergure sur 577 galaxies a mis en évidence des perturbations de vitesse par un grand attracteur, concentration de masse invisible équivalente à des centaines de milliers de galaxies situé à environ 200 Ma.l dans la direction de la constellation du Centaure.

La masse manquante détectée ?

On arrive compte tenu de la précision très relative à quelque chose de proche de la densité critique répartie comme suit

Matière visible ordinaire (baryonique)	~ 1%
Matière invisible ordinaire (baryonique)	~ 5%
Matière invisible exotique (non baryonique)	~ 94%
Total	~100%

Tout semble pour le mieux dans le meilleur des mondes , et pourtant

Approche actuelle

Les éléments recueillis précédemment se heurtent un obstacle de taille, ils prédisent un Univers pas assez vieux compte tenu de la valeur de la constante de Hubble et du modèle d'Univers.

Certaines méthodes d'évaluation de l'âge des objets cosmiques (âge des amas globulaires, radioactivité des éléments à très longue période par exemple) prédisent un âge supérieur à 10 Gal.

On connaît la validité relative de telles mesures, mais cela a conduit les astrophysiciens à s'interroger sur la nature de l'univers et la **possibilité d'une constante Cosmologique non nulle et comment le détecter.**

D'où la mise en place de nouvelles stratégies

Certains paramètres sont sensibles à la nature de l'Univers, les stratégies vont consister à les mesurer

- La distance de luminosité que l'on sait mesurer grâce aux chandelles standards (Etoiles caractéristiques dont on connaît la luminosité absolue) dépend de H_0 que l'on sait mesurer par d'autres moyens, de z décalage spectral, qu'on mesure directement et du paramètre de décélération "q" cf (78) qui lui même dépend de la nature de l'Univers cf (60).

Nous allons pouvoir ainsi déterminer q et par la même la nature de notre Univers (matière, constante cosmologique, on néglige l'énergie de rayonnement).

Avec une même constante de Hubble l'age de l'Univers s'allonge s'il y a une constante cosmologique significative (cf figure 4.3).

Notons que des paramètres qui ne dépendent que de "z", ne fourniront pas d'information sur ce point .

- La mesure de l'anisotropie du rayonnement de fond cosmologique RFC à petite échelle angulaire (aujourd'hui $< 1^\circ$, demain $< 1'$), du fait du facteur z très élevé (1100), est très sensible à la nature de l'univers et nous renseigne sur la présence et l'ampleur d'une constante cosmologique.

Ces mesures ont donné des résultats très intéressants qui sont présentés ci après

Le paramètre de décélération q

Mais notons que le paramètre de décélération q est lié à W par (35):

$$q = -\ddot{a}a'/a'^2 = -H^2 \cdot a''/a' = (4p G/3H^2) \cdot (r + 3p) = (4p G/3H^2) \cdot r(1 + 3w) = (1/2) \cdot \dot{a}_k W_k(1 + 3w_k) \quad (60)$$

avec $w_k = 0$ pour la matière $W_m = (8p G/3H^2_0) \cdot r_{0m}$, $w_k = 1/3$ pour le rayonnement $W_{ray} = (8p G/3H^2_0) \cdot r_{0ray}$ et $w_k = -1$ pour la constante Cosmologique $W_L = \Lambda/3H^2_0$, si on néglige la contribution de l'énergie du rayonnement, on a:

$$q = (W_m/2) - W_L \quad (60 \text{ bis})$$

La détermination de la nature de notre Univers par la distance de luminosité repose sur le principe suivant. Le facteur "z" ne dépend que de l'état "initial" et "final" ($f(a_1/a_0)$) de l'Univers et pas de la manière (qui est très différente selon sa nature) dont il a évolué de l'un vers l'autre. Le photon qui a voyagé a subi cette variation et y est sensible, pour une même différence de coordonnée r , la distance de luminosité va varier, donc avec (78) on peut, déterminer w (de quoi notre univers est fait) à partir des distances de luminosité mesurées

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - q_0) z^2] + e(z^{3+}) = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - (W_{0m}/2) + W_{0L}) z^2] + e(z^{3+}) \quad \text{pour } z \ll 1 \quad (78)$$

Si on mesure la distance de luminosité de différentes étoiles et z , et que l'on trace la courbe $d_L = f(z)$ pour un même W_{tot} observé on voit que cette courbe va être différente en fonction de la composition de W_{tot} en $W_m - W_L$.

Pour $W_{tot} = 1$, les cas extrêmes : $W_m = 1, W_L = 0 \text{ } \textcircled{R} \text{ } q = 1/2$ et $W_m = 0, W_L = 1 \text{ } \textcircled{R} \text{ } q = -1$, donnent respectivement pour (78)

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/4 z^2] + e(z^{3+}) = f_1(z), \quad d_L = H_0^{-1} [z + z^2] + e(z^{3+}) = f_2(z)$$

Méthode de mesure

Pour comprendre comment on peut raisonnablement mesurer ces paramètres considérons le mouvement géodésique dans un Univers FLRW. Nous avons des vecteurs Killing de type espace mais pas de vecteur de Killing de type temps pour nous donner une notion de l'énergie conservée.

Pourtant nous avons un tenseur de Killing. Si $U^m = (1, 0, 0, 0)$ est la quadri vitesse des observateurs comobiles alors

$$K_{mn} = a^2 (g_{mn} - U_m \cdot U_n) \quad (61)$$

satisfait $\tilde{N}_{(S} K_{m)} = 0$ (on peut le vérifier), et est donc un tenseur de Killing.

Cela signifie que si une particule a une quadri vitesse $V^m = dx^m / dl$, la quantité

$$K^2 = K_{mn} \cdot V^m \cdot V^n = a^2 [V_m \cdot V^m + (U_m \cdot V^m)^2] \quad (62)$$

Va être conservée sur la géodésique.

Examinons ce cas, d'abord pour les particules massives. Alors on a $V_m V^m = -1$, soit

$$(V^0)^2 = 1 + \ddot{V} \ddot{V}^2 \quad (63)$$

Où $\ddot{V} \ddot{V}^2 = g_j V^j V^j$. alors (61) implique

$$\ddot{V} \ddot{V} = K/a \quad (64)$$

La particule alors ralentit dans le système de coordonnées comobiles quand l'univers s'étend.

C'est un vrai ralentissement dans le sens ou un gaz de particules animées d'un mouvement relatif rapide va se refroidir quand l'univers s'étend

Le même phénomène se produit sur les géodésiques nulles (lumière). Dans ce cas $V_m V^m = 0$, et (62) impliquent

$$U_m \cdot V^m = K/a \quad (65)$$

Mais la fréquence du photon mesuré par un observateur est $w = -U_m V^m$.

La fréquence du photon émis avec une fréquence w_1 va alors être observé à une fréquence plus w_0 du fait de l'expansion de:

$$w_0/w_1 = a_1/a_0 \quad (66)$$

Décalage vers le rouge

Les Cosmologistes aiment dénommer ceci par le terme z , décalage vers le rouge entre deux évènements , définis par le ratio de la variation en longueur d'onde :

$$z = l_0 - l_1 / l_1 = a_0/a_1 - 1 \quad (67)$$

Notons que ce Décalage vers le rouge n'est pas un effet Doppler conventionnel. C'est l'expansion de l'espace et non pas la vitesse relative qui en est la source.

On peut mesurer le Décalage vers le rouge car on connaît la longueur d'onde dans un référentiel au repos de diverses raies spectrales émises par des galaxies lointaines, donc on connaît le décalage subi pendant leur trajet entre leur temps d'émission t_1 et de réception t_0 .

Rapport des facteurs d'échelle

On connaît le rapport des facteurs d'échelle à ces instants.

Mais on ne connaît pas les temps, les photons n'indiquant pas combien de temps s'est écoulé pendant leur trajet.

Il faut approfondir ce point pour obtenir cette information.

En gros, comme un photon se déplace à la vitesse de la lumière, son temps de trajet devrait être sa distance (unité c) Mais comment définir la distance d'une galaxie lointaine dans un univers en expansion.

La distance comobile n'est d'aucune utilité, car non mesurable et de surcroît on ne connaît pas la vitesse propre de cette galaxie.

Distance de luminosité

A la place, définissons la distance de luminosité comme:

$$d_L^2 = L / 4\pi F \quad (68)$$

où L est la luminosité absolue de la source et F le flux mesuré par l'observateur (énergie par unité de temps, unité de surface d'un détecteur donné).

La définition vient du fait que dans un espace plat, pour une source à une distance d , le flux sur la luminosité est juste un sur la surface d'une sphère centrée sur la source, $F/L = 1/A(d) = 1/4\pi d^2$.

Dans un Univers FLRW , cependant, le flux va être dilué.

La conservation des photons nous dit que le nombre total de photons émis par la source va traverser la sphère à la distance comobile r de l'émetteur.

Une telle sphère est à une distance physique $d = a_0 r$, ou a_0 est le facteur d'échelle quand les photons sont observés.

Mais le flux est dilué par deux effets additionnels:

Le Décalage vers le rouge individuel des photons par un facteur $(1 + z)$,

et le fait que les photons touchent la sphère moins fréquemment du fait que deux photons émis à dt d'intervalle vont être mesurés à $(1 + z) dt$ d'intervalle. Donc il vient

$$F/L = 1/4\pi a^2_0 r^2 (1 + z)^2 \quad (69)$$

où

$$d_L = a_0 r (1 + z) \quad (70)$$

Méthode de calcul de H_0 et q à partir de la distance de luminosité et du Décalage vers le rouge z

La distance de luminosité d_L est mesurable du fait que la luminosité absolue de certaines sources astrophysiques est connue (chandelles standards). Mais r n'est pas observable, nous devons l'éliminer de l'équation.

Sur une géodésique lumière choisie radiale pour la circonstance, on a

$$0 = ds^2 = - dt^2 + (a^2 / 1 - kr^2) \cdot dr^2 \quad (71)$$

où

$$\dot{t}_1^2 dt/a(t) = \dot{t}_0^r dr.(1-kr^2)^{-1/2} \quad (72)$$

Pour les galaxies pas trop lointaines on peut développer le facteur d'échelle en série de Taylor autour de sa valeur actuelle.

$$a(t_1) = a_0 + a_0' (t_1 - t_0) + (1/2) a_0'' \cdot (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (73)$$

Si on développe les deux membres de (72) on trouve

$$r = a_0^{-1} [(t_0 - t_1) + (1/2)H_0 \cdot (t_0 - t_1)^2 + \dots] \quad (74)$$

D'après (67), l'expansion (73) est identique à

$$1 / 1+z = 1 + H_0 (t_1 - t_0) - (1/2) \cdot q_0 \cdot H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (75)$$

Pour $H_0(t_1 - t_0)$ petit, ceci peut être inversé et donne

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} [z - (1 + q_0 / 2) z^2 + \dots] \quad (76)$$

En substituant de nouveau dans (74) cela donne

$$r = a_0^{-1} \cdot H_0^{-1} [z - 1/2 (1 + q_0) z^2 + \dots] \quad (77)$$

Finalement en l'utilisant dans (70) on a la loi de Hubble:

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - q_0) z^2] + e (z^{3+}) \quad \text{pour } z \ll 1 \quad (78)$$

Calcul Rigoureux de D_L

Pour faire ce calcul, commençons pour des raisons pédagogiques, par déterminer l'âge de l'Univers:

Age de l'univers (calcul en fonction du rapport W_m , W_L en négligeant l'énergie du rayonnement (fig 4.3)

Rappel : $W_m = 8\rho G/3H_0^2 r_m$, $W_L = L/3H_0^2$, $W_k = -k/a_0^2 H_0^2$ (courbure), comme $(a'/a)^2 = H^2$,

on déduit de (41) que: $W_m + W_L + W_k = 1$ (80)

L'équation de Friedman :

$$H^2 = (a'/a)^2 = 8\rho G/3r_m + L/3 - k/a^2 = H_0^2 [(8\rho G r_{0m}/3H_0^2) r_m/r_{0m} - (k/a_0^2 H_0^2) a^2/a_0^2 + L/3H_0^2].$$

Comme $1+z = a_0/a$) et $r_m/r_{0m} = (1+z)^3$ du fait du rapport en volume, en substituant les "W" en vert ,

on arrive à : $H^2 = H_0^2 [(W_m (1+z)^3 + W_L + W_k(1+z)^2]$, (81)

la densité de matière décroît en a^{-3} , la courbure en a^{-2} et W_L est constant.

$$H = a'/a = d(\log [a(t)/a_0]) / dt = d[\log(1/(1+z))] = [-1/(1+z)].[dz/dt] \quad (82)$$

En combinant (81) et (82) nous trouvons

$$dt/dz = - (1+z)^{-1} / \{H_0 [(W_m (1+z)^3 + W_L + W_k(1+z)^2)^{1/2}]\}, \quad (83)$$

En remplaçant W_k par $1 - W_m - W_L$ dans (83) et en intégrant de t_1 jusqu'à maintenant (t_0), on arrive à la formule donnant le temps écoulé jusqu'à maintenant.

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_{z_1}^{z_0} (1+z)^{-1} [(1+z)^2 (1 + W_m z) - z(2+z) W_L]^{-1/2} dz \quad (36 \text{ ter})$$

Avec $t_1=0$, (soit $z \rightarrow \infty$) on obtient l'âge de l'univers, fonction de H_0 , W_m , W_L , Cf ref [2] pour les détails

Revenons au calcul de la distance de Luminosité

On peut noter que l' expression:

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - q_0) z^2] + e (z^{3+}) \quad (78)$$

valable pour $z \ll 1$ est l'évaluation au deuxième ordre de la formule abominable:

$$d_L (z, H_0, W_m, W_L) = (1+z) (H_0^{-1}) (\hat{e} W_k \hat{e}^{-1/2}) \cdot S \{ \hat{e} W_k \hat{e}^{1/2} \hat{0}^z dz' [(1+z')^2 (1 + W_m \cdot z') - z'(2 + z') W_L]^{-1/2} \} \quad (79)$$

qui doit être utilisée si z n'est pas petit et qui s'évalue par calcul numérique (on a posé $c=1$, et $S(x) = \sin x, x$, ou $\sinh x$ pour les univers fermés, plats et ouverts.

Cette formule s'obtient à partir de la définition (70) de la distance de luminosité,

$$d_L = a_0 \cdot r (1 + z) \quad (70)$$

par le fait que la lumière se déplace sur une géodésique radiale nulle ($ds^2 = 0$ métrique de RW avec , $dq, d f = 0$), on a :

$$0 = ds^2 = - dt^2 + (a^2 / 1 - kr^2) \cdot dr^2 \quad (71)$$

d'où $dr/dt = (1 - kr^2)^{1/2} / a(t)$

soit : $a_0 \cdot dr / (1 - kr^2)^{1/2} = (1 + z) dt$

(en multipliant l'équation par $a_0 = a(t_0)$ et de la définition de z ($1+z = a_0/a$)

En utilisant (72) $\dot{t}_1^2 dt/a(t) = \dot{r} dr.(1-kr^2)^{-1/2}$ et en remplaçant t par z selon (36 ter) ci dessous:

$$t_0-t_1 = H_0^{-1} \dot{t}_1^{z_1} (1+z)^{-1} [(1+z)^2 (1+W_{m,z}) - z(2+z) W_L]^{-1/2} dz \quad (36 \text{ ter})$$

on arrive à:

$$a_0 \dot{r}_1 dr.(1-kr^2)^{-1/2} = H_0^{-1} \dot{t}_1^{z_1} dz. [(1+z)^2 (1+W_{m,z}) - z(2+z) W_L]^{-1/2}$$

Les intégrales du membre de gauche sont :

$$a_0 \cdot k^{-1/2} \cdot \arcsin(r_1 \cdot k^{1/2}) \text{ si } k > 0,$$

$$a_0 \cdot r_1 \text{ si } k=0, a_0 \cdot k^{-1/2} \cdot \operatorname{arcsinh}(r_1 \cdot k^{1/2}) \text{ si } k=-1$$

On exprime r_1 en fonction de z , a et d_L par la formule donnant la distance de luminosité (70) et en remplaçant

$W_k = -k/a_0^2 \cdot H_0^2$ par sa valeur, on obtient la formule (79) exprimant la distance de luminosité en fonction du décalage spectral z

Distance d'horizon en fonction du décalage spectral.

De la définition de la distance d'horizon :

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_0}^t dt'/a(t') = a(t) \int_{z_0}^0 \frac{dz'}{a(z')} \text{ tirée de la métrique de RW pour un rayon lumineux radial (} ds^2=0, dj, dq=0 \text{)}$$

Comme on vient de voir que : $a' = aH_0 [(W_m (1+z)^3 + W_L + W_k(1+z)^2)]^{1/2}$

En moulinant tout cela on arrive à : $d_H(t) = [H_0 \cdot (1+z)]^{-1} \int_{z_0}^0 f(z') dz'$

Avec $f(z) = [(W_r (1+z)^4 + (W_m (1+z)^3 + W_L + W_k(1+z)^2 + (W_x (1+z)^{-3(1+a)}))]^{-1/2}$

Où on a introduit pour être complet, une contribution du rayonnement et d'une matière hypothétique X qu'on néglige en général

Supernova Cosmology project :

(mesure de H_0 et T par (36 ter) et (79) plaide en faveur d'une **densité actuelle critique** mais avec une **partie dominante de constante cosmologique** $W_L = 0,72$, $W_m = 0,28$. Pourquoi la somme vaut elle 1 maintenant ?

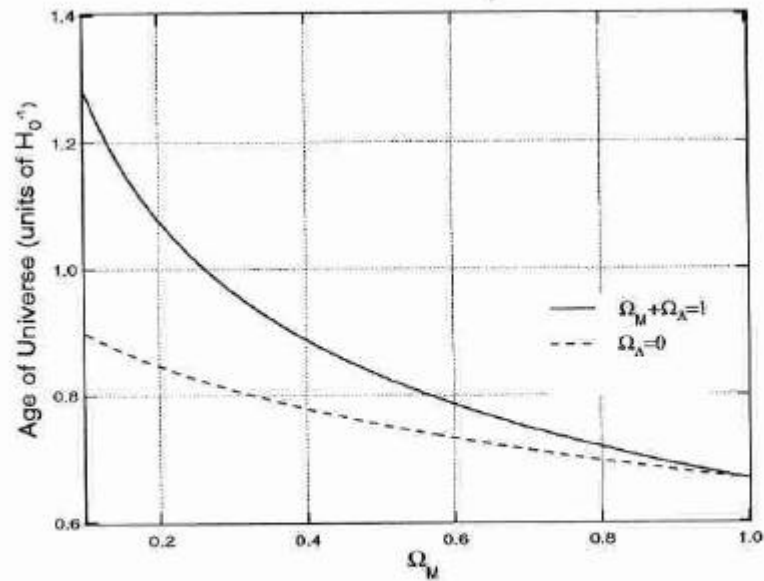


Figure 4.3: The age of the Universe in units of H_0^{-1} as a function of the matter density Ω_M for the two cases $\Omega_\Lambda = 0$ and $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. The value $2/3$ at $\Omega_M = 1$ corresponds to an age of around 10 billion years, if the Hubble parameter h is 0.65.

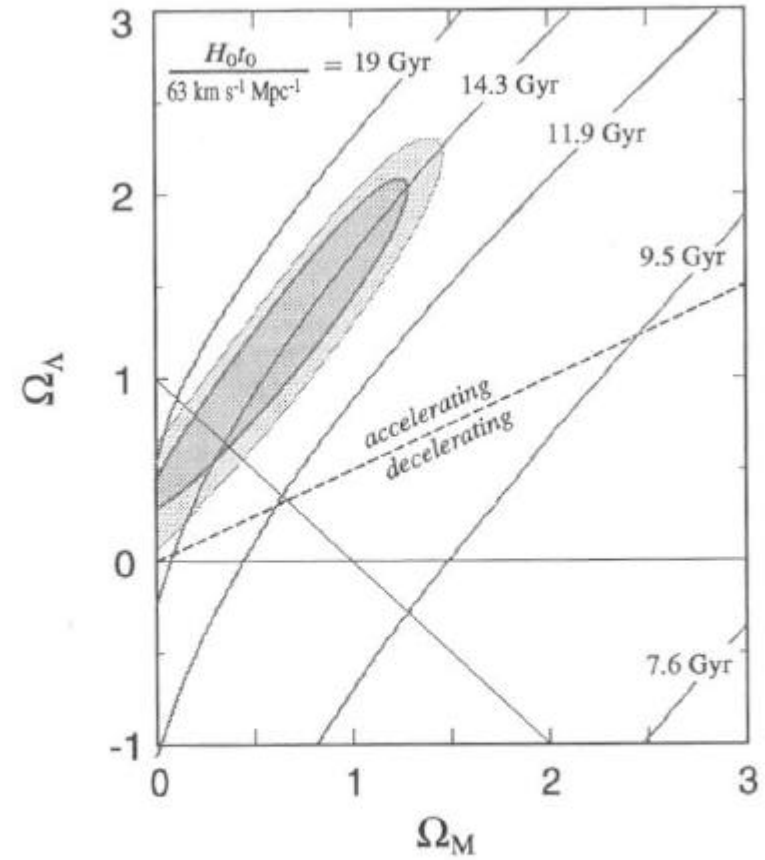
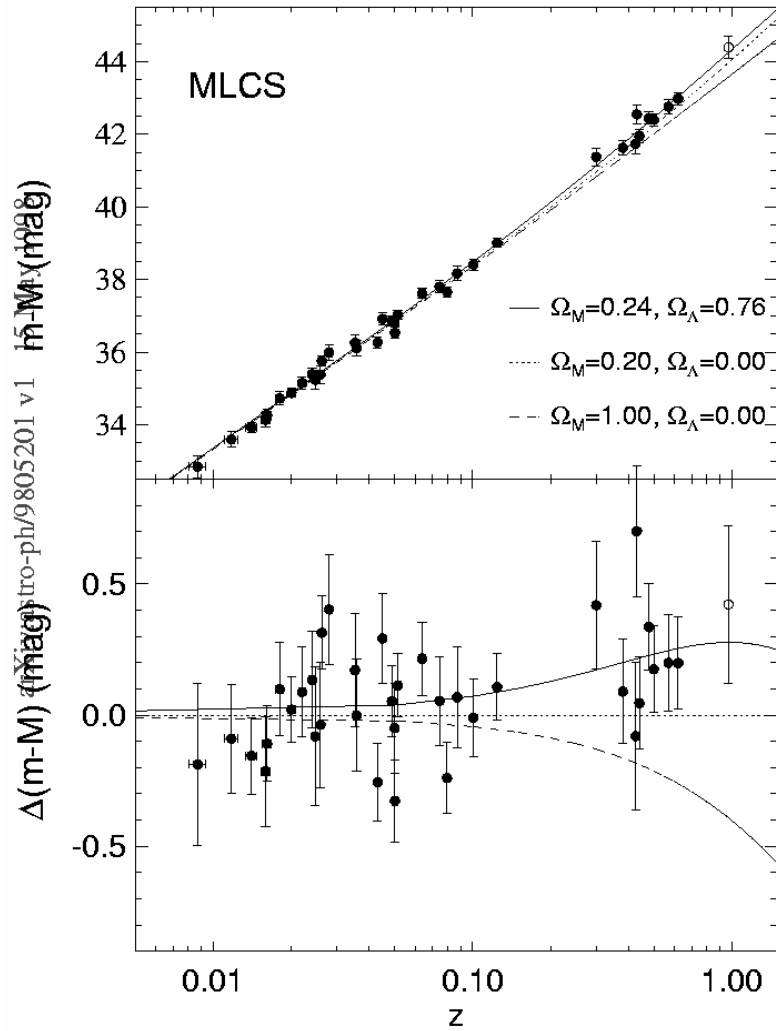


Figure 4.5: Best-fit coincidence regions in the Ω_M - Ω_Λ plane from the analysis of the *Supernova Cosmology Project* [28]. The dark and light ellipses show the 68 per cent and 90 per cent confidence regions. A flat Universe ($\Omega_K = 0$) would fall on top of the diagonal solid line passing through the Einstein de Sitter solution. To the right of that line the Universe is closed, and to the left it is open. The dashed line shows the division between acceleration and deceleration for the Universe. Also shown are isochrones of constant age.

Projet Boomerang (mesure fine de l'anisotropie du RFC)

On sait qu'un des mystères du RFC est son isotropie à large échelle, puisque ces régions n'étaient pas causalement connectées au moment du découplage (expliqué par l' inflation). Les régions connectées sont de distance angulaire faible $< 1^\circ$. La distance d'horizon (qui dépend de la nature de l'Univers) était faible à l'époque du découplage (0,5 Mpc). L'examen de la structure de tels domaines va se révéler instructive.

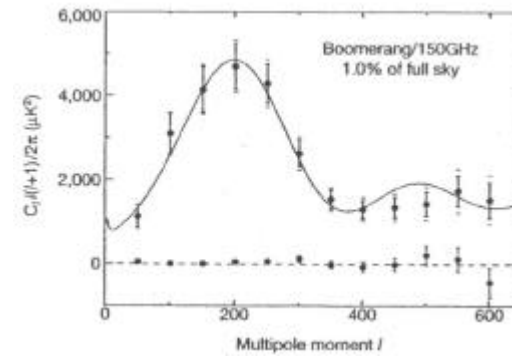
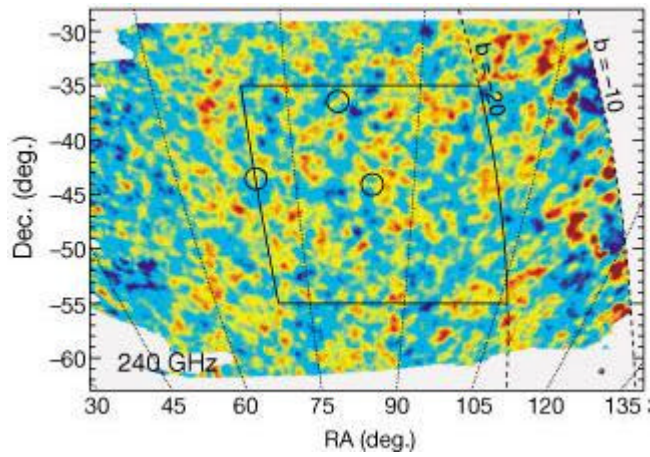
Les anisotropies présentes au moment du découplage lumière matière, causées par les inhomogénéités des distributions de matière, créant des puits de gravitation dans un fluide soumis à une forte pression radiative, a provoqué des oscillations acoustiques dans ce fluide. Les régions de compression et de dépression se propageant dans l'espace environnant causalement connecté. L'état de ces oscillations au moment du découplage s'est conservé et se propage avec le rayonnement fossile.

En quoi cela peut il nous renseigner sur la constitution de l'Univers ?

Les oscillations étaient confinés dans un espace causal limité par H_{rec}^{-1} . Il faut donc une résolution correspondante à cette taille. On calcule facilement que l'angle de résolution Δq ($z_{decouplage} = (D_A \cdot H)^{-1}$, où D_A est la distance angulaire dans un univers de Friedmann Lemaître . Le premier pic acoustique est supposé être à la distance angulaire Δq , qui est très sensible aux paramètres W_m , W_L , comme cela est montré sur la figure 11.2. La luminance de fond est reproduite sur les figures suivantes (large échelle et détail).

Son analyse par décomposition en harmoniques sphériques fournit un spectre de puissance qui présente un premier pic au moment multipolaire $l_p = 197 \pm 6$ correspondant à un angle $q = p/l_p = (0,91 \pm 0,03)^\circ$.

La hauteur du pic est $DT = (69 \pm 10)\mu K$



190 Cosmic microwave background radiation

[Ch. 11

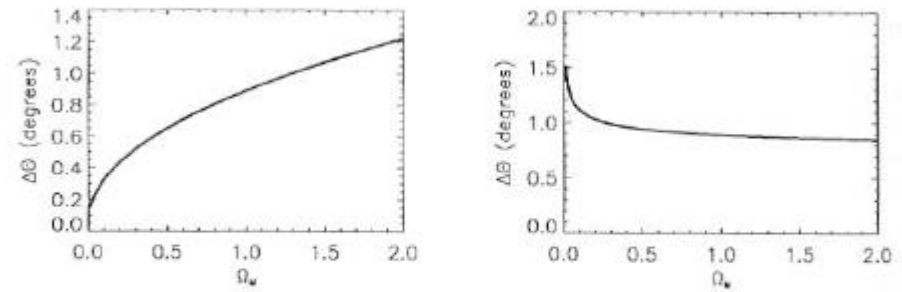
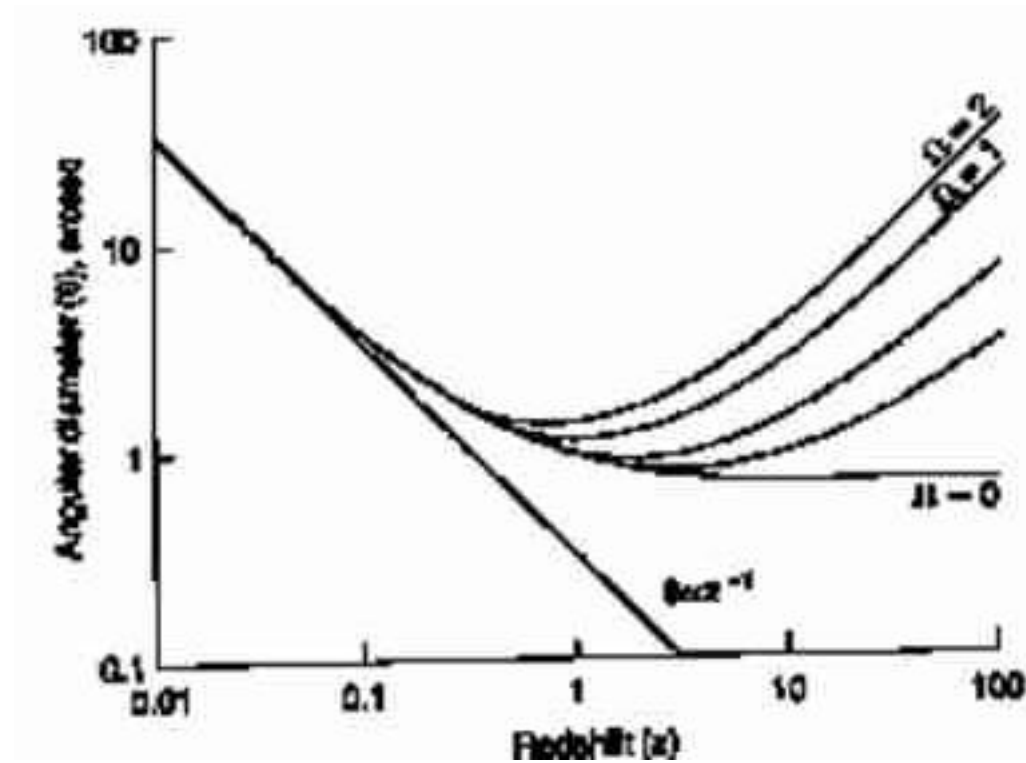
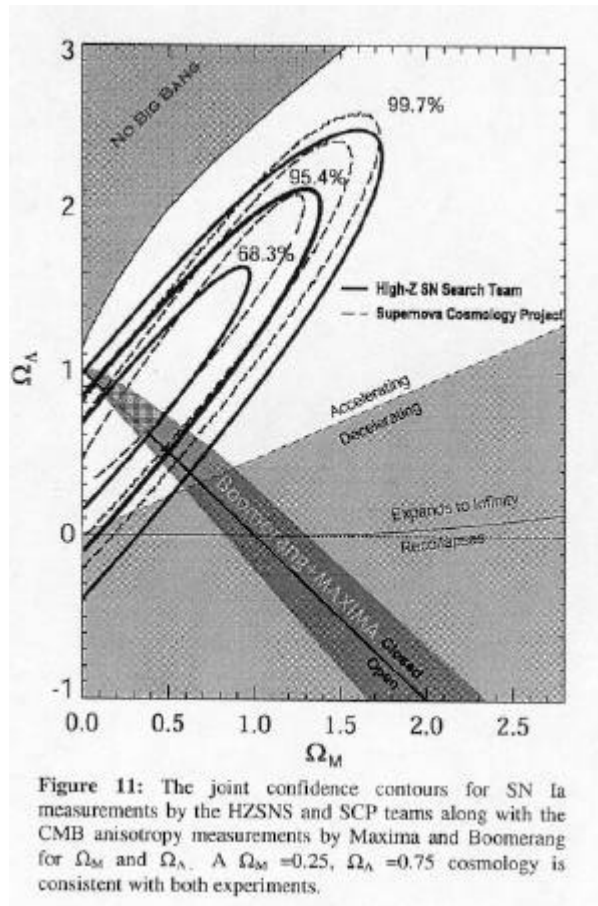


Figure 11.2: Angular size of regions in causal contact ($r_H = H^{-1}$) at $z_{rec} = 1100$ as a function of Ω_M . In the left-hand plot $\Omega_\Lambda = 0$ and in the right-hand side for a flat Universe, $\Omega_L = 1 - \Omega_M$.

Synthèse des deux expériences et diagramme de détermination de Ω par distance angulaire

Comme le montre le diagramme ci dessous , il y a une zone de recouvrement correspondant à une solution possible.



Distance angulaire en fonction du redshift pour différents modèles

Conclusion

La mesure de la distance de luminosité et du "Décalage vers le rouge" d'un nombre suffisant de galaxies nous permet de déterminer H_0 et q_0 , et nous fournissent une piste permettant de déterminer dans quel type FLRW nous vivons. Les observations sont délicates et les valeurs de ces paramètres très contestés. Nous avons vu comment l'âge de l'univers dépend des valeurs relatives des différents W et de leur somme.

Signalons d'autres méthodes qui sont utilisées dont le recoupement permet de conforter les résultats d'observation:

Mesure de la distance angulaire, que nous avons utilisé pour le projet boomerang :

$d_A = D/dq = a_1(t_1).r_1 = d_L / (1+z)^2$, mais qui peut aussi être utilisée pour déterminer la nature des W par la position du minimum de dq fonction de z . cf ref [4] et [2]

Mesure de la luminosité de surface : luminosité apparente par unité de surface angulaire :

$$\dot{\alpha} = l/pd^2 = L / (1+z)^4 . (4p^2d^2) .$$

Elle ne dépend que de z , de la luminosité intrinsèque L de la source et de sa dimension d .

Elle permet de distinguer le cas d'un modèle dont le z est cosmologique d'un autre modèle (lumière fatiguée par exemple).

Cette vérification a été réalisée très récemment.

Dépendance du décalage vers le rouge de l'horizon des évènements, cf ref [2], liste non exhaustive ...

Dans la prochaine décade de nouvelles stratégies et des applications plus précises des anciennes stratégies pourraient nous permettre d'obtenir des réponses plus fiables.

Nous pouvons signaler le projet de grande ampleur "supernova Cosmology project" qui apporte une contribution importante et innovante à la connaissance des paramètres H et W_m et W_L .

Toutefois il faut rester prudent, le passé nous ayant enseigné combien dans ce domaine, les mesures sont délicates et peuvent être remises en cause par un phénomène qui n'avait pas été pris en compte.

Glossaire

[Accélération de l'Univers](#)

[Age de l'Univers \(1995\)](#)

[Age de l'Univers \(2002\)](#)

[Big Bang \(Création soudaine\)](#)

[Boomerang \(mesure fine de l'anisotropie du RFC \)](#)

[Calcul de H0 par distance de luminosité](#)

[Critique \(expansion\)](#)

[Constante Cosmologique](#)

[Constante de Hubble](#)

[Décalage vers le rouge \(Redshift\)](#)

[Décélération](#)

[Densité de l'Univers](#)

[Discussion méthode d'évaluation des paramètres](#)

[Distance Angulaire](#)

[Distance de Luminosité](#)

[Echelle](#)

[Equation d'Einstein](#)

[Equation d'Etat](#)

[Equation de Friedman](#)

[Equation de Hubble](#)

[Equation de Lemaître](#)

[Estimation densité](#)

[Etude qualitative de l'équation de Friedmann](#)

[Evolution Univers](#)

[Expansion \(Pudding\)](#)

[Exacte \(solution de l'équation de Friedman pour la matière\)](#)

[Exacte \(solution de l'équation de Friedman pour le rayonnement\)](#)

[Exacte \(solution de l'équation de Friedman pour le vide\)](#)

[Facteur d'échelle](#)

[Fermés \(Univers\)](#)

[Fluides](#)

[Fluide matière](#)

[Fluide rayonnement](#)

[Fluide vide](#)

[Formule de distance de luminosité](#)

[Horizon des évènements](#)

[Inflation](#)

[Mach \(principe de\)](#)

[Masse manquante](#)

[Matière invisible](#)

[Mesure constante de Hubble](#)

[Méthode de mesure des paramètres](#)

[Métrie à priori](#)

[Mixte \(Univers matière + constante cosmologique\)](#)

[Nouvelles stratégies](#)

[Observation directe](#)

[Oméga \(variation au cours du temps\)](#)

[Paramètres Cosmologiques](#)

[Paramètre de décélération q](#)

[Plat/ouvert \(Univers\)](#)

[Répulsive \(Constante Cosmologique\)](#)

[Résolution Equation d'Einstein](#)

[Robertson Walker \(métrique\)](#)

[Solutions exactes de l'équation de Friedman](#)

[Supernova Cosmology project](#)

[Synthèse évolution de l'Univers](#)

[Tenseur d'Einstein](#)

[Tenseur Energie Impulsion](#)

[Terminologie](#)

[Topologie d'Univers](#)

[Topologie d'Univers \(conservation\)](#)

[Types d'Univers à priori](#)

[Univers \(dans quel Univers vivons nous ?\)](#)

[Vitesse d'expansion](#)

Cosmologie: le Modèle Standard: Mai 2002 , Jacques FRIC

Références

- Lecture notes on general relativity par Sean M. Carroll (<http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/>) [1]
- Cosmology and particle astrophysics par Lars Bergström et Ariel Goobar (Wiley) [2]
- Astronomie et astrophysique par Marc Seguin et Benoît Villeneuve (Masson) [3]
- Géométrie du Big Bang : Autour de Robertson Walker. A. Bouquet (Site web du Collège de France) [4]
- Dynamique du Big Bang : Le modèle du Big Bang. A. Bouquet (Site Web du Collège de France) [5]
- L'Univers est-il chiffonné : J.P Luminet (l'Astronomie juillet/Août/septembre 2001) [6]
- Université Montpellier II, Module Cosmologie : BOOMERanG : H. Reboul [7]
- Measuring Global Curvature and Cosmic acceleration with supernovae : Brian . P. Schmidt [8]
- Ned Wright's Cosmology tutorial : <http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm> [9]
- Albert Einstein Œuvres choisies, tome 3 (., Cosmologie,..): Sources du savoir Seuil / CNRS [10]
- Lombry Luxurion , <http://www.astrosurf.com/lombry/menu-cosmologie.htm> [11]