



COSMOLOGIE NEWTONNIENNE

Sommaire

①

- Les trois mages de la cosmologie
- Potentiel newtonien
- Equation de Friedmann
- Deux groupes d'univers types
- Le catalogue
- Début et fin de l'univers
- Conclusion

Édouard BASSINOT

Commission Cosmologie 2010 SAF



②

LES TROIS MAGES DE LA COSMOLOGIE



Les trois mages de la cosmologie ③

Principe cosmologique

- * La cosmologie est une théorie qui se propose d'étudier $\left. \begin{array}{l} \text{la géométrie} \\ \text{l'évolution} \end{array} \right\}$ de l'univers considéré dans son ensemble.
- * La cosmologie repose sur une hypothèse : le **principe cosmologique** qui admet que l'univers fut et est encore **globalement** homogène et isotrope.
- * On assimile donc l'univers à un **fluide cosmique** omniprésent caractérisé par sa masse spécifique, sa température et sa pression uniformes.
- * Dès 1917, Einstein avait vu que cette hypothèse permettait à la RG de décrire l'univers comme un tout. C'est donc au père de la RG que revient le mérite d'avoir élevé la cosmologie au rang de Science.
- * Malheureusement pour Einstein comme pour les Savants de l'époque, l'univers devait être statique. Or, sa RG lui disait le contraire !
- * Einstein "bâillonna" donc ses équations en introduisant une constante Λ dite **cosmologique** à laquelle il donna la valeur "ad hoc" pour que l'univers soit statique.



Les trois mages de la cosmologie 4

Friedmann - Lemaitre - Gamow.

- * Deux événements allaient ébranler les "certitudes statiques":
 - d'une part en 1922, le Russe **Friedmann** démontra que l'univers d'Einstein était certes statique mais instable.
 - d'autre part en 1924, les observations de Hubble au mont Wilson montrèrent que l'univers est en expansion.
- * Ces découvertes amenèrent un physicien Belge, **l'Abbé Lemaitre**
 - à affirmer que les galaxies sont immobiles dans le substratum espace-temps qui enfle.
 - à émettre l'hypothèse de l'atome primitif: l'univers tout entier était initialement contenu dans un espace infiniment plus petit qu'un atome d'hydrogène. Densité hallucinante.
- * Einstein reconnut avoir commis la plus grosse "bavure" de sa vie avec sa constante cosmologique Λ .
- * Enfin **Gamow** gratifia l'atome primitif d'une température gigadantesque dont le rayonnement fossile découvert vingt ans plus tard est le lointain écho.
- * Fred Hoyle, adversaire de la singularité initiale, la nomma Big-Bang par dérision, terme ^(devenu) fétiche!



5

POTENTIEL NEWTONIEN



Potentiel newtonien La méthode

⑥

- * L'approche newtonienne de la cosmologie consiste à appliquer
 - le 1^{er} principe de la thermodynamique au système "Cosmos",
 - le théorème de conservation de l'énergie mécanique à une "galaxie test",ce qui évite de faire appel à la RG mais qui nous oblige à quelques irrégularités.
- * La force d'attraction newtonienne dérive d'un potentiel que nous utiliserons pour exprimer l'énergie potentielle de la galaxie test.
- * Par cette méthode on obtient une équation différentielle du 1^{er} ordre, non linéaire identique à celle tirée de la RG : c'est l'équation de Friedmann, socle de la cosmologie.
- * L'évolution de l'univers est déterminée par la lutte entre deux forces antagonistes :
 - la force responsable de l'expansion de l'Univers (liée à l'énergie cinétique)
 - la force gravitationnelle (liée à l'énergie potentielle).



Potentiel newtonien

Champ de gravitation et potentiel

(7)

* Soit un corps homogène, de forme quelconque, de volume \mathcal{V} , de masse spécifique μ . Soit d'autre part une "masse test" ponctuelle m placée en A de coordonnées

cartésiennes
 a, b, h

sphériques
 φ_A, θ_A, r_A

$$\begin{aligned} a &= r_A \cos \theta_A \cos \varphi_A \\ b &= r_A \cos \theta_A \sin \varphi_A \\ h &= r_A \sin \theta_A \end{aligned}$$

voir Fig 1

* La masse contenue dans le volume élémentaire $d^3\mathcal{V}$ de centre P est $d^3M = \mu d^3\mathcal{V}$, soit en coordonnées cartésiennes

$$d^3M = \mu dx dy dz$$

en coordonnées sphériques

$$d^3M = \mu r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

* L'énergie potentielle de m dans le champ gravitationnel créé par M est: $\Pi(a, b, h) = -Gm\mu \iiint_{\mathcal{V}} \frac{d^3\mathcal{V}}{PA}, (0)$

soit, en coordonnées cartésiennes

$$-Gm\mu \iiint_{\mathcal{V}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-h)^2}}$$

soit, en coordonnées sphériques

$$-Gm\mu \iiint_{\mathcal{V}} \frac{r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi}{\sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi - a)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi - b)^2 + (r \sin \theta - h)^2}} \quad (1)$$



⑧

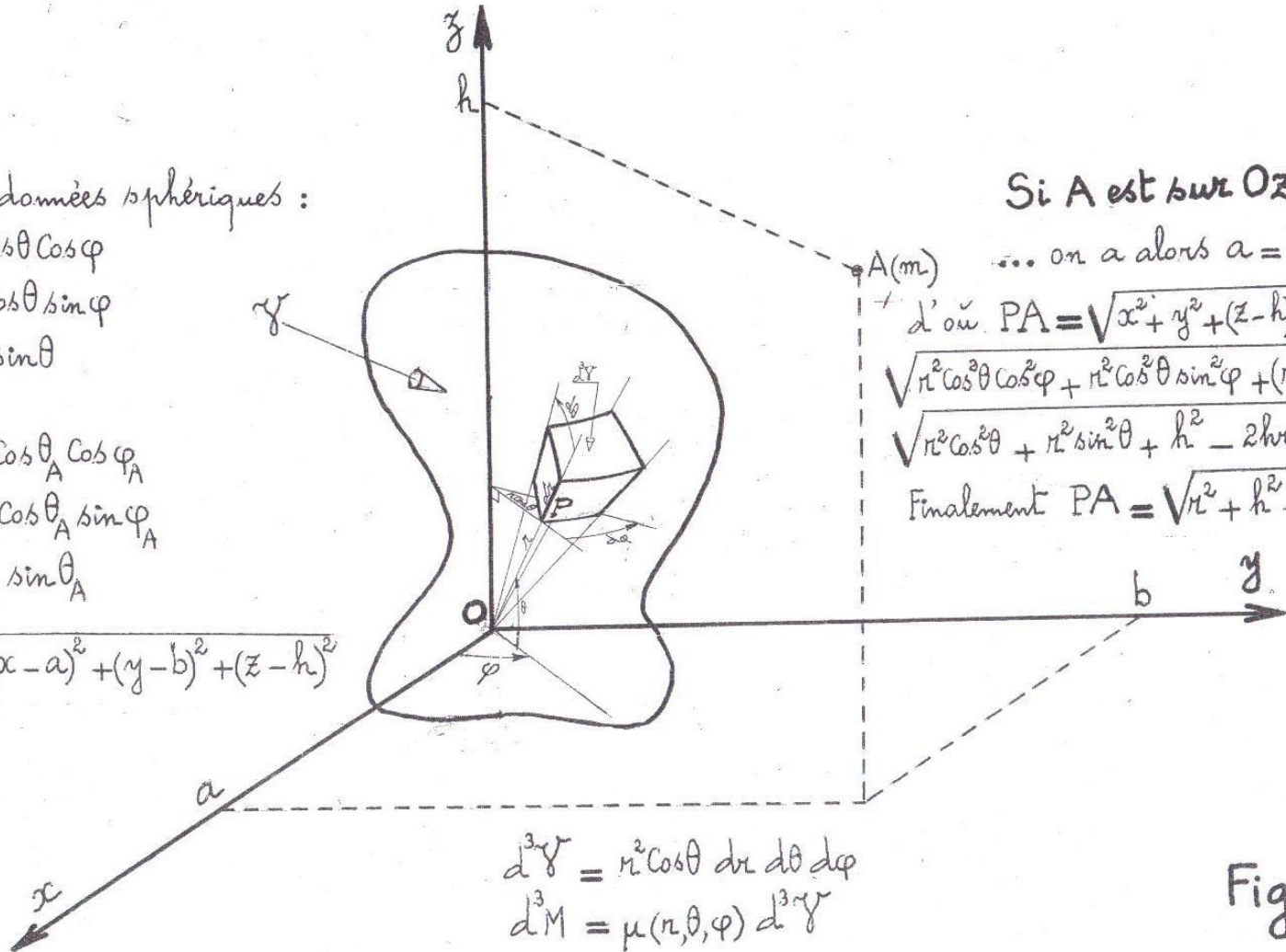
Potentiel newtonien Maillage en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques :

$$\mathbf{P} \begin{cases} x = r \cos\theta \cos\varphi \\ y = r \cos\theta \sin\varphi \\ z = r \sin\theta \end{cases}$$

$$\mathbf{A} \begin{cases} a = r_A \cos\theta_A \cos\varphi_A \\ b = r_A \cos\theta_A \sin\varphi_A \\ h = r_A \sin\theta_A \end{cases}$$

$$PA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-h)^2}$$



Si A est sur Oz...

... on a alors $a=b=0$

$$\begin{aligned} \text{d'où } PA &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + (r \sin\theta - h)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta + h^2 - 2hr \sin\theta} \\ \text{Finalement } PA &= \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \sin\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3\gamma &= r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ d^3M &= \mu(r, \theta, \varphi) \, d^3\gamma \end{aligned}$$

Fig 1



Potentiel newtonien Cas d'une "boule"

9

* Remplaçons V de forme quelconque par une **boule** (Σ) de centre O , de rayon R , faite d'un matériau homogène de masse spécifique μ à l'instant t . Dans ce qui suit, (Σ) représente tout l'univers de masse M_G .

* Utilisons la symétrie pour choisir OA comme axe Oz d'où les coordonnées de $A(0,0,h)$. Dans ces conditions PA , dénominateur de (1) se simplifie et donne :

$$PA = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + (r \sin \theta - h)^2} = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \sin \theta} \quad (2)$$

* Pour couvrir l'ensemble du volume (Σ) , il faut faire varier $\left\{ \begin{array}{l} - \text{le rayon courant } r \text{ de } 0 \text{ à } R \\ - \text{l'angle } \varphi \text{ de } 0 \text{ à } 2\pi \\ - \text{l'angle } \theta \text{ de } -\frac{\pi}{2} \text{ à } +\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$ voir Fig 2

* L'énergie potentielle de m à l'instant t dans le champ gravitationnel créé par $M_G = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$ contenue dans (Σ) est d'après (1) et (2) :

$$\Pi(0,0,h) = -Gm\mu \iiint_{(\Sigma)} \frac{r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \sin \theta}} = -Gm\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \sin \theta}} \right) dr$$

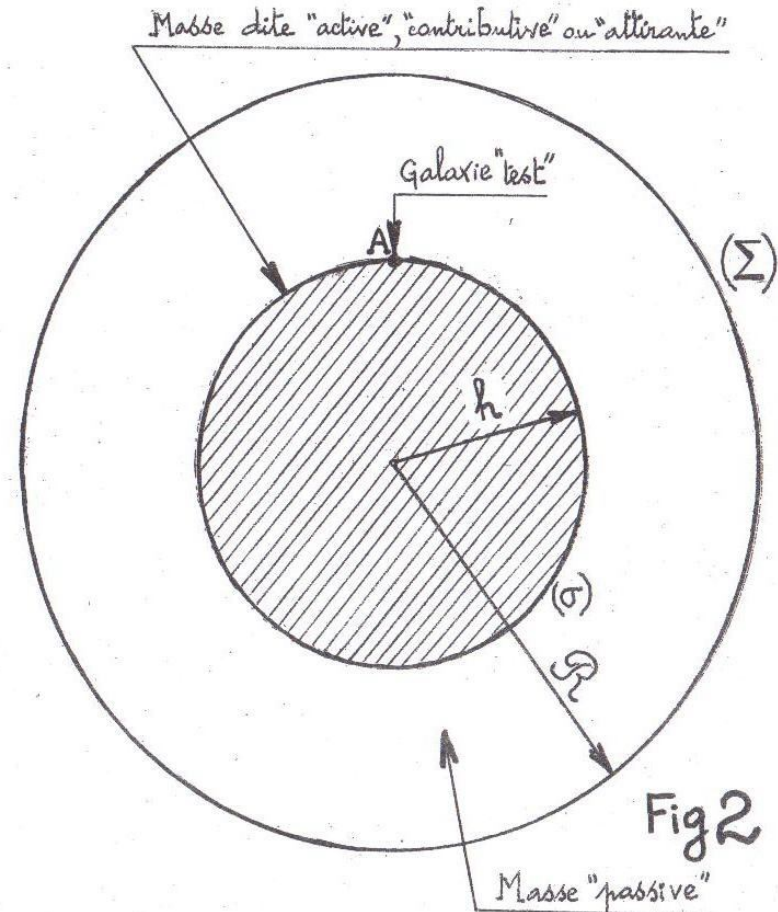
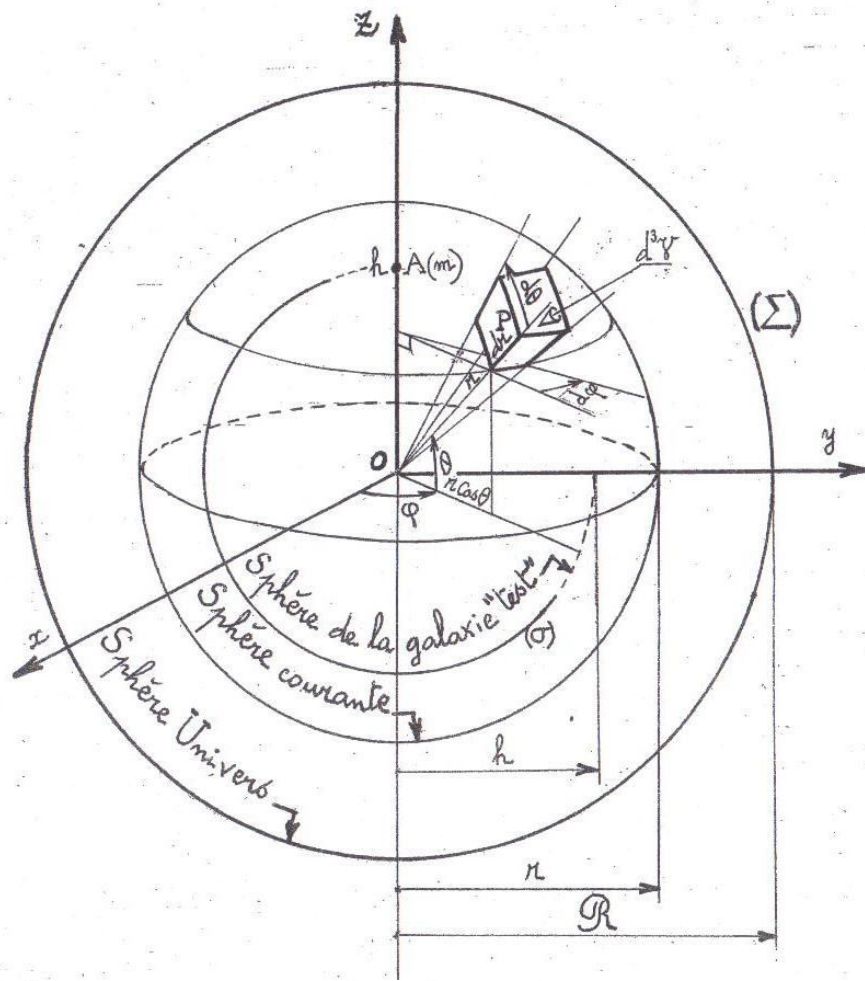
* Il est facile de montrer que $I(r) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \sin \theta}} = \frac{r+h - |r-h|}{hr}$

et comme $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, on a finalement $\Pi(h) = -\frac{2\pi Gm\mu}{h} \int_0^R (r+h - |r-h|) r \, dr$ voir calcul planche suivante.



Potentiel newtonien
Masse active, masse passive

10





Potentiel newtonien Energie potentielle de la galaxie

(11)

* Dans la suite, nous prendrons comme particule test m une galaxie A. En effet, compte tenu de l'immensité de l'Univers, une galaxie peut être assimilée à un point. Par définition, une galaxie est intérieure à l'Univers: c'est pourquoi nous allons calculer l'énergie potentielle de A pour $h \leq \mathcal{R}$ seulement.

* Considérons $\bar{w}(h) = -\frac{\Pi(h)}{2\pi G m \mu} = \int_0^{\mathcal{R}} (r+h - |r-h|) r dr$ (3)

* Puisque A est intérieure à (Σ) , on a $0 \leq h \leq \mathcal{R}$. Or $\begin{cases} \text{pour } r \leq h, \text{ on a } |r-h| = h-r \\ \text{pour } r \geq h, \text{ on a } |r-h| = r-h \end{cases}$ d'où le calcul ci-après de $\bar{w}(h)$.

* L'intégrale (3) s'écrit donc $\bar{w}(h) = \int_0^h [r+h - (h-r)] r dr + \int_h^{\mathcal{R}} [r+h - (r-h)] r dr$
 $= \int_0^h 2r^2 dr + \int_h^{\mathcal{R}} h \cdot 2r dr = \left| \frac{2}{3} r^3 \right|_0^h + h \left| r^2 \right|_h^{\mathcal{R}} = h \left(\mathcal{R}^2 - \frac{h^2}{3} \right)$

* A l'instant t , l'énergie potentielle de la galaxie A dans l'univers est :

$$\boxed{\Pi(h) = -2\pi G m \mu \left(\mathcal{R}^2 - \frac{h^2}{3} \right)} \quad (4) \quad \underline{\underline{\Pi(h) < 0}} \text{ puisque } h \leq \mathcal{R}$$



Potentiel newtonien Masses passive et contributive

12

* L'intensité de la force de gravitation exercée par l'univers (Σ) sur la galaxie A est

$$F = \frac{d\Pi}{dh} = \frac{4}{3} \pi G m \mu h = \frac{G m \mu}{h^2} \times \frac{4}{3} \pi h^3$$

* Or $M(h) = \mu \frac{4}{3} \pi h^3 < M(\mathcal{R})$ est la masse de la portion d'univers intérieure à la sphère (σ) de rayon h , concentrique à (Σ) et l'on a $F = \frac{G m M(h)}{h^2}$

* Donc puisque A est intérieure à (Σ) de masse totale M , la conclusion

- attendue est que tout se passe comme si A était soumise à l'attraction newtonienne de (σ) dont la masse $M(h)$ serait concentrée en O .
- inattendue est que A ignore la masse extérieure à (σ).

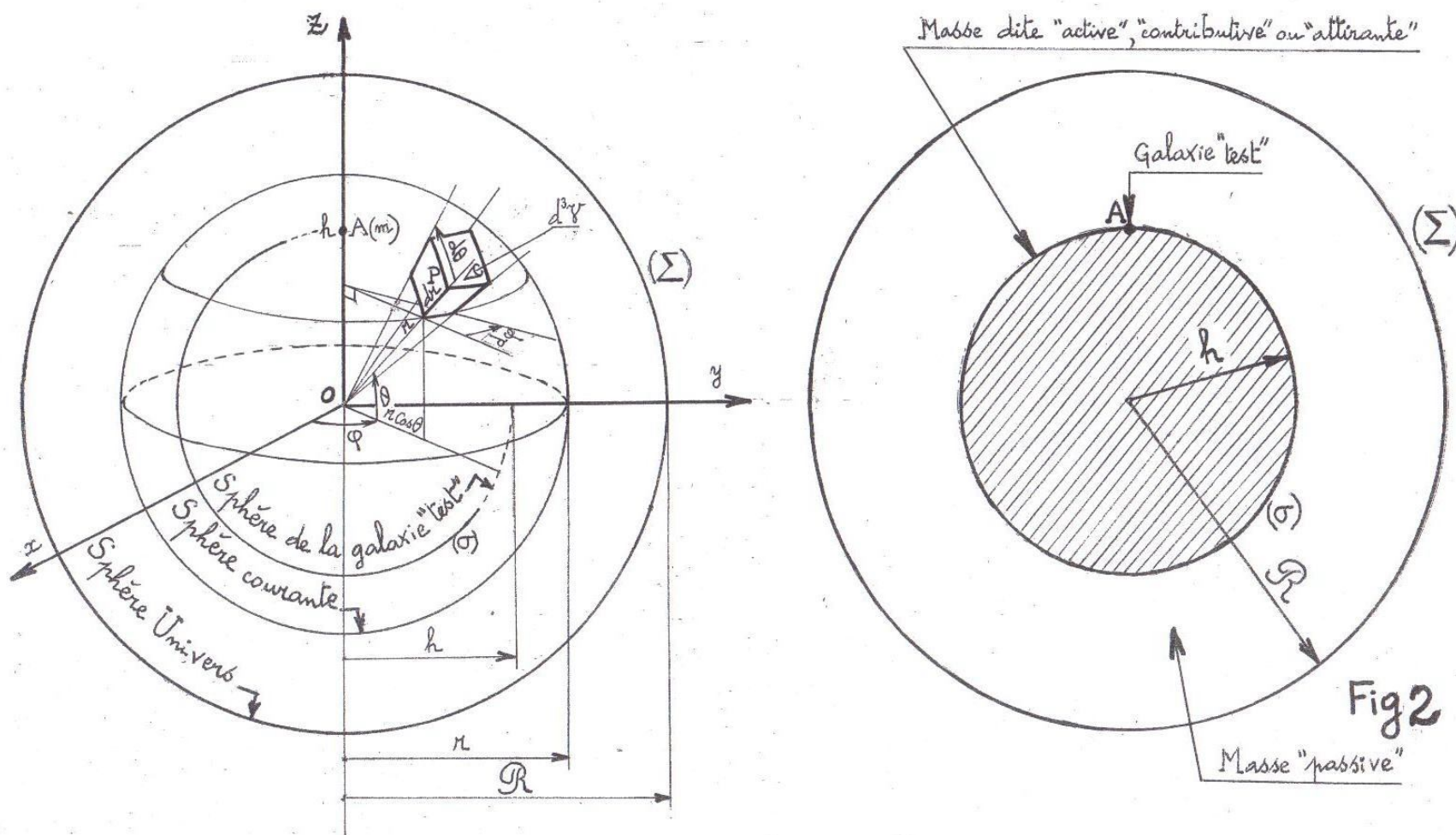
* C'est pourquoi $M(h)$ est dite masse "active" ou "contributive" alors que l'effet gravitationnel de $M - M(h)$ sur A de masse m est nul : cette masse est dite "passive". (voir Fig 2)



Potentiel newtonien

Masse active, masse passive

13





14

EQUATION DE FRIEDMANN



Equation de Friedmann

Facteur d'échelle et coordonnées comobiles

15

* L'expansion telle qu'imaginée par Lemaitre nous amène à utiliser des coordonnées dites **comobiles** dont le maillage accompagne l'espace dans son expansion : référentiel souple.

* Dans un référentiel classique rigide, les coordonnées d'une galaxie varient en fonction du temps alors qu'elles sont constantes dans un référentiel comobile.

* Nous écrivons donc $\begin{cases} h = a(t) \cdot h_0 \\ R = a(t) \cdot R_0 \end{cases}$ (5) soit aussi $\frac{h}{h_0} = \frac{R}{R_0} = a(t)$ voir Fig 3

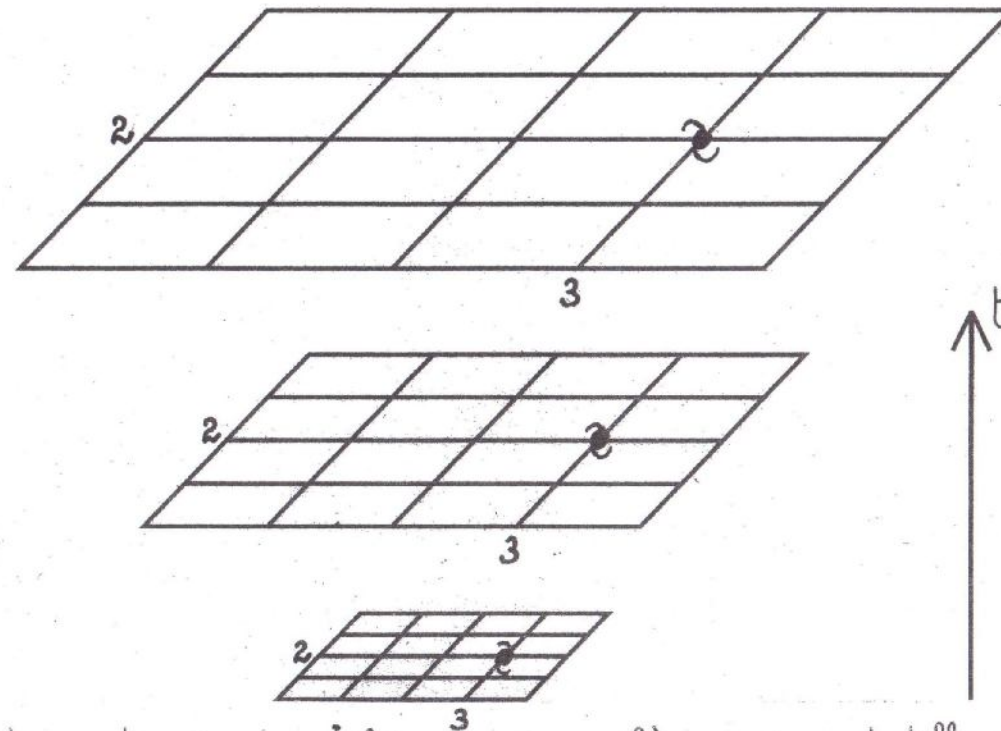
* Le coefficient $a(t)$ est une fonction adimensionnelle, positive appelée "facteur d'échelle" qui ne dépend que du temps t et qui est telle qu'au temps cosmique actuel $t=0$, on ait :
$$a(0) = a_0 = 1$$

* Le facteur d'échelle mesure l'expansion de l'univers.

* Les rayons $\begin{cases} h \text{ et } R \text{ sont des distances physiques variables en fonction du temps.} \\ h_0 \text{ et } R_0 \text{ sont des distances comobiles constantes.} \end{cases}$

Equation de Friedmann
Coordonnées comobiles

16



Le système de coordonnées comobile accompagne l'expansion de telle sorte que les coordonnées de tout objet lié à cet espace en expansion restent constantes.

Fig 3



Equation de Friedmann Premières brumes !

17

- * Nous allons commettre notre première "indélicatesse" en écrivant que l'énergie interne du "système univers" est :

$$U = \mathcal{M}c^2 \quad \mathcal{M} = \text{contenu masse/énergie de l'univers}$$

- * C'est une indélicatesse caractérisée par la mécanique newtonienne qui est la seule que nous prétendons utiliser ici, ne permet pas d'établir la célèbre relation $E = mc^2$. Seule, la mécanique relativiste conduit à ce résultat.
- * Pour apaiser notre conscience, nous dirons
 1. qu'il est légitime d'utiliser l'expression de l'énergie interne d'un système, même si cette expression a été obtenue "par ailleurs".
 2. que cet "ailleurs" qui n'est autre que la dynamique relativiste est une généralisation de la dynamique newtonienne.
 3. que la dynamique relativiste a un champ d'application plus vaste que la dynamique newtonienne mais qu'elles ne sont pas incohérentes.



Equation de Friedmann Equation aux densités

18

* D'après la relation "masse-énergie" d'Einstein, l'énergie interne U du système Univers est :

$$U = \mu c^2 = \mu(t) \frac{4}{3} \pi R_0^3 c^2 = \mu(t) \cdot [a(t)]^3 \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 c^2 \quad (6)$$

* Appliquons à l'Univers le 1^{er} principe de la thermodynamique $dU = dQ^* + dW^*$:

- l'expansion de l'Univers est adiabatique donc $dQ^* = 0$

- l'échange de travail avec l'extérieur (le néant!) se limite à celui des forces de pression $dW^* = -p dV$ } d'où

$$dU + p dV = 0 \quad (7)$$

* En différentiant (6), il vient : $dU = \frac{4}{3} \pi R_0^3 c^2 \{ 3\mu(t) [a(t)]^2 a'(t) + [a(t)]^3 \mu'(t) \} dt$

D'autre part,
$$dV = \left\{ \frac{4}{3} \pi R_0^3 [a(t)]^3 \right\}' dt = 4\pi R_0^3 [a(t)]^2 a'(t) dt$$

* Portons dU et dV dans (7) : $\frac{4}{3} \pi R_0^3 c^2 \{ 3\mu(t) [a(t)]^2 a'(t) + [a(t)]^3 \mu'(t) \} + 4\pi R_0^3 p(t) [a(t)]^2 a'(t) = 0$

ou encore

$$\frac{c^2}{3} [a(t)]^2 \{ 3\mu(t) a'(t) + a(t) \mu'(t) \} + p(t) [a(t)]^2 a'(t) = 0$$

et finalement :

$$\boxed{\mu' + 3 \frac{a'}{a} \left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) = 0} \quad (8)$$

* Le 1^{er} principe nous apprend donc comment la masse spécifique μ du "fluide univers" évolue avec le temps. Il suffit maintenant de connaître l'équation d'état de ce fluide pour tirer de (8) la fonction $\mu(a)$.

(1) dQ^* et dW^* désignent la chaleur et le travail algébriquement reçus par l'Univers dans une transformation infiniment petite.



Equation de Friedmann Conservation de l'énergie mécanique

(19)

* La galaxie A, introduite planche 6, s'éloigne radialement de O par suite de l'expansion de l'espace (Σ).

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Energie potentielle de A: } \Pi(h) = -2\pi G m \mu \left(R^2 - \frac{h^2}{3} \right) \quad (4) \\
 & \text{Energie cinétique de A: } K(h) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \quad (9)
 \end{aligned} \right\} \text{Energie mécanique } E = K + \Pi \quad (10)$$

\uparrow positif
 \downarrow négatif

* En l'absence de tout échange d'énergie avec le milieu extérieur (l'Univers), toute variation d'énergie cinétique de la galaxie est compensée par une variation de son énergie potentielle égale et de signe contraire.

* L'énergie mécanique E de la galaxie est donc constante et l'on a au temps cosmique t :

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 - 2\pi G m \mu \left(R^2 - \frac{h^2}{3} \right) = C^{ste} \quad (11)$$

* En coordonnées comobiles, l'équation (11) devient, compte tenu de ce que $\frac{h}{h_0} = \frac{R}{R_0} = a(t)$:

$$E = \frac{1}{2} m h_0^2 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{2}{3} \pi G m \mu \left(3R_0^2 - h_0^2 \right) a^2 = C^{ste} \quad \text{ou encore}$$

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{2E}{m h_0^2 a^2} + \frac{4}{3} \pi G \mu \times \frac{3R_0^2 - h_0^2}{h_0^2} \quad (12)$$

de t mais E, m, h_0 et R_0 sont des constantes.



Equation de Friedmann On liquide!

20

* Puisque la masse comprise entre les deux sphères concentriques (σ) et (Σ) est "passive", nous choisirons comme galaxie test une galaxie périphérique c.à.d. placée sur (Σ) aux confins de l'univers, soit $h = R$ ou $h_0 = R_0$.

* Faisons $h_0 = R_0$ et posons $E = -\frac{1}{2} k m c^2 h_0^2$ dans l'équation (12) qui devient

$$\boxed{\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{k c^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3} \mu} \quad (13)$$

{ c'est la forme classique de l'équation de Friedmann telle qu'on la tire de la RG.

* Poser $E = -\frac{1}{2} k m c^2 h_0^2$ revient à remplacer la constante E par la constante k . A noter que k a les dimensions de l'inverse du carré d'une longueur.

* Cette "manip." nous a permis de faire disparaître deux témoins gênants h_0 et R_0 :

- la position de la galaxie test ne joue aucun rôle puisque h_0 n'intervient plus.
- l'hypothèse "univers boule" disparaît avec R_0 .

* La question jugée inconvenante par certains de savoir si l'univers actuel est fini ou non, ne se pose plus.



Equation de Friedmann, Comme une porte : ouvert ou fermé l'univers ?

(21)

* Dans (13), posons $\begin{cases} \rho = k c^2 & (14) \\ q = \frac{8\pi G}{3} \mu_0 & (15) \end{cases}$ L'équation de Friedmann devient $\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = q \frac{\mu}{\mu_0} - \frac{k}{a^2}$ (16)

où μ_0 est la masse spécifique moyenne actuelle de l'univers : $\mu_0 = 10^{-26} \text{ kg/m}^3$, ce qui correspond à un peu moins de 6 at d'H par m^3 et à $q = 5.59 \times 10^{-36} \frac{1}{\text{sec}^2}$.

* Seule la RG peut donner une signification à k : c'est la courbure de l'espace-temps que la RG interprète comme la manifestation de la gravité.

* L'univers est
- fini si sa courbure est positive : univers sphérique dit "fermé" ($k > 0$)
- infini si sa courbure est négative ou nulle : univers hyperbolique ou plat dit "ouvert" ($k \leq 0$).

* Les solutions fermées sont celles où la gravitation finit par l'emporter sur l'énergie cinétique. C'est le modèle sphérique d'un univers cyclique.

* Les solutions ouvertes sont celles où l'énergie cinétique des galaxies est toujours supérieure à l'énergie de gravitation. C'est le modèle hyperbolique d'un univers en expansion monotone.



Equation de Friedmann 22 Paramètre de densité

- * On appelle masse spécifique critique de l'univers la valeur μ_{cr} de μ pour laquelle l'univers serait plat ($k=0$). On tire donc de (16)

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 9 \frac{\mu_{cr}}{\mu_0} \text{ puisque } s = kc^2 = 0 \text{ d'où } \mu_{cr} = \mu_0 \frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^2}{9}$$

- * Le paramètre $\Omega(t) = \frac{\mu}{\mu_{cr}}$ est appelé paramètre de densité, soit :

$$\Omega(t) = \frac{\mu}{\mu_0} \times \frac{9}{\left(\frac{a'}{a}\right)^2} \quad (17)$$

- * L'univers serait plat si, actuellement où $\begin{cases} a = a_0 = 1 \\ a' = a'_0 \end{cases}$, la masse spécifique moyenne de l'univers avait la valeur critique μ_{0cr} tirée de (13) :

$$\mu_{0cr} = \frac{3}{8\pi G} a_0'^2 \quad (18)$$

dont nous donnerons plus loin une estimation.

- * Valeur actuelle du paramètre de densité : de (18) on tire

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\mu_0}{a_0'^2} \quad (19)$$



23

DEUX GROUPES D'UNIVERS TYPES



Deux Univers types Caricatures !

24

- * Considérons deux groupes d'univers types différant par leur nature :
 - un groupe d'univers **radiants** dont l'un pourrait être proche de ce que fut l'univers peu après le Big-Bang.
 - un groupe d'univers **matériels** dont l'un pourrait être semblable à notre univers actuel.

- * En effet, notre univers
 - fut dominé par le rayonnement dans son état primordial,
 - est dominé par la matière dans son état actuel.

- * Univers radiant et matériel sont deux caricatures qui ne collent exactement
 - ni à la réalité primordiale **reconstituée** de notre univers,
 - ni à sa réalité actuelle **observée**.



Deux Univers types

Univers dominé par le rayonnement

(25)

* Dans ses débuts, l'Univers était $\left\{ \begin{array}{l} \text{désstructuré} \\ \text{très chaud} \\ \text{très dense} \end{array} \right.$. Rayonnement électromagnétique et matière ionisée (plasma) étaient liés et ne pouvaient évoluer indépendamment l'un de l'autre.

* Une particule est dite "relativiste" si son énergie cinétique n'est pas négligeable, comparée à sa masse au repos.

* L'Univers primordial était composé de particules relativistes et même ultra-relativistes dont l'énergie cinétique et les chocs élastiques créaient une force de pression. Cette pression p est dite "pression de radiation". La mécanique statistique montre que

$$p = \frac{1}{3} \mu c^2 \quad (20) \text{ Equation d'état d'un Univers radiant.}$$

* En portant (20) dans (8), il vient $\mu' + 4 \frac{a'}{a} \mu = 0$ ou $\frac{d\mu}{\mu} = -4 \frac{da}{a}$. En intégrant:

$$\left| \text{Log } \mu \right|_{\mu_0}^{\mu} = -4 \left| \text{Log } a \right|_{a_0}^a$$

* Finalement, puisque $a_0 = 1$: $\boxed{\mu = \frac{\mu_0}{a^4}} \quad (21) \text{ avec } \mu_0 = 10^{-26} \text{ kg/m}^3.$



Deux Univers types

Univers dominé par la matière

(26)

- * L'Univers actuel est très différent de l'Univers primordial. Il est composé d'une multitude de galaxies qui n'ont d'autre interaction que gravitationnelle. Cette interaction est faible.
- * En moyenne, les atomes qui composent notre Univers se sont refroidis, sont séparés et n'interagissent pratiquement pas.
- * On assimile donc l'Univers actuel à un amas de poussière homogène et isotrope dont les grains n'interagissent pas.
- * Une bonne approximation de l'équation d'état de cette matière froide non relativiste (la définition de ce terme a été donnée planche 16) est :

$p=0$ (22) Equation d'état d'un Univers "poussière". Si les galaxies étaient comparables aux molécules d'un gaz sous pression, elles seraient animées d'un mouvement analogue au mouvement (brownien).

- * En portant (22) dans (8), il vient $p' + 3 \frac{a'}{a} p = 0$ ou $\frac{dp}{p} = -3 \frac{da}{a}$. En intégrant :

$$\left| \text{Log } p \right|_{p_0}^p = -3 \left| \text{Log } a \right|_{a_0}^a$$

Finalement, puisque $a_0 = 1$ $\boxed{\mu = \frac{\mu_0}{a^3}}$ (23) avec $\mu_0 = 10^{-26} \text{ kg/m}^3$

- * Ce résultat est cohérent avec une expansion à masse constante : $M = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 = \mu \frac{4}{3} \pi a^3 R_0^3 = \mu_0 \frac{4}{3} \pi R_0^3 = C^{\text{ste}}$



27

LE CATALOGUE



Le catalogue

Grandeurs réduites

28

- * Le facteur d'échelle $a(t)$ est adimensionnel et nous utiliserons
- comme variable adimensionnelle le "temps réduit" τ
 - comme paramètre adimensionnel le "rayon de courbure réduit" σ
- } tels que définis ci-dessous :

$\Delta = kc^2 > 0$ Univers fermé	$\Delta = kc^2 < 0$ Univers ouvert
$\tau = t\sqrt{\Delta} \quad (24)$	$\tau = t\sqrt{-\Delta} \quad (26)$
$\sigma = \frac{q}{\Delta} > 0 \quad (25)$	$\sigma = \frac{q}{-\Delta} > 0 \quad (27)$

Nous n'oublierons pas que σ est toujours positif.

- * Suivant que l'univers est radiant ou matériel, l'équation de Friedmann prend deux formes différentes explicites ci-dessous :

	$a'^2 = \frac{q}{a^2} - \Delta \quad (28) \quad \text{car} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{a^4}$	$a'^2 = \frac{q}{a} - \Delta \quad (29) \quad \text{car} \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{a^3}$
Si $\Delta > 0$	On tire de (28) : $0 \leq a(t) \leq \sqrt{\sigma}$	On tire de (29) : $0 \leq a(t) \leq \sigma$
Si $\Delta < 0$	$a(t) \geq 0$	$a(t) \geq 0$
Si $\Delta = 0$	Etude particulière	Etude particulière

- * En intégrant l'équation de Friedmann, nous aurons l'expression analytique $a(t, k)$ du facteur d'échelle, ce qui va nous permettre, à condition de connaître k , de trouver la date de naissance et de prévoir le destin des deux univers types.



Le catalogue

Les fonctions

UNIVERS RADIANTS

29

	Equation de Friedmann	Solution de l'équation de Friedmann	Nature des courbes intégrales	Age de la singularité initiale (l'indice i signifie initial)
$\Delta > 0$ Fermé	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma}{a^2} - 1$	$a = \sqrt{1 \pm 2\tau\sqrt{\sigma-1} - \tau^2}$	demi-cercles Fig 4	$\tau_i = \pm(\sqrt{\sigma-1} \mp \sqrt{\sigma})$
$\Delta = 0$ Euclidien	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{q}{a^2}$	$a = \sqrt{1 \pm 2\sqrt{q}\tau}$	demi-parabole Fig 5	$t_i = \pm \frac{1}{2\sqrt{q}}$
$\Delta < 0$ Ouvert	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma}{a^2} + 1$	$a = \sqrt{1 \pm 2\tau\sqrt{\sigma+1} + \tau^2}$	demi-hyperboles équilatères Fig 6	$\tau_i = \pm(\sqrt{\sigma+1} \mp \sqrt{\sigma})$

UNIVERS MATÉRIELS

$\Delta > 0$ Fermé	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma}{a} - 1$	$\begin{cases} a = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos\varphi) \\ \tau = \pm \frac{\sigma}{2} \left[\varphi - \sin\varphi - \text{Arccos}\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) + 2 \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\sigma} \right] \end{cases} (30)$	cycloïdes Fig 7	$\tau_i = \sqrt{\sigma-1} - \frac{\sigma}{2} \text{Arccos}\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)$
$\Delta = 0$ Euclidien	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{q}{a}$	$a = \left(1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{q}\tau\right)^{\frac{2}{3}}$	courbe algébrique du 3 ^{ème} degré Fig 5	$t_i = \pm \frac{2}{3\sqrt{q}}$
$\Delta < 0$ Ouvert	$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma}{a} + 1$	$\begin{cases} a = \frac{\sigma}{2}(\text{ch}\varphi - 1) \\ \tau = \pm \frac{\sigma}{2} \left[\text{sh}\varphi - \varphi + \text{Arngch}\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) - 2 \frac{\sqrt{\sigma+1}}{\sigma} \right] \end{cases}$	cycloïdes hyperboliques Fig 8	$\tau_i = \frac{\sigma}{2} \text{Arngch}\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) - \sqrt{\sigma+1}$

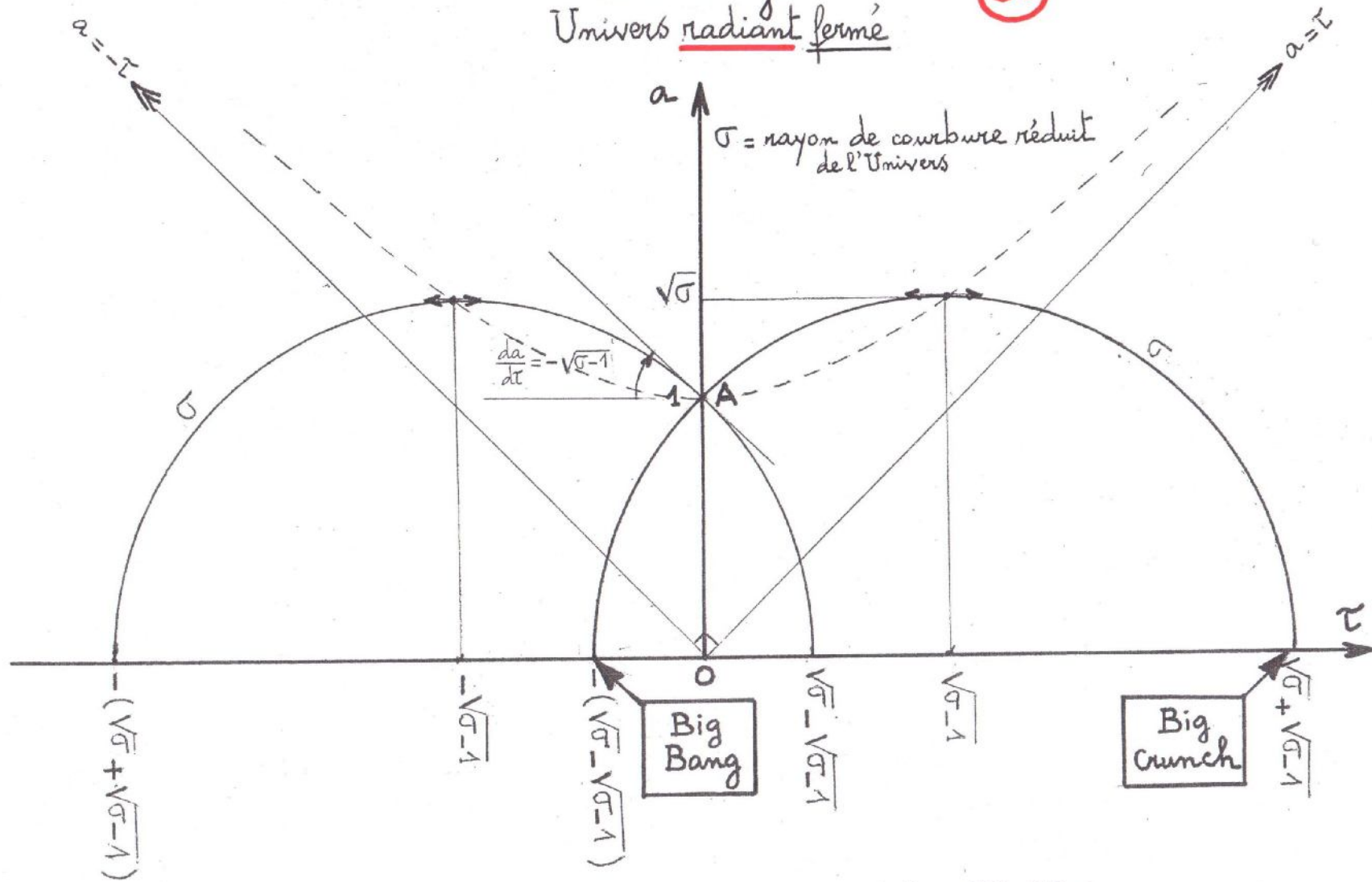
Toutes ces courbes passent par le point A de coordonnées $\tau = 0$, $a = 1$ (A comme actuel).



Le catalogue

Univers radiant fermé

30



$$a = \sqrt{1 \pm 2r\sqrt{\sigma-1} - r^2} \quad \begin{cases} \sigma = \frac{8\pi}{3} \times \frac{GH_0}{c^2} \times \frac{1}{k} \\ r = ct \times \sqrt{k} \end{cases} \quad k > 0 \quad \text{Fig 4}$$



Le catalogue

Deux Univers euclidiens $\left\{ \begin{array}{l} \text{radiant} \\ \text{matériel} \end{array} \right.$
 $k=0$

31

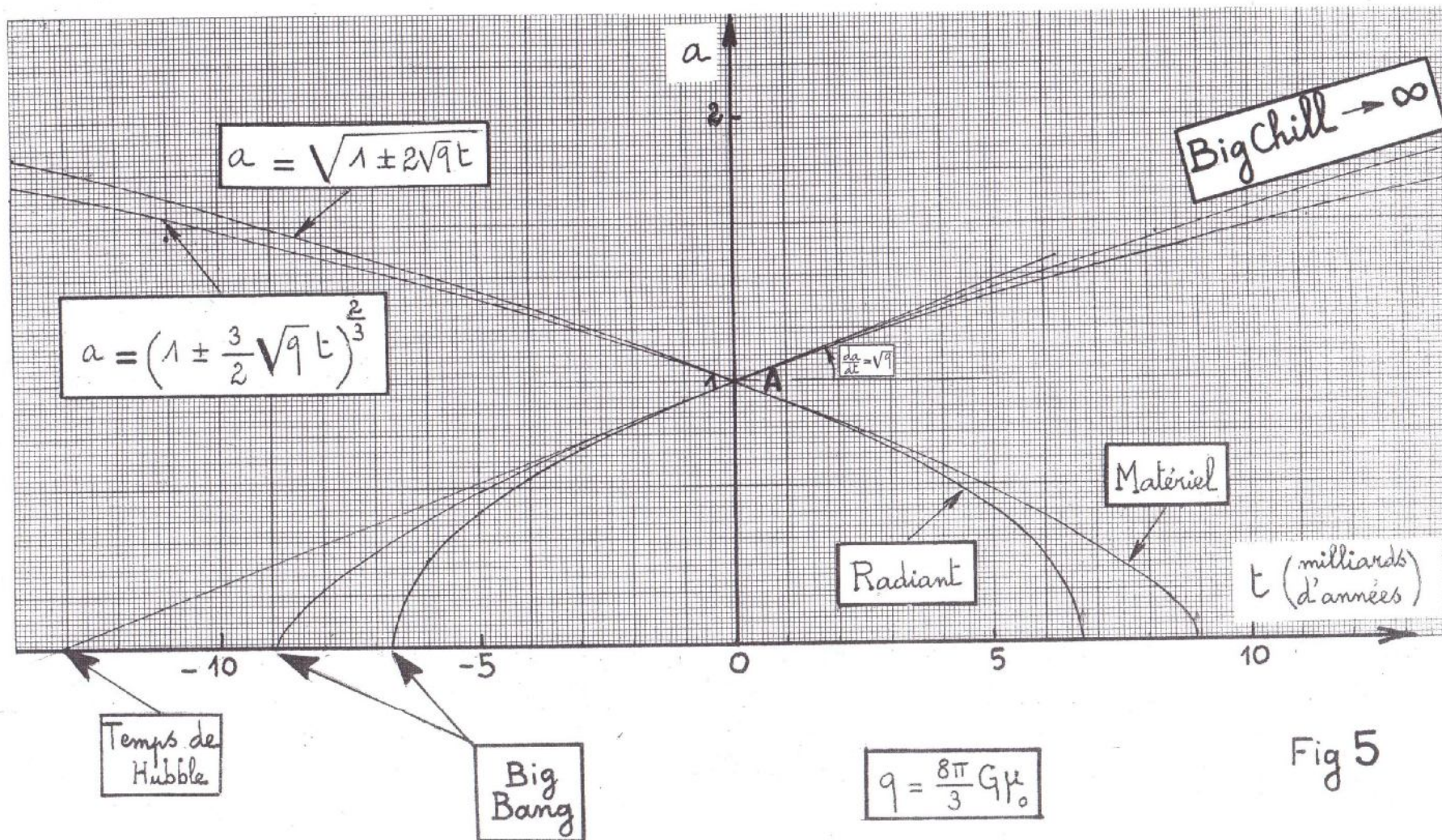


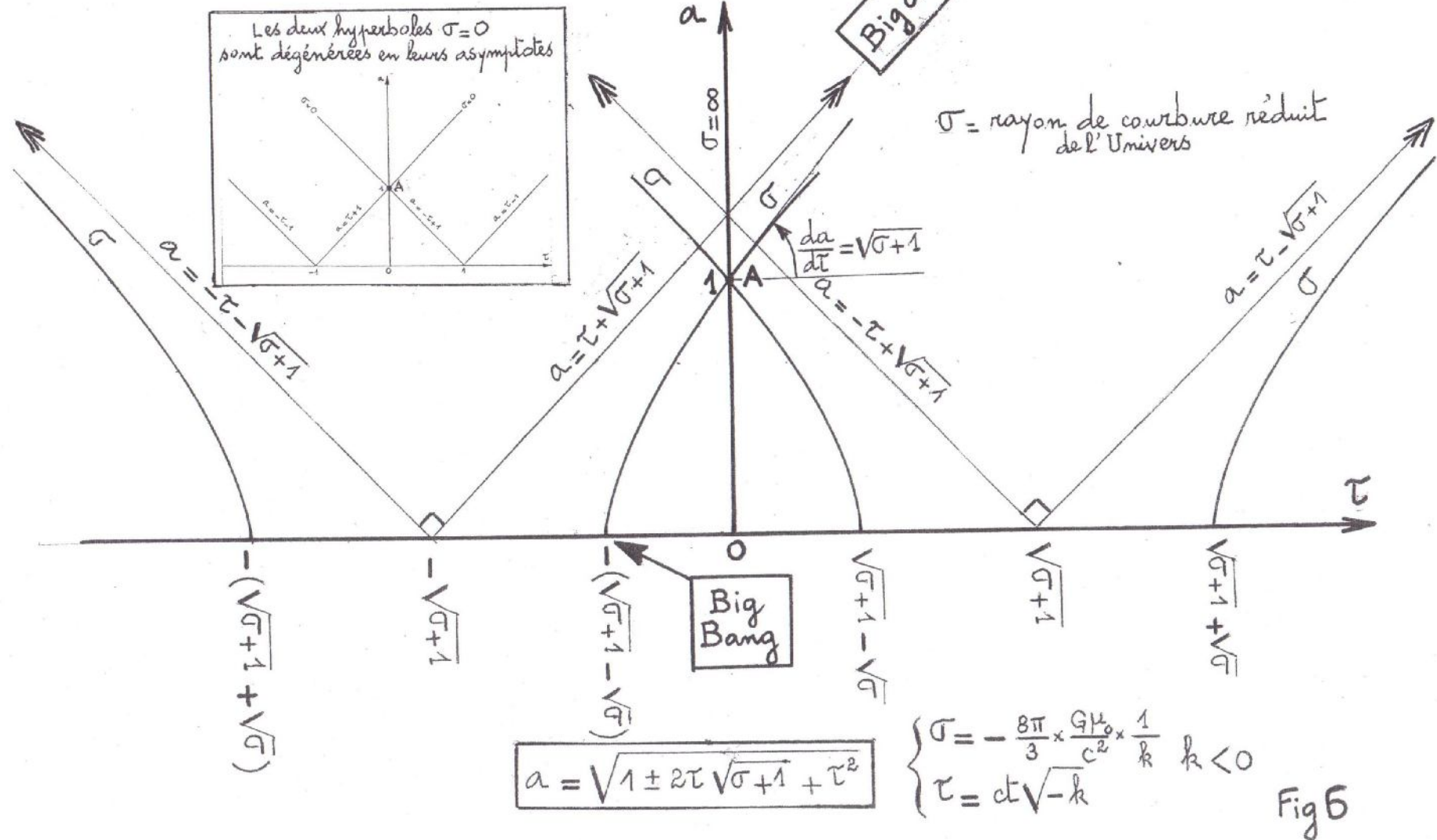
Fig 5



32

Le catalogue

Univers radiant ouvert

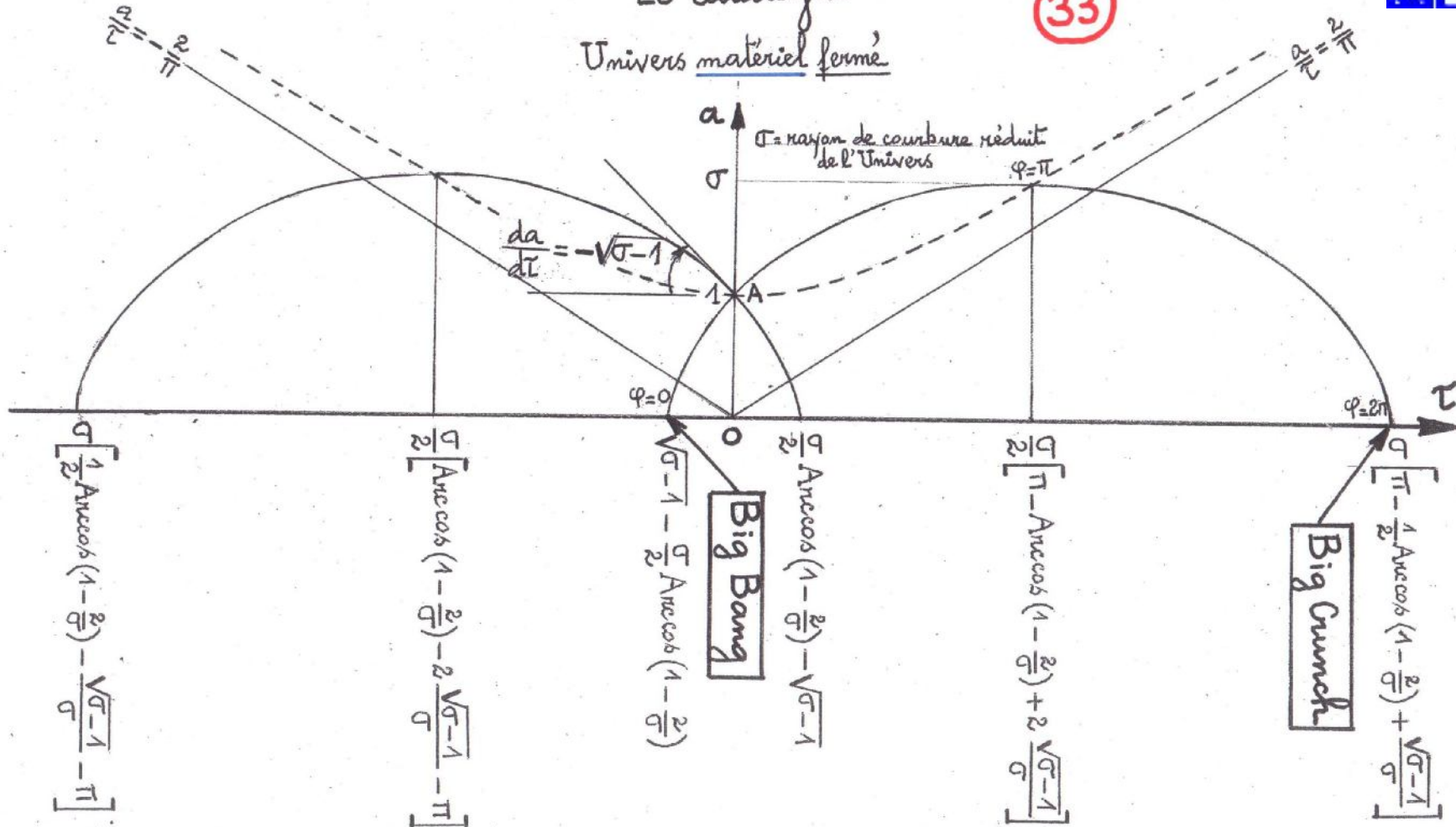




Le catalogue

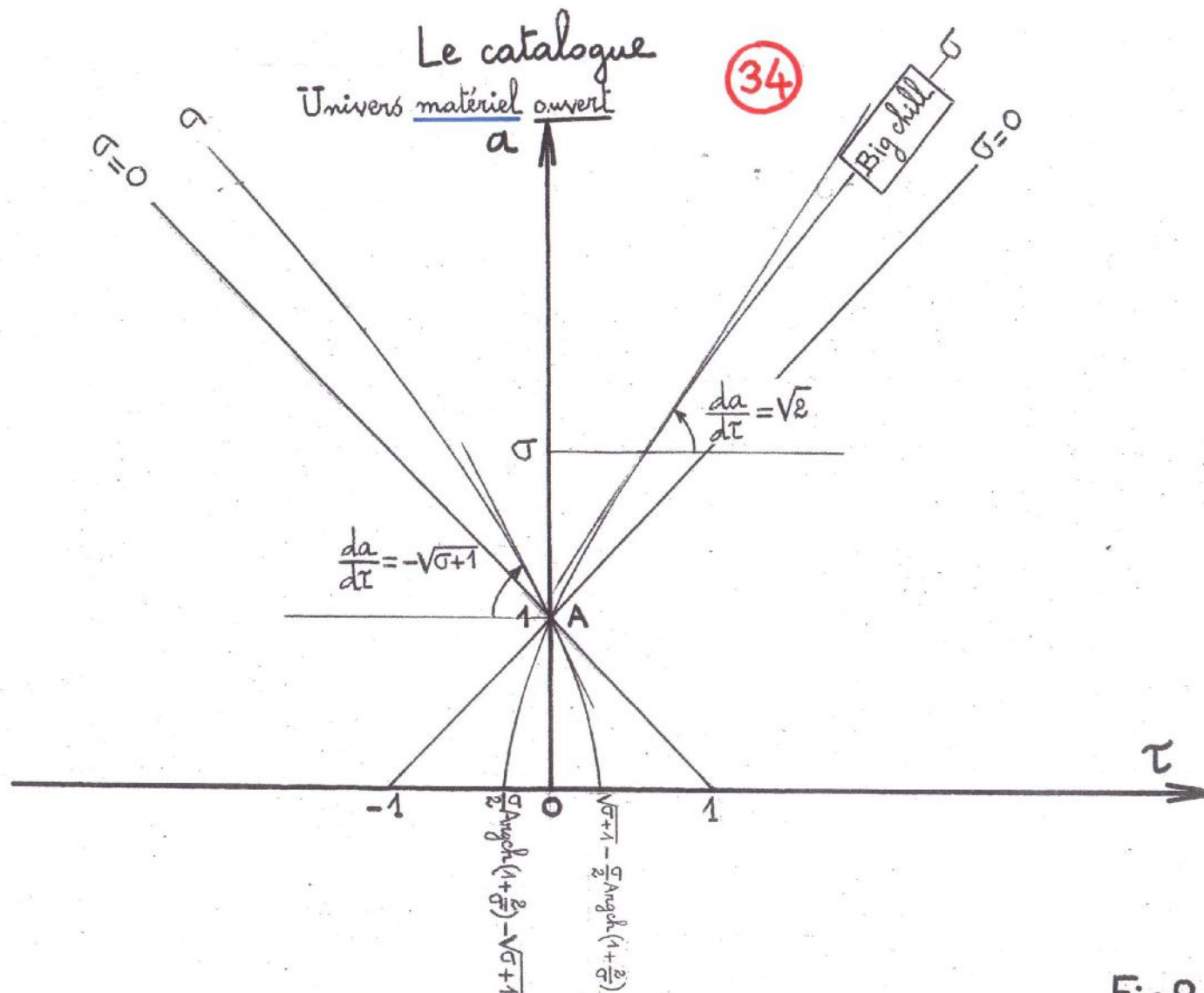
Univers matériel fermé

33



$$\begin{cases}
 a = \frac{b}{2} (1 - \cos \varphi) \\
 \tau = \frac{b}{2} \left[\varphi - \sin \varphi - \text{Arccos} \left(1 - \frac{2}{\sigma} \right) + 2 \frac{\sqrt{\sigma-1}}{\sigma} \right]
 \end{cases}
 \begin{cases}
 \sigma = \frac{8\pi}{3} \times \frac{G H_0^2}{c^2} \times \frac{1}{k} \\
 \tau = \sigma t \times \sqrt{k}
 \end{cases}
 \quad k > 0$$

Fig 7



$$a = \frac{\sigma}{2} (\text{ch}\varphi - 1)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma}{2} \left[\text{sh}\varphi - \varphi + \text{Arctgh}\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) - 2 \frac{\sqrt{\sigma+1}}{\sigma} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = -\frac{8\pi}{3} \times \frac{GM_0}{c^2} \times \frac{1}{k} \\ \tau = ct\sqrt{-k} \end{array} \right. \quad k < 0$$

Fig 8



Le catalogue

Univers cyclique ou monotone ?

35

* L'équation de Friedmann offre trois schémas d'évolution possibles pour chacun des deux Univers types :

Univers →	RADIANT	MATÉRIEL
FERMÉ $\delta > 0$ $k > 0$	Le facteur d'échelle $a(t, \sigma)$ part de 0 (Big-Bang), croît (Expansion) puis décroît (Contraction) pour s'annuler à nouveau (Big crunch). Il décrit une ou plusieurs arches... ... de demi-cercle (voir Fig 4) Périodicité $\tau = 2\sqrt{\sigma}$... de cycloïde (voir Fig 7) Périodicité $\tau = \pi \cdot \sigma$
PLAT $\delta = 0$ $k = 0$	Le facteur d'échelle $a(t)$ part de 0 (Big-Bang) puis croît indéfiniment (Expansion éternelle) en marche perpétuelle vers le Big chill. Il décrit... ... une demi-parabole (voir Fig 5)	... une demi-courbe du 3 ^{ème} degré (voir Fig 5)
OUVERT $\delta < 0$ $k < 0$	Le facteur d'échelle $a(t, \sigma)$ part de 0 (Big-Bang) puis croît indéfiniment (Expansion éternelle) en marche perpétuelle vers le Big chill. Il décrit... ... une demi-hyperbole équilatère (voir Fig 6)	... une "cycloïde hyperbolique" (voir Fig 8)

- * Pour un Univers cyclique, deux scénarios sont possibles :
 - renaissance = Univers "Phénix" où le Big crunch coïncide avec un nouveau Big-Bang,
 - ou anéantissement = le Big crunch met un point final au temps et à l'espace qui disparaissent.
- * Le scénario monotone conduit à un Univers de plus en plus vide et de plus en plus froid : Big chill.
- * Le problème du futur de l'Univers est intimement lié à celui de sa densité. L'Univers serait plat si sa masse spécifique moyenne actuelle μ était égale à une valeur critique μ_{crit} [cf eq (18)]. Difficile de conclure car μ_0 et μ_{crit} sont mal connus.



36

DÉBUT ET FIN DE L'UNIVERS



Début et fin de l'univers Hommage à Hubble

37

- * Le tableau de la planche 19 montre que l'âge réduit t_i de l'univers n'est fonction que de σ . Donc t_i n'est fonction que de la courbure k , elle-même liée à la masse spécifique actuelle μ_0 de l'univers comparée à μ_{0cr} .
- * La Fig 9 montre comment l'âge des deux univers types varie en fonction de k . Ces deux courbes sont tributaires de la valeur 10^{-26} kg/m^3 retenue pour μ_0 .
- * Actuellement ($t=0$), le redshift montre que plus une galaxie est éloignée (h_0 grand) plus sa vitesse de fuite v_0 est élevée et que la loi est linéaire : $v_0 = H_0 \times h_0$ (31) H_0 : constante de Hubble
 H_0 a les dimensions de l'inverse d'un temps. C'est pourquoi $\frac{1}{H_0}$ est appelé temps de Hubble.
- * En réalité H_0 n'est pas une constante : c'est un coefficient qui varie dans le temps. En effet :
 $h = a(t) \times h_0$ donc $v = \frac{dh}{dt} = h_0 \times \frac{da}{dt} = \frac{h}{a} \times \frac{da}{dt} = h \times \frac{a'}{a}$
En posant $v = H(t) \times h$, il vient : $H(t) = \frac{a'(t)}{a(t)}$ (32) H : paramètre de Hubble
- * Actuellement $a(0) = a_0 = 1$ et (32) s'écrit $H(0) = H_0 = \frac{a'_0}{a_0} = a'_0$ donc H_0 est la pente de la tangente en **A** à la courbe représentative de $a(t, k)$. (Voir Fig 10). On voit sur le schéma que θ_i donne une estimation par excès de l'âge t_i de l'univers : $|\theta_i| > |t_i|$.



Début et fin de l'univers

Age des deux Univers types en fonction de la courbure

38

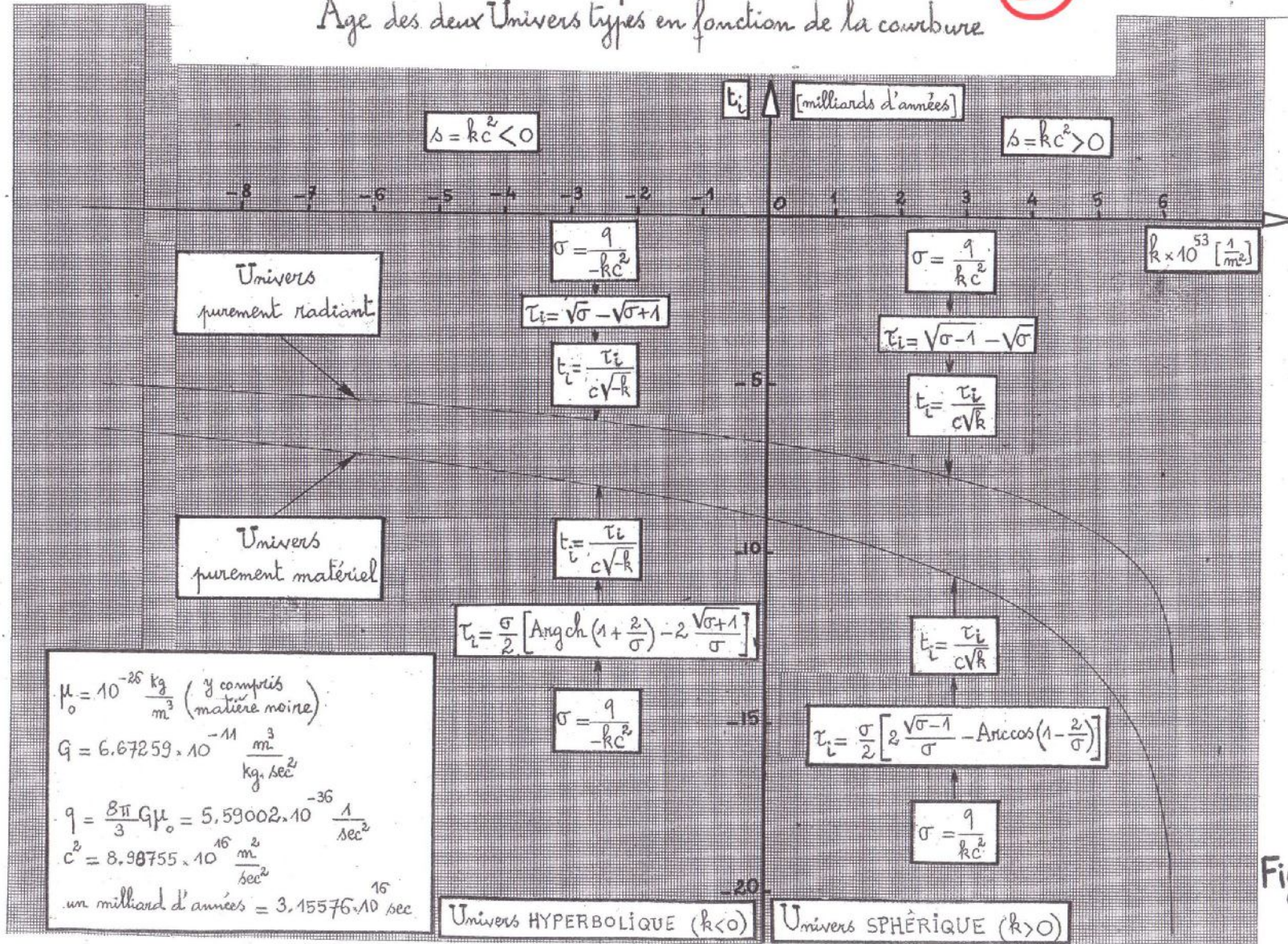


Fig 9



Début et fin de l'univers Temps de Hubble

39

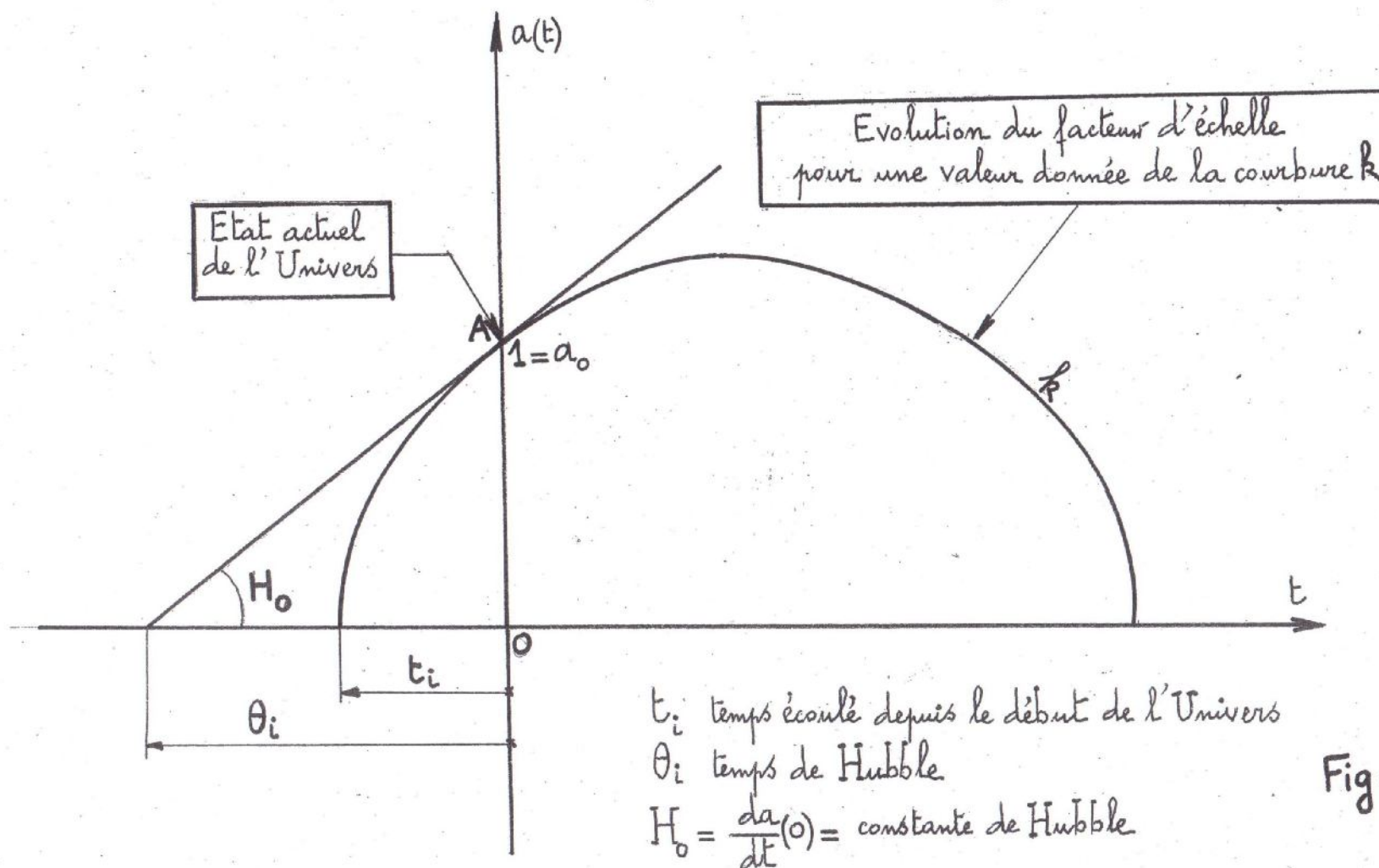


Fig 10



Début et fin de l'univers

40

Valeur "expérimentale" de la constante de Hubble

* Les observations permettent d'encadrer H_0 : $55 \frac{\text{km}}{\text{sec Mpc}} \leq H_0 \leq 75 \frac{\text{km}}{\text{sec Mpc}}$

ou, dans le système SI : $1.783 \times 10^{-18} \frac{\text{m}}{\text{sec m}} \leq H_0 \leq 2.431 \times 10^{-18} \frac{\text{m}}{\text{sec m}}$ d'où l'encadrement du temps de Hubble : 13 milliards d'années $\leq t_i \leq$ 18 milliards d'années.

* Nous avons vu que $\left\{ \begin{array}{l} \mu_{0cr} = \frac{3}{8\pi G} a_0'^2 \quad (18) \\ H_0 = a_0' \end{array} \right\}$ d'où $\mu_{0cr} = \frac{3}{8\pi G} H_0^2$

* Compte tenu de la fourchette à l'intérieur de laquelle se trouve H_0 , on a $3.4 \frac{\text{at d'H}}{\text{m}^3} < \mu_{0cr} < 6.3 \frac{\text{at d'H}}{\text{m}^3}$

* Nos calculs ont été faits avec $\mu_0 = 6 \frac{\text{at d'H}}{\text{m}^3}$, valeur proche de la limite supérieure de μ_{0cr} .



Début et fin de l'univers

Valeur "théorique" de la constante de Hubble

41

* L'équation de Friedmann donne une expression théorique de la constante de Hubble.

* A $t=0$, l'équation $\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = q \frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\rho}{a^2}$ (16) s'écrit $H_{0th}^2 = q \times 1 - \frac{\rho}{a^2} = q - kc^2$, soit $\theta_{ith} = \frac{1}{H_{0th}} = \frac{1}{\sqrt{q - kc^2}}$
d'où la courbe de variation de θ_{ith} en fonction de k (voir Fig 11). N'oublions pas que μ intervient par l'intermédiaire de q .

* En plaçant sur l'échelle θ_{ith} les valeurs extrêmes de θ_i déduites de l'observation et rappelées sur la planche 22, on voit sur la Fig 11 que :

$$- .035 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2} \leq k \leq .275 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2}$$

* On a donc en termes de rayon de courbure réduit σ $\begin{cases} -.035 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2} \leq k \leq 0 \text{ correspond à } 17.8 \leq \sigma \leq \infty \\ 0 \leq k \leq .275 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2} \text{ correspond à } 2.26 \leq \sigma \leq \infty \end{cases}$

L'amalgame théorie/observation ne permet pas de trancher entre cosmos ouvert ou fermé mais la balance pencherait plutôt en faveur d'un univers fermé.

Début et fin de l'univers

42

Courbure de l'Univers

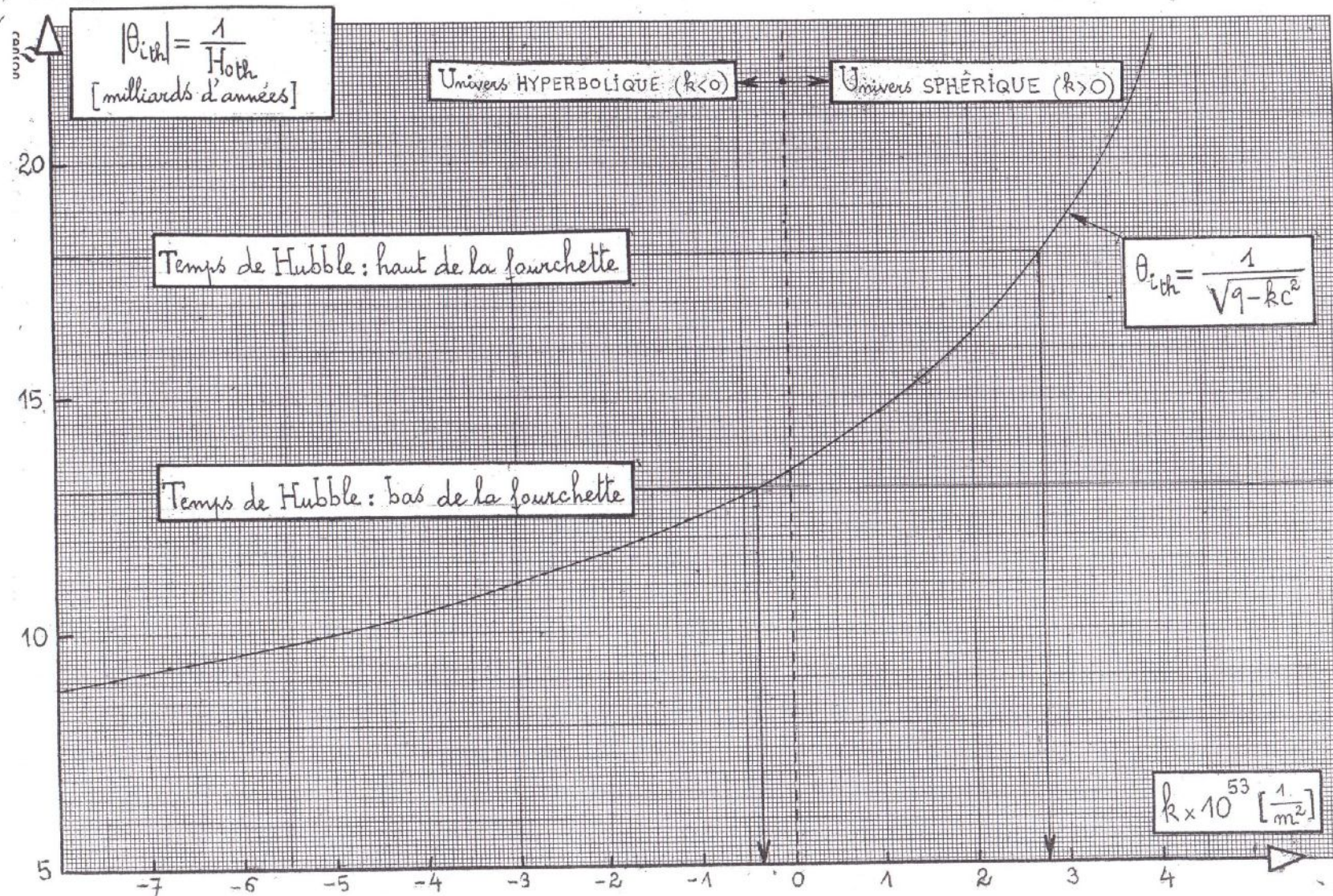


Fig 11

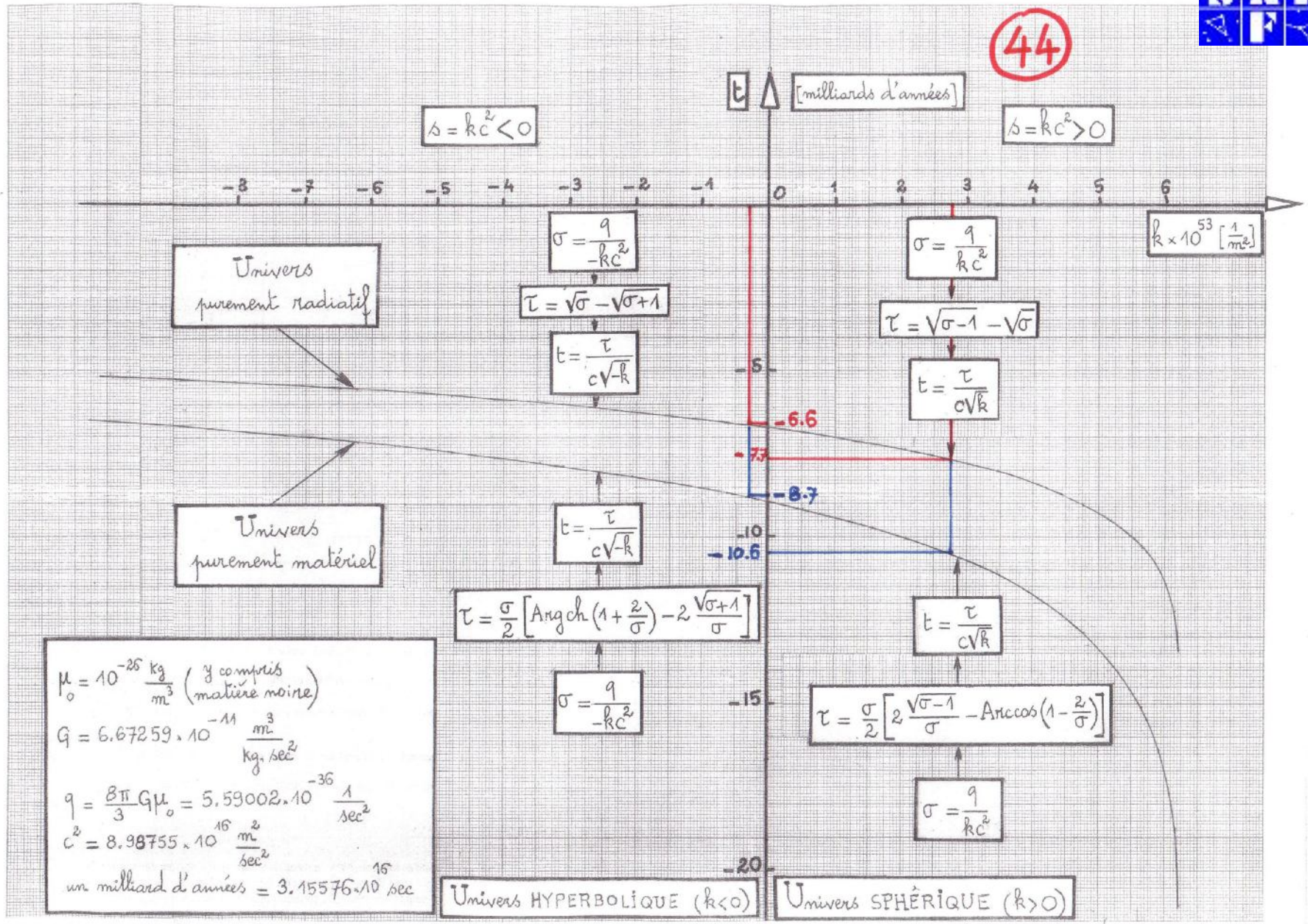


Début et fin de l'univers

Age de l'univers

43

- * En reportant sur la Fig 11 les bornes de k trouvées précédemment, on voit que l'âge de l'univers
 - radiant serait compris entre 6.5 et 7.7 milliards d'années,
 - matériel serait compris entre 8.7 et 10.6 milliards d'années.
- * Or, à cause de l'expansion, le radiant tend vers le matériel ! En effet $\mu_{\text{rad}} = \frac{\mu_0}{a^4}$ et $\mu_{\text{mat}} = \frac{\mu_0}{a^3}$ donc quand a augmente, μ_{rad} diminue plus vite que μ_{mat} .
- * Aux termes d'une logique discutable, nous admettrons que l'âge de l'univers est compris entre 6.5 et 10.6 milliards d'années mais certainement plus proche de 11 que de 6.
- * Les mesures du télescope spatial Hubble effectuées entre 1994 et 1995 sur des galaxies distantes de 48 à 55 millions d'années-lumière pencheraient en faveur d'un âge compris entre 8 et 9 milliards d'années.
- * Et l'avenir ? Quel est le destin de l'univers ?





Début et fin de l'univers ...

45

Fin de l'univers

* L'avenir d'un univers plat ou hyperbolique est infini, vide et glacial: Big chill.

* L'avenir d'un univers elliptique est fini, dense et infernal: Big crunch.

* Prenons le cas de la courbure positive la plus forte estimée planche 23, soit $k = .275 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2}$ correspondant au rayon de courbure réduit $\sigma = 2.26$

* Le big crunch est le point de rebroussement de la cycloïde pour lequel $\varphi = 2\pi$, d'où le temps réduit calculé avec la formule (30)

$$\tau = \frac{2.26}{2} \left[2\pi - 0 - \text{Arccos} \left(1 - \frac{2}{2.26} \right) + 2 \frac{\sqrt{1.26}}{2.26} \right] = 6.578 \text{ d'où}$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{\delta}} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{g}{\sigma}}} = \frac{6.578}{\frac{\sqrt{5.59 \times 10^{-18}}}{\sqrt{2.26}}} = 4.18 \times 10^{18} \text{ sec} = 130 \text{ milliards d'années}$$

* Si la courbure positive est inférieure à $.275 \times 10^{-52} \frac{1}{m^2}$, le big crunch s'éloigne dans le futur jusqu'à plusieurs centaines de milliards d'années...

* L'univers serait-il dans sa prime jeunesse? Gaudeamus igitur.



46

CONCLUSION



Conclusion

47

- * L'approche newtonienne de la cosmologie est considérée, sans doute à juste titre, par les familiers des équations d'Einstein sinon comme une tricherie du moins comme un **bricolage** inconsistant.
- * En effet, seule la RG permet une approche **autosuffisante** et **cohérente** de la cosmologie. La théorie newtonienne permet néanmoins au prix de quelques **contorsions** d'établir l'équation de Friedmann, socle de la cosmologie moderne.
- * Le niveau élémentaire des calculs newtoniens ne doit pas nous faire ignorer les difficultés et la puissance de la RG, fruit du travail acharné d'Einstein soutenu par Hilbert et Planck.
- * Le caractère envoûtant de la cosmologie peut justifier cette **approche scientifique à bon marché** qui rend plus accessible l'étude globale de l'univers et peut susciter des vocations...
- * Une surprise tout à fait indépendante du "choix newtonien": la cosmologie standard prévoit un ralentissement de l'expansion. Or des études récentes semblent indiquer une accélération d'où la remise à l'honneur de la constante cosmologique Λ .
- * Mais qu'est ce que le Big-Bang? Paraphrasant le Petit Prince, j'ai envie de dire:
« S'il te plaît, dessine moi un Big-Bang! »