

## Essai sur le paradoxe des fusées de Bell

1-Résumé.....	4
2- Le paradoxe de Bell.....	9
3- Analyse du paradoxe de Bell dans sa version originale.....	10
1 Généralités.....	10
2 La phénoménologie observée du point de vue de la fusée poursuivante.....	11
Description générale.....	11
Distance propre $d$ entre les fusées dans le référentiel comobile de la fusée 1.....	13
Développement au deuxième ordre en $d$ de $D(t,d)$ .....	15
Développement au deuxième ordre en $v$ de $D(v,d)$ .....	15
Calcul de la vitesse de la fusée 2 dans le référentiel co-mobile de la fusée 1.....	15
Calcul de l'accélération relative de la fusée 2 dans le référentiel 1.....	17
3 Le point de vue de l'observateur de la fusée 2 (poursuivie).....	18
Cette phénoménologie est caractéristique d'un horizon des évènements!.....	19
Distance entre les fusées.....	19
Autres paramètres (vitesse relative, accélération).....	20
Les phénoménologies observées par la fusée 1 et 2 sont cohérentes.....	20
4 Rappel sur le défaut de simultanéité entre référentiels en RR.....	21
Cas de deux référentiels galiléens.....	21
Cas de référentiels non galiléens.....	22
5 Equivalence retard distance.....	23
4- Cas où les fusées décèlent.....	24
1 Le point de vue de la fusée 1.....	26
2 Le point de vue de la fusée 2.....	26
3 La phénoménologie observée par les deux fusées est cohérente.....	26
4 La zone de transition entre accélération et décélération.....	27
5- Que se passe t'il si on coupe les moteurs « simultanément »? .....	28
6- Cas d'une boucle enchaînant accélération et décélération.....	31
7- Cas d'accélération différentes maintenant une distance constante entre les référentiels co-mobiles .....	33
1 Lignes d'univers accélérées.....	33
Montrons que la distance est constante dans le référentiel propre des fusées.....	35
Le poursuivant n'atteint jamais le poursuivi. ....	35
Le laboratoire mesure une longueur subissant la contraction de Lorentz.....	36
Les observateurs des fusées et l'observateur du laboratoire trouvent que la fusée poursuivante a une accélération supérieure à celle du poursuivi.....	36
Commentaire sur cette phénoménologie « stationnaire » plutôt étrange.....	36
2 Lignes d'univers fermées.....	37
Accélération suivie de décélération.....	37
Temps propre des lignes d'univers conformément au diagramme de la fig.7-2.....	39
Ligne d'univers de la fusée 1 du décollage jusqu'au renversement de poussée.....	39
Ligne d'univers de la fusée 2 du décollage jusqu'au renversement de poussée.....	39
Plan de vol.....	40
Calcul dans le cas général.....	41
3 Après une phase d'accélération on coupe les moteurs.....	41
Description de la variante.....	41
Premier bilan des différentes trajectoires de transfert.....	42
8- Cet espace temps est décrit par l'espace temps de Rindler.....	43

1 Equation associée à un observateur uniformément accéléré.....	43
2 Changement de coordonnées.....	43
3 Distance entre deux lignes d'univers d'observateurs accélérés.....	45
4 Illustration de la phénoménologie du paradoxe de Bell dans cette représentation.....	46
5 Généralisation de la description des différentes lignes d'univers accélérées considérées....	46
9- Relation de l'univers de Rindler avec l'univers de Milne.....	49
1 Présentation de l'univers de Milne.....	49
2 Compléments sur l'univers de Milne.....	50
10- Un parfum de Relativité Générale.....	52
11-Analyse en utilisant la rotation de Wick.....	54
1 Rappel sur la rotation de Wick.....	54
Généralités.....	54
Propriétés générales de la transformation.....	54
2 Application au paradoxe de Bell.....	55
Variante 1: lignes d'univers définies par $x = \sqrt{t^2+k^2}$ .....	55
Lignes d'univers accélérées parallèles dans un diagramme de Minkowski.....	59
Lignes d'univers parallèles accélérées puis inertielles.....	60
12- Cas d'une règle rigide accélérée.....	62
1 Introduction.....	62
2 Phénoménologie de la barre infiniment rigide.....	62
Définition des hypothèses.....	62
Quelques commentaires sur les résultats obtenus.....	63
Discussion sur l'équilibre local. ....	64
13-1 Le problème de Bell, enfin! Un lien entre les fusées va t'il finir par casser? .....	65
1 Introduction.....	65
2 Existence et détermination d'une longueur propre commune aux 2 fusées.....	65
3 Calcul de l'équation de la courbe longueur propre.....	66
4 Intersection avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie.....	66
5 Calcul des temps propres des fusées jusqu'à la courbe longueur propre.....	67
6 Existence de l'intersection de la courbe longueur propre avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie.....	67
7 Calcul de la longueur propre de la courbe longueur propre.....	68
8 Divergence de la longueur propre: le câble casse!.....	69
9 Variation locale de longueur propre le long de la courbe (inhomogénéité) .....	70
10 Variation locale de la longueur propre en fonction de d.....	73
13-2 Phase accélérée puis phase inertielle. Quid de l'élasticité sur l'état final ?.....	75
1 Généralités et hypothèses.....	75
2Hypothèse 1: Les lignes d'univers sont identiques au cas des fusées non liées. ....	75
Calcul de la longueur propre dans la zone de transition.....	76
Equilibre local et contrainte dans le câble.....	78
3 Hypothèse 2 : Contraction élastique de la partie du lien en régime inertiel.....	78
Trajectoire de la zone transitoire de la fusée poursuivie : vitesse inertielle fixe. ....	80
Discussion de la solution obtenue dans l'hypothèse 2.....	80
14- Synthèse.....	81
1 Lignes d'univers parallèles.....	81
Cas accéléré.....	81
Que se passe t' il si après avoir accéléré les fusées décèlèrent?.....	81
Après une phase d'accélération que se passe t'il si on coupe les moteurs?.....	82
2 Comment en est on arrivé là?.....	82
3 Le mystère de l'existence de référentiels galiléens: .....	83

La variation de distance entre fusées est elle physique? .....	83
4 Influence de la position relative dans un référentiel galiléen.....	86
Dilatation temporelle.....	86
Equivalence distance- temps en RR.....	87
5 Le mystère disparaît lorsqu'on s'intéresse à la construction de l'espace temps de Minkowski.	88
6 Courbe de longueur propre reliant les deux fusées. Solution au problème de Bell.....	89
7 Cas des lignes d'univers représentées par des hyperboles imbriquées: L'espace temps	
« stationnaire » de Rindler : Un référentiel synchronisé non inertiel!.....	90
8 Dualité entre l'espace de Rindler et celui de Milne.....	91
9 Quid du câble reliant les fusées si l'accélération cesse avant la rupture? .....	91
10 Compléments.....	92
11 Conclusion.....	93
15- Annexes.....	94
1 Annexe 1: Critère de simultanéité en RR, longueur d'un arc de courbe en métrique	
de Minkowski.....	94
Critère de simultanéité.....	94
Longueur d'un arc de courbe en métrique de Minkowski.....	95
2 Annexe 2: Intégration de la distance le long d'une ligne d'univers, calcul de la vitesse	
relative de la fusée 2 dans le référentiel 1.....	95
Intégration de la distance le long d'une ligne d'univers fermée.....	95
Calcul vitesse relative de la fusée 2 dans le référentiel de la fusée 1.....	96
3 Annexe 3: $d^2x/dt^2 = 1$ pour $t = 0$ .....	98
4 Annexe 4: Calcul de $d^2x'/dt'^2$ pour l'équation: $x = (t^2+k^2)^{1/2}$ .....	98
Méthode en utilisant les formules de Lorentz.....	98
Méthode par la rotation de Wick.....	99
5 Annexe 5 : vitesse de la fusée 2 dans le référentiel co-mobile de la fusée 1.....	100
6 Annexe 6: Calcul direct de la distance propre en vol inertiel.....	100
Distance entre fusées dans leur référentiel co-mobile.....	100
Mesure de cette distance dans le référentiel du laboratoire.....	102
7 Annexe 7: Proportionnalité de la longueur et du gradient d'accélération sur la courbe C	
représentant le lien entre les fusées.....	103
16- Références.....	105

## Essai sur le paradoxe des fusées de Bell.

### 1-Résumé

Dans cette essai nous allons proposer une solution originale entièrement nouvelle au paradoxe des fusées de Bell. S'agissant d'un problème physique concret cette solution apportera un éclairage et soulèvera des questions sur la structure des relations entre matière et espace-temps de la relativité restreinte.

Pour comprendre comment nous avons été amené à proposer cela il faut se référer aux multiples facettes de ce paradoxe pour tenter d'en saisir ses relations avec l'espace-temps de Minkowski lorsqu'on l'utilise pour des mouvements non inertiels<sup>1</sup> et l'utiliser pour éclairer certains aspects peu intuitifs de la RR.

En effet ce paradoxe, relatif à ce qu'il advient d'un lien<sup>2</sup> reliant deux fusées initialement au repos, en deux endroits, dans un même référentiel galiléen partant simultanément (dans ce référentiel) et exerçant une poussée produisant une accélération propre (mesurée par un accéléromètre embarqué) constante et égale, problème qui paraît sibyllin, révèle un certain nombre de difficultés (liées à la notion de simultanéité telle qu'elle est définie en RR) que l'ingénuité apparente du problème ne laissaient pas prévoir, comme l'approche par différents auteurs nous le confirmera .

Dans l'article de Beran et Dewan (1959) [2], souvent cité comme première référence, la différence de phénoménologie entre le cas d'une barre rigide (cas non physique, mais qui a une solution en RR<sup>3</sup>) soumise à une accélération égale en tout point et celui de la distance spatiale<sup>4</sup> entre deux fusées identiquement accélérées, libres de toute attache<sup>5</sup>, est bien relevée mais d'une part la raison fondamentale de cette différence n'est pas clairement explicitée, les remarques étant essentiellement qualitatives, et d'autre part ces cas ne répondent pas au problème général posé par Bell.

Le cas des fusées indépendantes ou de la barre infiniment rigide et donc de longueur propre invariable sont les cas extrêmes, le paradoxe de Bell s'intéressant à ce qu'il advient d'un lien physique (une corde, un câble, un ressort,..) qui sous des contraintes peut s'allonger et rompre lorsque sa limite élastique est atteinte lorsque les fusées accélèrent.

Ce paradoxe a suscité quelques vifs débats qui n'ont pourtant pas permis d'aboutir à une conclusion convaincante. Comme mentionné, le cas de la barre infiniment rigide (non physique) a été correctement traité par H. Nikolic (1999), d'abord en considérant une force constante appliquée en un point la phénoménologie résultante dépendant de ce point et en montrant comment on peut généraliser au cas où plusieurs forces éventuellement différentes s'appliquent en des points différents, par exemple les extrémités. Bien que ce cas ne soit pas physique il fournit une référence pour interpréter physiquement la solution que nous proposons. Dans ce même article il évoque aussi

---

1 Certains calculs détaillés seront présentés dans quelques annexes.

2 Ce lien est supposé matériel (câble par exemple). Ce lien se rompt il au bout d'un temps propre fini d'accélération ?

3 C'est traité de façon qualitative par Beran et Dewan, mais cela sera traité rigoureusement par H. Nikolic [6].

4 En fait en RR cette distance est un intervalle d'espace-temps. S'il a un caractère spatial dans le laboratoire nous verrons qu'il a un caractère temporel dans le référentiel des fusées (retard ou avance selon les cas). Il faut bien avoir cela à l'esprit pour comprendre l'analyse du phénomène. Notons que Dewan l'évoque dans son deuxième article.

5 Ce cas pose problème à Beran et Dewan qui estiment qu'il conduit à une contradiction (difficulté de définition d'une longueur propre commune).

le cas de l'approximation "adiabatique" qui traite d'accélération lentement variable, qui permet de s'affranchir des problèmes de propagation du son, dont il calcule les conditions de validité. Ceci ouvre une piste pour traiter le paradoxe, même si c'est sous certaines conditions restrictives.

Une des dernières étude revendiquant l'explication du paradoxe, Hsu et Suzuki (2005) [11], reconnaît bien qu'il n'existe pas de référentiel inertiel « globalement uniformément accéléré » en RR <sup>6</sup>, mais propose une transformation qui permet de passer d'un référentiel inertiel à un "référentiel à accélération linéaire constante" (non homogène). Nous analyserons les apports de cette contribution et les conclusions que les auteurs en tirent par rapport au problème de Bell.

Nous voyons que les différents auteurs ont proposé des explications tournant autour du paradoxe sans le traiter dans le cas général comme s'il était insaisissable et souvent même sans le poser correctement!

On sait toujours définir en RR un référentiel localement inertiel <sup>7</sup> pour chaque fusée qui permet de calculer une distance « propre » la séparant de l'autre (mesure sur son axe des « x », ligne de simultanéité), mais en RR rien ne contraint les référentiels locaux des deux fusées à coïncider (en particulier les lignes de simultanéité).

***Comment alors parler d'une distance propre entre les fusées s'il est impossible d'avoir un référentiel de simultanéité commun<sup>8</sup>? Chaque fusée va avoir sa propre valeur à tout instant mais nous n'avons pas de critère objectif (en RR) pour mettre en correspondance ces mesures!***

Pourtant le problème évoqué par Bell est bien physique et, RR ou pas, il faut l'aborder.

Nous commencerons en étudiant systématiquement et en les comparant, pour en dégager une possible cohérence, les phénoménologies telles que perçues par chaque observateur des fusées dans les différents cas possibles. A cet effet nous étudierons non seulement des trajectoires uniformément accélérées de différents types, mais aussi leurs contreparties décélérées, l'enchaînement adéquat de ces séquences permettant de réaliser des boucles qui d'une part permettent de retourner à une situation où les deux fusées sont dans le même référentiel, où les lois de la RR sont applicables sans ambiguïté et d'autre part mettent alors en lumière les liens de ce paradoxe avec le paradoxe de Langevin.

Dans notre analyse nous commencerons par traiter le cas de fusées non reliées par un câble (ce qui n'est pas directement le problème posé mais un problème connexe) dont l'interprétation relève strictement de la RR qui permet de révéler la source du phénomène et de nos problèmes. Dans ce cas l'accélération de la fusée est directement liée à la poussée de son moteur qui est ajustée pour fournir une accélération constante (la masse est variable). Ceci nous fournira un modèle de référence pour traiter le cas où elles sont reliées par un câble.

Les lignes d'univers suivies par des fusées, libres de toute attache, animées d'un même mouvement propre uniformément accéléré, dans un espace-temps de Minkowski, s'écartent les unes des autres du point de vue de chaque observateur accéléré, comme si, pour lui, l'univers était en expansion!

<sup>6</sup> Nous utiliserons les abréviations RR pour relativité restreinte, RG pour relativité générale dans ce texte.

<sup>7</sup> En un point, en RG, on sait aussi définir un référentiel localement inertiel, l'espace-temps tangent qui diffère de l'espace-temps global, (on ne peut annuler que les dérivées premières du tenseur métrique). En RR, le tenseur de Riemann étant nul, on peut annuler les dérivées à tous les ordres du tenseur métrique (l'espace-temps tangent coïncide avec l'espace-temps global).

<sup>8</sup> Cette distance propre "globale" telle que définie en RR ne semble pas avoir de sens physique dans ce cas. Nous proposerons une solution qui reprend ce type de concept mais adapté au phénomène.

L'analyse nous permet de dégager cette première conclusion qualitative qui peut paraître surprenante, mais sans pouvoir la quantifier de façon indiscutable et avec quelques restrictions<sup>9</sup>.

Pour nous raccrocher à des cas que la RR sait traiter simplement nous analyserons le cas où les fusées, suite à des phases d'accélération ou de décélération identiques, coupent leurs moteurs, et se trouvent en vol inertiel dans un même référentiel galiléen. Ce cas, également connexe se révélera riche d'enseignements:

***Il propose une solution à l'existence de la multiplicité de référentiels galiléens.***<sup>10</sup>

Ayant proposé un modèle générant<sup>11</sup> les différents référentiels galiléens possibles en partant d'une situation initiale commune, nous nous intéresserons aussi à la génération, dans le cadre de la RR, des observateurs aux différentes positions d'un référentiel galiléen à partir d'une situation initiale commune, ce qui confirmera qu'une distance dans un référentiel peut être un temps dans un autre

***Ceci permet de comprendre l'influence de la position de départ de la fusée sur le phénomène et sur la différence de critère de simultanéité des observateurs.***<sup>12</sup>

Toujours dans le cas des fusées indépendantes, nous verrons qu'il existe pourtant une variante accélérée (autre cas connexe, où l'accélération propre est différente pour les deux observateurs des deux fusées) qui comporte un référentiel localement inertiel commun aux deux fusées, en tout point de la ligne d'univers des fusées. Ce cas qui peut paraître « hors sujet » sera pourtant très utile à notre analyse et nous verrons comment on peut le recouper et l'utiliser avec les autres résultats.

A partir de ces constats nous étudierons géométriquement plus formellement la structure de l'espace-temps de *Minkowski selon les feuilletages correspondants aux solutions de Rindler et Milne*<sup>13</sup> et nous y relèverons une dualité assez inattendue puisque *Milne est une solution ne comportant que des référentiels galiléens relevant strictement de la RR alors que l'autre n'en comporte aucun et ne relève que d'une application locale de la RR*. Nous interpréterons physiquement cette dualité.

***Nous montrerons que par une rotation de Wick certaines propriétés cachées révèlent souvent leur visage au grand jour. Certaines étant d'ailleurs aussi révélées par l'utilisation du formalisme correspondant en métrique Minkowski de rotation spatio temporelle d'angle  $\varphi$  où  $v = \tanh\varphi$ .***

Après quelques recherches du côté de solutions en RG présentant une phénoménologie apparemment similaire pouvant nous suggérer une interprétation physique, nous discuterons des solutions déjà proposées, et à la lumière de notre analyse nous essaierons de comprendre le niveau de matérialité physique des contractions ou élongation des longueurs et leur compatibilité avec les

9 Lorsque la distance entre les fusées dépasse une certaine valeur, pour la fusée poursuivie la distance propre la séparant de la fusée poursuivante est infinie, bien que pour la fusée poursuivante la distance propre la séparant de la fusée poursuivie soit finie et croissante!

10 « Notons que le principe de relativité constate, sans l'expliquer, l'existence de repères privilégiés où les lois de la physique revêtent une forme simplifiée. Le fait empirique que ces repères sont, avec une bonne approximation, non accélérés par rapport aux étoiles fixes reste incompris. Une détermination théorique satisfaisante des repères inertiels eux-mêmes, en fonction, par exemple, de la distribution de la matière dans l'univers (principe de Mach), n'existe pas actuellement ». T. Damour [12]

11 Ce qu'on fait pour le générer permet de comprendre la phénoménologie résultante

12 Cela permet aussi d'interpréter la phénoménologie du paradoxe de Langevin, en particulier l'influence du temps de vol inertiel sur la différence de temps propre entre les "jumeaux".

13 Cet espace est généré par l'ensemble de tous les référentiels inertiels possibles. Ceci est intéressant pour analyser l'espace-temps de Minkowski par les référentiels inertiels.

transformations de Lorentz qui par leur caractère réciproque et symétrique laissent à penser que ces contractions et élongations n'ont pas de caractère physique mais ne sont qu'un effet de perspective.

*Nous verrons qu'il n'en n'est rien et que tout en respectant la symétrie décrite par les transformations de Lorentz, dans le cas des fusées indépendantes accélérées pendant un temps propre égal lorsqu'elles reprennent leur vol inertiel, après une phase de resynchronisation (qui met en lumière la nature du phénomène), la variation des longueurs a bien un sens physique dans le cadre de la RR. Cela se justifie physiquement par une dissymétrie dans le phénomène lié à l'orientation du mouvement accéléré qui particularise les fusées: l'une est devant (poursuivie) l'autre est derrière (poursuivante).*

Revenons maintenant au problème de Bell. Plaçons nous dans un cas « réaliste » d'un lien (câble ou un ressort en acier par exemple) reliant les deux fusées ayant une certaine résistance mécanique et élasticité. Ce lien va exercer une contrainte de rappel et s'opposer à l'écartement des deux fusées. Nous écartons les cas irréalistes du lien infiniment rigide traité dans [6] et le cas du lien sans résistance élastique avec toutefois une limite de rupture qui se ramène au cas des fusées indépendantes.

Ce paradoxe du corps "rigide" en RR est bien connu. Einstein [13], Max Born [14] et P. Ehrenfest [15] entre autres, dans le cas plus simple de référentiels galiléens, en ont débattu, sans arriver à une conclusion satisfaisante<sup>14</sup>. Le cas plus complexe de mouvement accéléré que nous traitons permet de stigmatiser le paradoxe et nous apporte quelques éléments de réflexion complémentaires pouvant ouvrir une piste à une interprétation.

Si on veut que, malgré cette résistance, chaque fusée ait la même accélération propre constante et identique mesurée par un accéléromètre embarqué que précédemment, cela implique que la poussée fournie par chaque fusée soit différente du cas des fusées non liées, la différence générant l'énergie potentielle élastique du câble. Notons que toutes ces remarques restent qualitatives! L'allongement diverge il ou non? Si oui, il est certain que cela va entraîner la rupture du câble.

Mais pendant la phase accélérée les mêmes remarques que précédemment s'appliquent: Si le lien n'est pas infiniment rigide, le défaut de simultanéité ne va il pas s'appliquer? Que pouvons nous savoir alors de la «longueur propre» physique du lien, longueur censée donner la limite de rupture?

Nous avons mentionné précédemment l'approximation adiabatique (équilibre local: quasi équilibre temporel), quand l'accélération appliquée pour maintenir des trajectoires identiques au cas des fusées indépendantes évolue suffisamment lentement<sup>15</sup>, l'accélération résultante restant constante.

Si nous supposons que ce critère de pseudo stationnarité est satisfait, nous pouvons proposer une définition *originale* pour ce qu'on pourrait considérer comme la longueur propre "physique" du lien qui relie les fusées, définissant une longueur sur laquelle les observateurs des deux fusées peuvent s'accorder et nous ferons les calculs associés. *Nous définirons et justifierons ce que nous considérerons comme la longueur propre.* Géométriquement c'est l'enveloppe des tangentes aux

14 En réponse à une note de P. Ehrenfest [15] Einstein [13] pensait que le corps rigide qui supposait une propagation instantanée (ou supérieure à la vitesse de la lumière) d'une action quelconque était incompatible avec la théorie de la relativité. Il en déduisait qu'on ne disposait pas encore d'une dynamique du corps rigide. On peut se poser la question de savoir si cette remarque s'applique à un état stationnaire (un état d'équilibre, où il n'y aurait pas de propagation à proprement parler) où les contraintes sont équilibrées par la réaction d'élasticité du matériau?

15 Il faut introduire  $\Delta t \approx L_0/v_s$  le temps de relaxation de la perturbation dans le lien, où  $v_s$  est la vitesse du son et  $L_0$  la longueur du lien (coordonnées dans le référentiel propre du lien supposé en quasi équilibre) . Si  $a$  est l'accélération la condition s'écrit  $\Delta a/a \ll 1$  pendant le temps de relaxation et si on pose  $\Delta a = a'/\Delta t$  on déduit  $a' \ll a \cdot v_s/L_0$ .

axes  $x'$  des référentiels locaux construits, en partant du référentiel local de la fusée poursuivante, par itération jusqu'à couper la ligne d'univers de la fusée poursuivie. ***Nous discuterons de son adéquation physique au problème posé et aux résultats qu'elle nous donne en particulier vis à vis de la question de Bell qui est simplement " le câble finit il par se rompre si on maintient l'accélération indéfiniment ", dont la réponse serait "oui" mais en précisant les modalités<sup>16</sup> (inattendues) et des majorants des paramètres.***

Si on veut traiter le problème dans toute sa généralité (mais Bell ne nous en demande pas tant) , la contrainte appliquée pour maintenir une distance constante entre les fusées étant variable le long du câble, il faut absolument tenir compte de la propagation du son dans le lien physique (vitesse du son dans l'acier environ 5km/s  $\ll c$ ), si on veut un résultat physique. Le critère de rupture n'est pas nécessairement un allongement critique mais une contrainte locale supérieure à la limite locale de rupture. L'allongement associé (pour autant que cela est un sens) va dépendre de l'accélération appliquée. Sous certaines conditions que nous préciserons un pseudo équilibre<sup>17</sup> variant lentement peut donner un certain résultat alors que si l'accélération est très forte c'est la contrainte locale liée au régime transitoire qui devient prépondérant et cela donne sans doute un autre résultat.

***Par ailleurs, si on coupe le moteur des fusées au bout d'un temps propre égal, c'est à dire si en retourne à une situation où la RR va bien s'appliquer<sup>18</sup>, quid d'une force de rappel du câble (s'il n'est pas rompu)? Un raisonnement, à priori, nous conduit à déclarer que comme la longueur propre du lien à la fin est plus grande qu'au début, le câble est sous tension et que étant en vol inertiel plus aucune contrainte ne s'appliquant aux extrémités par élasticité la distance entre les fusées doit reprendre sa valeur initiale.***

Ceci nous montre que l'espace-temps (vide) de Minkowski s'il décrit et contraint complètement<sup>19</sup> tous les mouvements inertiels n'est pas suffisant pour décrire exhaustivement les mouvements non inertiels dont la source<sup>20</sup> physique se révèle « extérieure » à cet espace et qui ne sert alors que de cadre pour ces phénomènes et ne les contraint que localement.

C'est une situation intermédiaire entre la RR et la RG avec ce point commun qu'en chaque point, il y a un espace-temps de Minkowski tangent, mais qui est « extérieur » à la variété dans le cas de la RG et qui est confondu avec la variété dans le cas des mouvement accélérés mais dont la trajectoire accélérée emprunte des référentiels inertiels différents (des feuillet inertiels différents) lorsqu'on la décrit contrairement au cas inertiel qui reste dans le même feuillet inertiel.

16 Il y a un problème de fond. Si l'élasticité du câble joue un rôle dans le phénomène, cela veut dire qu'on n'est plus exactement en RR de base. Cette élasticité ne doit elle pas plutôt être modélisée par un tenseur et le problème traité dans le formalisme de la RG? Nous l'avons traité de façon hybride, on peut donc douter de la validité formelle de cette approche. Toutefois compte tenu des hypothèses nous pensons qu'au premier ordre cette approche est acceptable.

17 Si un équilibre est atteint nous pouvons nous affranchir des vitesses de propagation des perturbations dans le câble.

18 Avec une zone de transition comme nous verrons!

19 Son groupe de symétrie décrit et contraint les phénomènes « globalement » inertiels.

20 Source de nature inconnue, mais qui ne perturbe pas l'espace-temps de Minkowski...

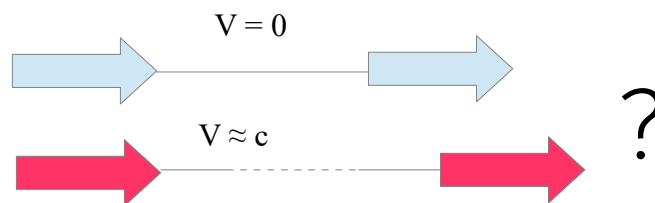


## 2- Le paradoxe de Bell

John Bell a décrit ce paradoxe de RR dans son essai "How to teach special relativity" [1], dans sa collection "Speakable and Unspeakable en mécanique quantique." Bell n'est pas à l'origine du paradoxe mais, pour l'avoir popularisé, ce paradoxe est passé à la postérité sous son nom!

Dans la version de Bell de l'expérience de pensée, deux fusées qui sont initialement au repos dans un référentiel commun <sup>21</sup> sont reliées par une corde tendue. Les fusées décollent à l'instant  $t = 0$  et maintiennent la même accélération propre constante  $g$  mesurée par un accéléromètre embarqué.

**Question:** La corde va elle se rompre <sup>22</sup>: La distance entre les deux fusées augmente elle? Ceci est illustré sur la figure ci dessous:



**Figure 1:** La figure du haut correspond à l'attelage au moment du décollage. L'attelage représenté en bas voit sa corde se rompre, lorsque sa longueur dépasse son allongement maximum avant rupture, selon Bell.

Dans des discussions par Dewan & Beran et aussi de Bell, si dans le référentiel du laboratoire la distance entre les fusées reste constante, la distance physique entre les deux fusées augmentant continument la fameuse corde finirait par casser.

Il y a eu de nombreuses objections à ces arguments. Par exemple Paul Nawrocki suggère que la corde ne cassera pas.[3] tandis que Edmond Dewan défend son point de vue original dans une réponse à ces objections.[4] Le moins qu'on puisse dire c'est que les solutions proposées font débat.

<sup>21</sup> Nous l'appellerons le référentiel du laboratoire ou plus simplement le laboratoire.

<sup>22</sup> Dans un premier temps nous ne traiterons que le cas des fusées indépendante, le cas des fusées liées sera traité dans un deuxième temps pour bien séparer les problèmes.

### 3- Analyse du paradoxe de Bell dans sa version originale

#### 1 Généralités

Bell considère deux fusées<sup>23</sup>, l'une derrière l'autre, chacune accélérant (dans son propre référentiel) au même rythme l'une poursuivant l'autre.

Les fusées, séparées d'une distance  $d$  dans un référentiel galiléen commun que nous appellerons le laboratoire, partent simultanément (dans ce référentiel galiléen commun, la simultanéité est bien définie).

Comme elles ont les mêmes accélérations propres (mesurées par des accéléromètres identiques embarqués), leurs vitesses doivent être identiques et elles doivent rester à distance constante (dans le laboratoire). Comme l'accélération s'exerce dans une seule direction sans nuire à la généralité du problème, nous pouvons réduire le problème à une dimension d'espace en choisissant comme axe, pour coordonnée spatiale  $x$ , la direction spatiale de l'accélération.

Nous utiliserons un diagramme cartésien de Minkowski pour représenter tous ces éléments. Les axes cartésiens  $t, x$  sont relatifs aux coordonnées temps et espace du référentiel du laboratoire. L'axe  $t$  est horizontal et l'axe  $x$  est vertical. Ils sont issus de l'origine  $O$ . Par défaut, on pose dans le document  $c = 1$ .

On peut représenter un référentiel inertiel différent, en  $O$ , animé d'une vitesse relative  $v$ , d'axes  $t'$  et  $x'$ . L'axe  $t'$  est une droite d'équation :  $x = v.t$

L'axe  $x'$  est la droite symétrique de l'axe  $t'$  par rapport à une droite de pente  $1$  (représentant la ligne d'univers d'un rayon lumineux issu de l'origine) dont l'équation est donc  $x = t/v$

Nous pouvons définir des axes  $t', x'$  en n'importe quel point  $P(t_0, x_0)$  du diagramme dont les équations sont respectivement  $x = v.t + a$  et  $x' = x/v + b$ ,  $a$  et  $b$  étant des constantes qu'on calcule en utilisant le fait que ces deux axes se coupent en  $P$ , ( $t' = 0$  et  $x' = 0$  en  $P$ ).

L'axe  $t$  correspond au mouvement du point de coordonnée spatiale fixe  $x = 0$  et l'axe des  $x$  à tous les événements qui se produisent à  $t = 0$  (simultanés). Même chose pour  $t', x'$  en remplaçant  $t$  et  $x$  par  $t'$  et  $x'$ . Cette représentation va nous permettre de mettre en évidence le défaut de simultanéité.

Une telle trajectoire accélérée obéit à des équations du type  $t = \sinh[a.\tau]/a$  et  $x = \cosh[a.\tau]/a$ .<sup>24</sup> On en déduit  $x^2 - t^2 = 1/a^2$ . S'agissant d'un exemple destiné à analyser le phénoménologie, jusqu'à nouvel ordre, on peut poser  $a = 1$  pour simplifier les calculs.

Sur ce diagramme (fig.3) traçons la moitié droite de l'hyperbole supérieure  $x^2 - t^2 = 1$  soit,  $x = (t^2 + 1)^{1/2}$ . Copions cette partie d'hyperbole en la translatant vers le haut d'une distance fixe  $d$ , soit  $x = d + (1 + t^2)^{1/2}$ . Ces courbes sont les lignes d'univers de nos deux fusées uniformément accélérées.

Fixons les conditions initiales en posant  $dx/dt = 0$  à  $t = 0$ : Les fusées sont initialement au repos

<sup>23</sup> Nous appellerons fusée 1 la fusée poursuivante et fusée 2 la fusée poursuivie.

<sup>24</sup> Où  $a$  est l'accélération et  $\tau$  le temps propre.

dans le laboratoire. Nous pouvons vérifier que  $d^2x/dt^2 = 1$  à  $t = 0$ <sup>25</sup>. Évidemment  $d^2x/dt^2$  n'est pas constant .

Prenons un point  $P$  sur la courbe inférieure (ligne d'univers de la fusée poursuivante: fusée 1) et traçons les coordonnées locales de Minkowski  $(t', x')$  d'origine  $P$  avec l'axe  $t'$  tangent à la courbe en  $P$ . Le système de coordonnées  $(t', x')$ , avec  $x'$  défini comme ci dessus, est le système de coordonnées associé au référentiel co-mobile de la fusée en  $P$ .

Rappelons les transformations de Lorentz avec  $P$  de coordonnées  $(t_0, x_0)$  dans le système de référence.

$$t' = \gamma(t - vx) + a \quad v = dx/dt \text{ en } t = t_0$$

$$x' = \gamma(x - vt) + b \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$$

où  $a$  et  $b$  ont été choisis pour que  $P$  ait les coordonnées  $(0, 0)$  dans le système primé (les axes  $t'$  et  $x'$  se coupent en  $P$  comme nous l'avons déjà indiqué). On peut vérifier (le calcul est fait en annexe 4) que :  $d^2x'/dt'^2 = 1$  en  $P$ . La mesure de l'accélération de chaque fusée vaut toujours 1 dans les référentiels co-mobiles de chaque fusée, ce qui est bien conforme à nos hypothèses.

Notons au passage que comme nous sommes dans un système d'unités où nous avons posé  $c = 1$ , ceci correspond à une valeur énorme (irréaliste, mais nous sommes dans une expérience de pensée) pour l'accélération ( $300\ 000\ 000\ m/s^2$ ).

Sur les graphiques et diagrammes la partie la plus significative sera donc celle qui correspond à une échelle de quelques unités sur l'échelle des temps dans le diagramme de Minkowski, où il y a des variations importantes de vitesse, donc éventuellement de phénoménologie. Au delà les lignes d'univers deviennent hautement relativistes ce qui correspond à un type de phénoménologie qui varie peu. C'est pour cela que l'échelle des temps (dans le laboratoire) des diagrammes de Minkowski que nous représenterons sera en général limitée à quelques unités, sans que cela nuise à la généralité du problème.

Pour la distance entre les fusées, dans ce même système d'unités, la valeur 1 correspond à  $3.10^8$  m, valeur importante mais qui par contre n'a rien d'irréalisable. Il est bon d'avoir ces échelles à l'esprit car évidemment dans ce système d'unités le phénomène devient très sensible (ce qui permet de mieux le caractériser), mais dans des conditions physiques plus réalistes le phénomène est moins perceptible (ce qui n'empêche pas qu'il est présent).

## 2 La phénoménologie observée du point de vue de la fusée poursuivante.

### *Description générale*

Ayant choisi le point  $P$  et son référentiel local associé  $(t', x')$  sur la courbe correspondant à la ligne d'univers de la fusée poursuivante (fusée 1), les calculs dans ce référentiel  $(t', x')$  vont décrire ce que l'observateur dans la fusée poursuivante constate. La figure 3-1 ci dessous synthétise cela.

---

<sup>25</sup> Voir annexe 3 pour les détails du calcul



courbe sur le diagramme ne représente pas le temps propre <sup>26</sup>: Ici  $d = 0.5$ .

Nous avons également tracé les asymptotes ( $x = t$ , en rouge et  $x = t + 0,5$  en vert) aux deux hyperboles (couleurs correspondantes). Nous démontrerons plus loin que l'axe des «  $x$  » en un point d'une hyperbole de ce type passe par le centre de symétrie (respectivement  $O$  pour  $x'$  et  $O'$  pour  $x''$ )<sup>27</sup>. Nous avons tracé également l'axe  $x'$  en  $Q$  (marron pointillé) qui coupe l'hyperbole 1 en  $T$ . Ceci montre le défaut de simultanéité entre les points  $P$  et  $Q$ : Alors que la fusée 1 en  $P$  voit, sur sa ligne de simultanéité, la fusée 2 en  $Q$ , la fusée 2 en  $Q$ , sur sa ligne de simultanéité, voit la fusée 1 en  $T$ . Ce diagramme visualise bien le problème.

On voit sur la figure 3-1 que toute ligne verticale  $t = \text{constante}$  coupe les deux courbes en deux points d'ordonnée  $x_0$  et  $x_1$  tels que  $x_1 - x_0 = d$ : Les deux fusées maintiennent leur distance constante dans le référentiel du laboratoire.

Rappelons que  $P$  est un point sur la courbe inférieure et que l'axe  $t'$  est tangent en  $P$  à cette courbe. Traçons une droite verticale (à  $t = t_0$ ) en  $P$ , cette droite coupe la courbe supérieure en  $R$ . Traçons une droite parallèle à l'axe  $t'$  en  $R$  (une droite de la forme  $x' = \text{constante}$ ). L'axe  $x'$  coupe les deux droites inclinées en  $x' = 0$  et  $x' = \text{constante}$ , aux coordonnées  $x' = 0$  ( $P$ ) et  $x' = \gamma d$  ( $S$ )<sup>28</sup>, respectivement.

Comme la droite  $x' = \text{constante}$  en  $R$  est tangente à la courbe supérieure (la ligne d'univers de la fusée 2) l'axe  $x'$  va couper la courbe supérieure en  $x' > \gamma d$ , car du fait de la courbure de la ligne d'univers ( $d^2x/dt^2 > 0$ ) la courbe est au dessus de la droite  $x' = \text{constante}$ .

Nous en déduisons que, de façon inattendue, les fusées s'éloignent l'une de l'autre, bien qu'elles exercent en permanence une accélération propre constante et égale dans leur référentiel propre et ceci depuis leur décollage. Dans le système de coordonnées local de la fusée poursuivante ( $t', x'$ ),  $dx'/dt' = 0$  à  $t' = 0$  mais  $dx'/dt' > 0$  à  $t' = 0$  pour la courbe supérieure (ligne d'univers de la fusée poursuivie)<sup>29</sup>: Les observateurs dans la fusée poursuivante, au repos dans ce référentiel qui est leur référentiel propre, voient la fusée poursuivie s'éloigner d'eux, ce qui est cohérent avec le fait que la distance entre les deux fusées augmente.

Nous verrons qu'il faut attribuer ce comportement paradoxal au défaut de simultanéité dans ce type de situation.

### ***Distance propre $d$ entre les fusées dans le référentiel comobile de la fusée 1***

Référons nous à la figure 3-1. Le référentiel  $I$  est le référentiel co-mobile de la fusée  $I$  poursuivante en  $P$  de coordonnées  $(t_0, x_0)$  dans le système de référence du laboratoire. Le point  $Q$  est l'intersection de l'axe  $x'$  du référentiel  $I$  avec la ligne d'univers de la fusée 2 (poursuivie). Dans ce référentiel la distance entre les deux fusées est donnée par  $PQ$  puisque  $x'$  est la ligne de simultanéité ( $t' = 0$  sur cet axe).

Nous devons donc calculer l'intervalle d'espace-temps entre  $P$  et  $Q$  qui est un invariant relativiste, et

<sup>26</sup> Voir annexe 1 pour plus de détails

<sup>27</sup> Nous n'avons pas tracé  $x''$  (axe local des «  $x$  ») en  $Q$  pour la fusée poursuivie. Nous verrons plus loin (fig 3.5) qu'il est bien disjoint de  $x'$ . Pour qu'il y ait synchronisme il faudrait qu'il soit confondu, ce qui est possible dans une autre configuration, où les points  $O$  et  $O'$  sont confondus, que nous décrirons plus loin.

<sup>28</sup> Cela résulte de l'application directe des formules de Lorentz.

<sup>29</sup> Voir annexe 5.

qui est la longueur propre dans le référentiel  $(t', x')$  puisque situé sur l'axe  $x'$ . On peut calculer cet invariant dans n'importe quel référentiel, calculons le dans le référentiel du laboratoire.

Pour cela calculons les coordonnées de  $Q(t_2, x_2)$ , intersection de l'axe  $x'$  passant par l'origine et par  $P$ , donc de la forme  $x = [(1+t_0^2)^{1/2}/t_0]t$ <sup>30</sup> avec la ligne d'univers de la fusée 2. Ceci s'écrit, avec  $d$  distance entre les fusées dans le laboratoire:

$$x_2 = [(1+t_0^2)^{1/2}/t_0]t_2 = [(1+t_2^2)^{1/2}] + d \rightarrow [(1+t_0^2)^{1/2}/t_0]t_2 - d = [(1+t_2^2)^{1/2}] \rightarrow \{[(1+t_0^2)^{1/2}/t_0]t_2 - d\}^2 = (1+t_2^2)$$

$$\rightarrow t_2^2 \left[ \frac{(1+t_0^2)}{t_0^2} - 1 \right] - 2d \frac{(1+t_0^2)^{1/2}}{t_0} t_2 + d^2 - 1 = 0.$$

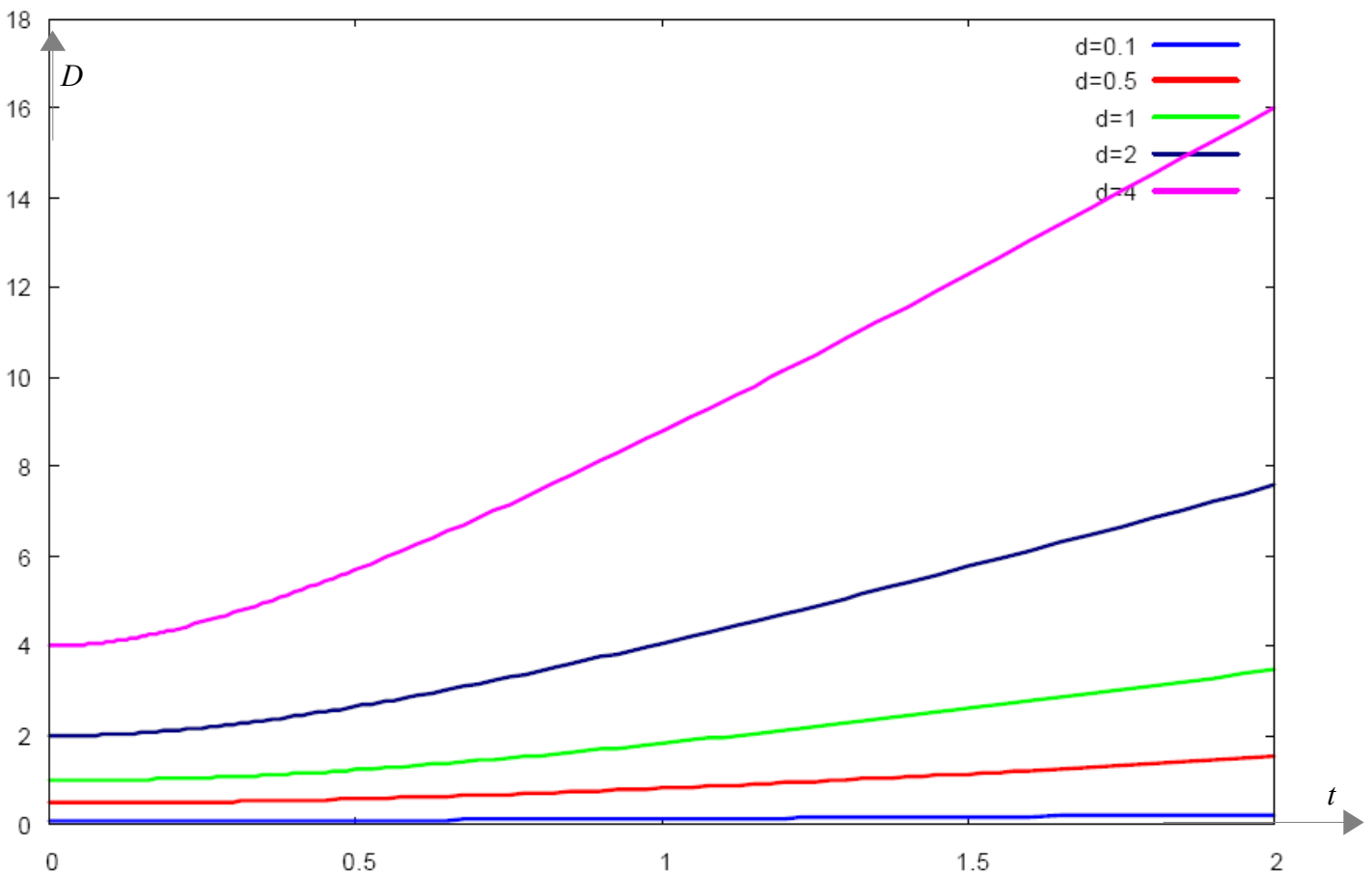
En résolvant et en prenant la racine positive :  $t_2 = t_0 \{ d \cdot (1+t_0^2)^{1/2} + (1+d^2 t_0^2)^{1/2} \}$

La distance de Minkowski:  $s^2 = D^2 = -t^2 + x^2 = -t^2 + [(1+t_0^2)/t_0^2]t^2 = t^2 \{ [(1+t_0^2)/t_0^2] - 1 \} = t^2 [(1/t_0^2)]$

avec:  $t = t_2 - t_0$ , soit:

$$s^2 = D^2 = t_0^2 \{ d \cdot (1+t_0^2)^{1/2} + (1+d^2 t_0^2)^{1/2} - 1 \}^2 \rightarrow s = D = \{ d \cdot (1+t_0^2)^{1/2} + (1+d^2 t_0^2)^{1/2} - 1 \}$$

Nous pouvons tracer quelques courbes pour différents paramètres de  $d$  et  $t_0$  pour montrer la dépendance de la longueur vis à vis de ces paramètres.



**Figure 3-2[7]:** Variation de la distance  $D$  le long de la ligne d'univers de la fusée 1, pour différentes valeurs de la distance initiale. L'ampleur du phénomène de dilatation de la distance est très sensible

<sup>30</sup> Pour la fusée 1, on montre que l'axe  $x'$  passe par l'origine.

à ce paramètre pour des valeurs importantes mais pas démesurées,  $d = l$  (< distance Terre -Lune)

Nous voyons que dans le référentiel co-mobile de la fusée 1 la distance entre les fusées augmente de plus en plus. Pouvons nous en conclure que la distance augmente physiquement.

Si on trace le référentiel co-mobile ( $t'', x''$ ) en  $Q$ , coïncide  $t'$  il avec celui en  $P$  ( $t', x'$ )? La fig.3-1 nous a montré que non, cela va compliquer et l'interprétation physique va être délicate.

***Développement au deuxième ordre en  $d$  de  $D(t,d)$ .***

Faisons le développement au deuxième ordre lorsque  $d \ll l$ . Avec  $v = t.(1+t^2)^{-1/2} \rightarrow 1-v^2 = 1/(1+t^2)$ .

$$D \approx \{d.(1+t^2)^{1/2} + 1+d^2t^2/2 -1\} = d.[(1+t^2)^{1/2} + dt^2/2] = d.(1-v^2)^{-1/2} + d^2.t^2/2 = \gamma.d + d^2.t^2/2$$

Nous retrouvons bien la contraction de Lorentz au premier ordre corrigé par un terme du deuxième ordre, lorsque les deux trajectoires tendent l'une vers l'autre. Ceci montre, entre autres, que pour une longueur infinitésimale l'approximation au premier ordre  $D \approx \gamma.d$  est valable, ce qui est important quand on réalise un calcul de longueur par une intégration sur des référentiels localement inertiels tous différents (cas de la mesure de la circonférence du disque en rotation pour un observateur sur la circonférence).

***Développement au deuxième ordre en  $v$  de  $D(v,d)$ .***

Comme  $v$  est défini à partir de  $t$  on peut aussi exprimer  $D$  en fonction de  $d$  et  $v$  : Ceci donne:

$$D = \{d./(1-v^2)^{1/2} + (1+d^2[v^2/(1-v^2)^{1/2}] -1)\}$$

si  $v \ll 1$  on peut développer l'expression

$$D = \{d./(1-v^2)^{1/2} + [1+d^2.v^2/(1-v^2)]^{1/2}-1\} \approx \{d./(1-v^2)^{1/2} + (1+d^2[v^2/(1-v^2)]/2 -1)\} =$$

$$D = d/(1-v^2)^{1/2} + d^2[v^2/(1-v^2)]/2$$

On retrouve la loi de Lorentz au premier ordre en  $v$  corrigé d'un terme au deuxième ordre en  $v^2$ .

***Calcul de la vitesse de la fusée 2 dans le référentiel co-mobile de la fusée 1.***

Méthode par la composition des vitesses

Le problème étant spatialement « unidimensionnel », le plus simple est d'utiliser la loi de composition des vitesses <sup>31</sup>(toujours en posant  $c = l$ ).

$$V = (v + w)/(1+v.w)$$

Avec  $v$  vitesse du référentiel local dans le laboratoire en  $P$ ,  $V$  vitesse du référentiel local en  $Q$  dans

---

<sup>31</sup> C'est le plus simple mais la méthode par le produit scalaire donnée en annexe 2 est plus géométrique dans l'esprit de la Relativité. On y donne aussi une autre méthode utilisant les formules de Lorentz.

le laboratoire et  $w$  la vitesse relative du référentiel en  $Q$  dans le référentiel en  $P$ .

Nous connaissons les vitesses  $v, V$  des référentiels locaux en  $P$  et  $Q$  dans le laboratoire.

Nous cherchons à connaître la vitesse relative  $w$  de  $V$  dans le référentiel  $v$ .

$$v = dx/dt = t_1/(t_1^2+1)^{1/2} \text{ en } t = t_1$$

$$V = dx/dt = t_2/(t_2^2+1)^{1/2} \text{ en } t = t_2$$

Cela donne:

$$t_2/(t_2^2+1)^{1/2} = (t_1/(t_1^2+1)^{1/2} + w)/(1 + w \cdot [t_1/(t_1^2+1)^{1/2}]) \rightarrow w[(1 - t_1 t_2/(t_2^2+1)^{1/2} (t_1^2+1)^{1/2})] = t_1/(t_1^2+1)^{1/2} - t_2/(t_2^2+1)^{1/2} \rightarrow w = [t_2 (t_1^2+1)^{1/2} - t_1 (t_2^2+1)^{1/2}] / [(t_2^2+1)^{1/2} (t_1^2+1)^{1/2} - t_1 t_2]$$

En remplaçant  $t_2$  par sa valeur que nous avons calculée au § précédent,

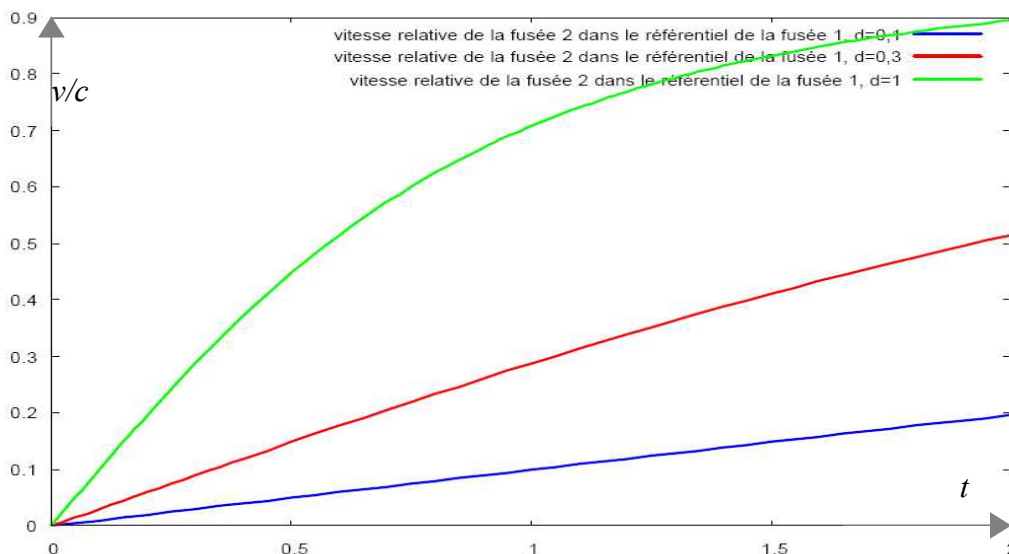
$$t_2 = t_1 \{d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2}\}, (1+t_2^2)^{1/2} = [t_1^2 \{d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2}\}^2 + 1]^{1/2} = [t_1 \{d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2}\}^2 + 1]^{1/2}$$

nous obtenons:  $w = [t_1 \{d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2}\} (t_1^2+1)^{1/2} - t_1 \{t_1 (d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2})^2 + 1\}^{1/2}] / [\{t_1 (d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2})^2 + 1\}^{1/2} (t_1^2+1)^{1/2} - t_1^2 \{d \cdot (1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2 t_1^2)^{1/2}\}]$

Cette vitesse est la vitesse relative de la fusée 2 dans le référentiel co-mobile de la fusée 1.

Le calcul de la vitesse confirme que la fusée 2 s'éloigne de plus en plus (la vitesse augmente) de la fusée 1, dans le référentiel co-mobile de la fusée 1.

Traçons les courbes de vitesse relative de  $Q$  dans le référentiel co-mobile de  $P$  pour quelques valeurs de  $d$ . Nous voyons l'effet relativiste sur l'allure de la courbe, effet qui limite la vitesse à  $c$  dans le référentiel de la fusée 1.



**Figure 3-3 [7]:** Vitesse relative de la fusée 2 dans le référentiel de la fusée 1. On note la forte dépendance vis à vis de la distance  $d$ .



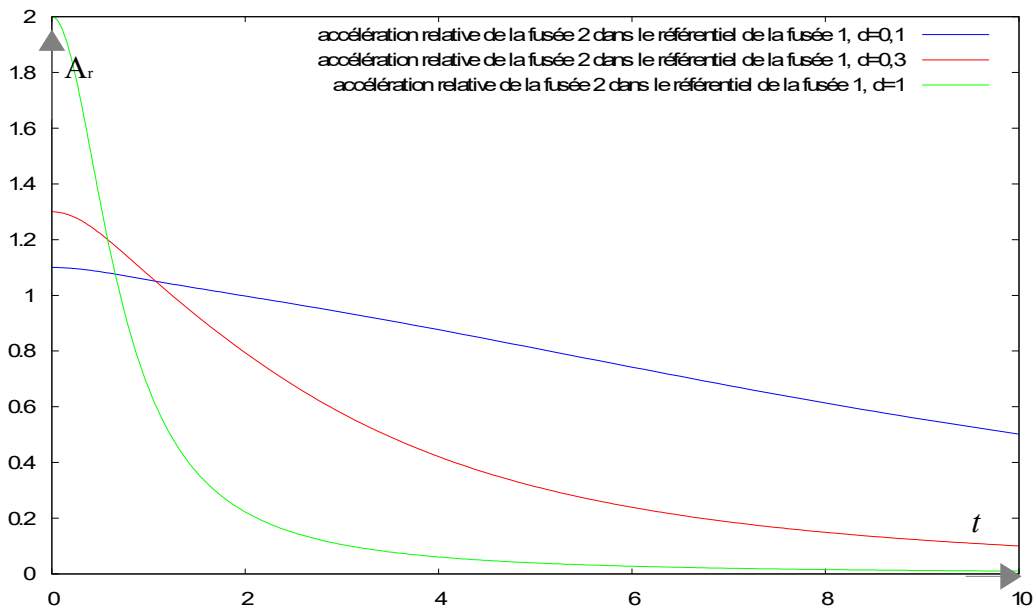
**Calcul de l'accélération relative de la fusée 2 dans le référentiel 1.**

Calcul de l'accélération en  $Q$  dans le référentiel co-mobile d'axes  $(t', x')$  en  $P$

Les coordonnées de  $Q$  sont  $(t', x')$  dans le référentiel de la fusée 1.

En utilisant la loi de composition des accélérations, où  $A'_{(Q)}$  est l'accélération de la fusée 2 en  $Q$  dans le référentiel co-mobile de la fusée 1 qui est en  $P$ ,  $A_{(Q)}$  est l'accélération de la fusée 2 dans le référentiel du laboratoire,  $v'_{(Q)}$  est la vitesse de la fusée 2 en  $Q$  dans le référentiel co-mobile de la fusée 1 qui est en  $P$ ,  $v$  est la vitesse du référentiel co-mobile de la fusée 1 dans le référentiel du laboratoire et  $\gamma$  le facteur de Lorentz  $(1 - v^2)^{-1/2}$ .

$$A'_{(Q)} = \gamma^3 \{ A_{(Q)} [1 + v'_{(Q)} v] \}$$



**Figure 3-4-1 [7]:** Accélération relative entre les deux fusées en fonction de  $t$  pour différentes valeurs de la distance initiale entre les fusées  $d$ .

Cette accélération relative est maximum au départ et elle diminue jusqu'à tendre vers 0. Ceci est un effet relativiste puisque la vitesse ne peut excéder  $c$  dans tout référentiel. Toutes ces courbes incorporent des effets relativistes importants du fait de la valeur énorme de l'accélération propre avec les unités utilisées comme nous l'avons déjà signalé.

Mais alors que l'accélération est un critère dans le cas d'un corps matériel pour savoir s'il risque de casser, ici comme les deux fusées sont libres de toute attache, cela nous donne simplement une information sur la déviation entre deux lignes d'univers identiquement accélérées.

En fait comme chaque fusée a une accélération constante dans son référentiel propre son impulsion relativiste croît linéairement avec le temps. Si ceci est représenté par des courbes dans les autres référentiels c'est simplement parce que le coefficient d'inertie s'accroît avec la vitesse, du coup la vitesse ne croît pas linéairement. Notons qu'on pourrait en utilisant à l'envers cette propriété déduire très simplement de ces courbes la loi d'accroissement du coefficient d'inertie!

### 3 Le point de vue de l'observateur de la fusée 2 (poursuivie).

Après le point de vue de la fusée 1, plaçons nous maintenant du point de vue de la fusée 2. Pour bien caractériser le phénomène nous allons nous placer dans un cas limite. Nous poserons  $d = 1$ .

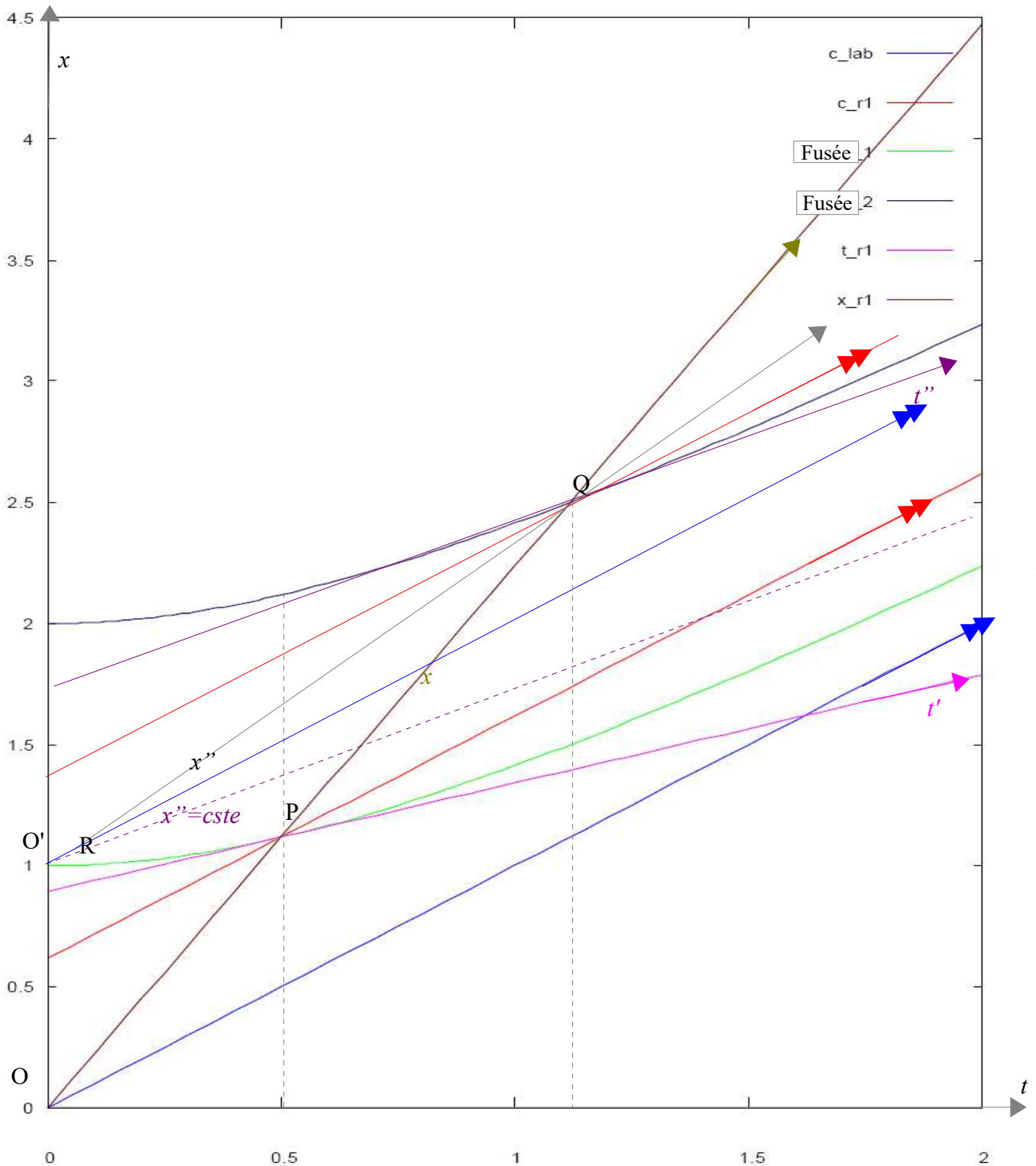


Fig.3-5 [7]: Dans le référentiel co-mobile de la fusée 2 en  $Q$  d'axes  $(t'', x'')$ , l'axe  $t''$  est tangent à la

ligne d'univers de la fusée 2 en  $Q$ . Il est représentée sur le diagramme par une droite magenta foncé, l'axe  $x''$  issu de  $Q$ , symétrique de l'axe  $t''$  par rapport à la ligne d'univers d'un rayon lumineux (la droite rouge avec double flèches en  $Q$ ) est représenté en noir sur le diagramme. Il coupe la ligne d'univers de la fusée 1 en  $R \neq P$ . En  $Q$ , la fusée 2 voit la fusée 1 non pas en  $P$  mais en  $R$ , du fait du défaut de simultanéité. En effet, l'axe  $t''$  n'est pas parallèle à  $t'$ , car son point de tangence  $Q$  est à une valeur de coordonnée  $t$  supérieure à celle de  $P$ , donc la dérivée à la courbe  $x(t)$  est différente. Comme  $x''$  est symétrique de  $t''$  par rapport à une ligne d'univers lumière (elles sont toutes parallèles), et que  $t''$  n'est pas parallèle à  $t'$ ,  $x''$  n'est pas confondu avec  $x'$ .

Notons que le rayon lumineux issu de  $O$  (en bleu double flèche) est l'asymptote à l'hyperbole inférieure et que celui issu de  $O'$  est l'asymptote à l'hyperbole supérieure.

Ici  $d = 1$ . On remarque que  $R$  et  $O'$  sont confondus dans ce cas limite particulier.

Ce diagramme montre que la fusée 2 en  $Q$  (donc déjà partie depuis quelque temps comme sa position sur sa ligne d'univers en atteste) « croît » que la fusée 1 n'est pas encore partie puisque sa ligne de simultanéité, l'axe  $x''$  coupe la ligne d'univers en  $R$  qui est confondu avec  $O'$ .

Pour la fusée poursuivie, la fusée poursuivante est encore sur le pas de décollage!

En fait tout au long de sa ligne d'univers la fusée 2 ne verra jamais la fusée 1 partir. Ceci se comprend bien quand on voit que le rayon lumineux issu de  $O'$  (point de départ de la fusée 1) est l'asymptote de l'hyperbole représentant la ligne d'univers de la fusée 2: le rayon lumineux issu de  $O'$  n'atteint jamais la fusée 2 (sauf à l'infini). La fusée 1 n'influence pas causalement la fusée 2 (mais l'inverse n'est pas vrai la fusée 1 reçoit les signaux lumineux de la fusée 2)!

### ***Cette phénoménologie est caractéristique d'un horizon des évènements!***

Ceci est un cas limite, si  $d < 1$  la situation est différente, la fusée 2 voit la fusée 1 décoller et se déplacer mais avec retard par rapport à son propre trajet.

Si  $d > 1$  alors la fusée 2 ne voit jamais la fusée 1 décoller, aucun signal issu de la fusée 1 ne pourra l'atteindre.

On voit que la situation n'est pas du tout symétrique vis à vis du rôle des fusées! En particulier le calcul de la vitesse relative de la fusée poursuivante dans le référentiel local de la fusée poursuivie n'est pas possible si  $d > 1$  (si on suppose que  $t$  est défini que pour  $t \geq 0$ ), alors que cette vitesse était définie quel que soit  $d$  dans le cas précédent.

Ces lignes d'univers uniformément accélérées réalisent une partition de l'espace-temps de Minkowski en sous régions causalement déconnectées (cela sera confirmé par l'analyse en utilisant la rotation de Wick).

### ***Distance entre les fusées***

Si on revient à un cas où  $d < 1$ , quand la fusée 1 est  $P$  elle mesure une distance spatiale jusqu'à la fusée 2 égale à  $PQ$ . Mais quand la fusée 2 est précisément en  $Q$ , elle mesure une distance spatiale jusqu'à la fusée 1 égale à  $QR$  qui est différente.

On peut calculer la distance comme précédemment et en la comparant au cas précédent déterminer un retard de la fusée 1 par rapport à la fusée 2 selon le critère de la différence de temps propre au bout duquel les fusées mesurent une distance égale.

### ***Autres paramètres (vitesse relative, accélération)***

On pourrait faire les calculs en utilisant la même méthode que précédemment en opérant la permutation:  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R$ . On pourrait tracer les mêmes courbes que précédemment qui seraient différentes. On pourrait calculer en fonction du temps  $t$ , le décalage temporel dans le référentiel de la fusée 1 entre le point P et le point R. On pourrait calculer les deux valeurs du temps  $t$  où les fusées 1 et 2 mesurent la même distance entre elles et tracer la courbe donnant l'évolution de cette différence en fonction du temps. Servons nous du diagramme que nous avons tracé (qui est limite, mais utilisable pour notre propos) pour poursuivre notre description. Nous pouvons voir sur ce diagramme que dans le référentiel  $t'', x''$  (nous avons tracé une droite en pointillé magenta de la forme  $x'' = cste$  en R, parallèle à l'axe  $t''$ ) que la vitesse de la fusée 1 est négative (la ligne d'univers courbe en vert se dirige sous la droite  $x'' = cste$ , en pointillés magenta).

### ***Les phénoménologies observées par la fusée 1 et 2 sont cohérentes***

L'observateur de la fusée poursuivie au repos dans son référentiel co-mobile  $t'', x''$  voit la fusée poursuivante derrière lui s'éloigner (pour  $d < l$ ), ce qui est cohérent avec la phénoménologie observée par la fusée poursuivante: La distance entre les deux fusées augmente. Soulignons qu'il s'agit de mesures de distance différentes faites à des instants différents (non « synchrones ») du fait de l'absence de référentiel commun aux deux fusées. Malgré cela, pour  $d < l$ , comme du point de vue de chaque fusée elle voit l'autre s'éloigner à tout instant (et de plus en plus vite) nous pouvons en conclure que cet éloignement est physique, même s'il est perçu différemment par chaque fusée.

Pour  $d \geq l$  la fusée poursuivante voit la fusée poursuivie s'éloigner de plus en plus vite, mais la fusée poursuivie ne voit pas la fusée poursuivante, donc aucune mesure n'est possible pour elle.

Pour synthétiser:

- Chaque fusée subissant la même accélération constante dans son propre référentiel, elles ont une accélération égale mais pas constante dans le référentiel du laboratoire. Par ailleurs du point de vue de chaque observateur dans le référentiel co-mobile associé à chaque fusée l'accélération de l'autre n'est pas constante.
- Le laboratoire voit les fusées toujours à une distance constante, mais pas les observateurs des fusées. Ceci n'est pas aussi paradoxal qu'il paraît, chaque fusée ayant un mouvement indépendant de l'autre, en effet c'est son propre accéléromètre interne qui gouverne le mouvement de chaque fusée. Le fait que conventionnellement elles se soient accordées sur une valeur n'établit pas pour autant de relation entre les trajectoires, l'information d'accélération étant purement locale. C'est la structure de l'espace qui va régir la relation entre les trajectoires. La fusée 2 est bien devant la fusée 1 (le problème est spatialement unidimensionnel), « devant » pour le laboratoire, sur sa « ligne de visée », signifie sur la même verticale à  $t = cste$ , sur le diagramme, par contre « devant » pour la fusée 1 a une autre signification, sa ligne de visée est l'axe des  $x'$  qui est incliné vers la droite (du fait de l'effet de ciseau lié au changement de référentiel) dans le diagramme de Minkowski qui visualise bien ce changement de point de vue.

#### 4 Rappel sur le défaut de simultanéité entre référentiels en RR.

Nous avons vu à propos du calcul de la distance propre entre les deux fusées que l'axe  $x'$  de simultanéité pour la fusée 1 (en  $P$ ) ne coïncidait pas avec l'axe  $x''$  de simultanéité pour la fusée 2 (en  $Q$ ). A ce stade il est utile d'explicitier en quoi la distance intervient dans la synchronisation.

##### Cas de deux référentiels galiléens.

Nous savons qu'entre deux référentiels galiléens, localement, chaque observateur voit les horloges de l'autre battre plus lentement (le rapport des fréquences  $1/\gamma$  est constant dans ce cas) et voit les longueurs d'objets dans l'autre référentiel plus courts (également d'un rapport  $1/\gamma$ ) que ce que mesure l'observateur attaché au référentiel de l'objet.

Attachons nous aux horloges. L'effet local sur la différence de fréquence des horloges entre référentiels galiléens, et la procédure de synchronisation des référentiels galiléens, entraîne un effet global sur les phases de ces horloges (la fréquence est la dérivée de la phase, la phase est une fonction de  $t$  et  $x$ ). Ceci apparaît dans la formule de Lorentz de transformation du temps ( $c = 1$ ).

$$t' = \gamma (t - vx) \tag{3-4-1}$$

Nous voyons qu'il y a un terme  $vx$  qui apparaît et fait intervenir la coordonnée spatiale.

Les référentiels galiléens  $x$  et  $x'$  sont tous deux équipés d'horloges synchronisées (par la méthode d'Einstein) dans leur référentiel propre.

Considérons la situation du point de vue de  $x$  à l'instant où toutes ses horloges marquent  $0H$ .

L'origine des deux référentiels est  $O$  et  $O'$ . Le référentiel  $x'$  est animé d'une vitesse  $v = 4/5$  par rapport à  $x$ . Les observateurs de  $x$  et  $x'$  conviennent de synchroniser leurs horloges en  $O, O'$  à  $0H$  à cet instant.

En appliquant, dans ces unités, l'équation (3-4-1) sur les points de gauche à droite repérés sur  $x$  de coordonnées  $-2, -1, 0, +1, +2$ , avec  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} = (1 - 16/25)^{-1/2} = (9/25)^{-1/2} = 5/3$ , on obtient:

$$t'_{(-2)} = (5/3)[0 + (4/5).2] = 8/3, t'_{(-1)} = (5/3)[0 + (4/5).1] = 4/3, t'_{(0)} = (5/3)[0 + (4/5).0] = 0, t'_{(1)} = (5/3)[0 - (4/5).1] = -4/3, t'_{(2)} = (5/3)[0 - (4/5).2] = -8/3$$

Ceci est représenté sur la figure ci dessous.

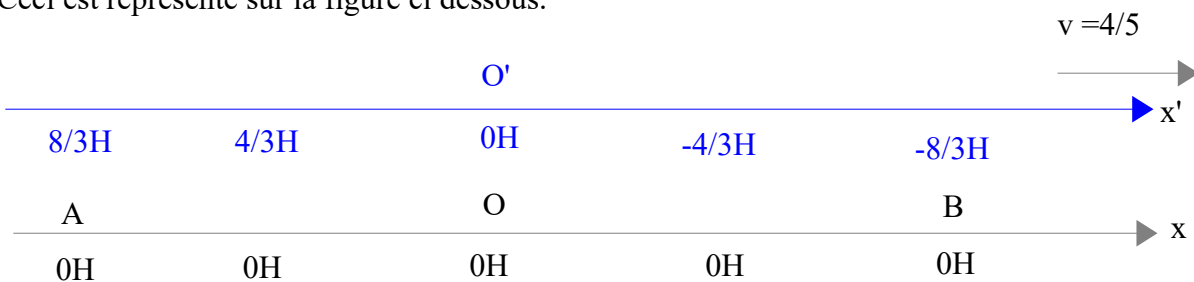


Figure 3-6: Désynchronisation entre référentiels galiléens.

La signification physique de ceci est que les cinq observateurs du référentiel galiléen  $x$  situés aux points indiqués voient, lorsque leur horloge locale marque  $0H$ , les horloges du référentiel  $x'$  qui passent en indiquant les heures que nous avons calculées. En  $O$  et  $O'$  les horloges sont en phase (par définition) mais on note le déphasage pour tous les autres points.

Deux évènements en  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $x$  se produisant à  $0H$  (simultanés dans  $x$ ) seront observés respectivement à  $2H 40mn$  (plus tard) et à  $21H 20 mn$  (plus tôt) dans  $x'$  et ne seront pas simultanés.

Nous aurions pu nous placer du point de vue des observateurs de  $x'$ , nous aurions obtenu une situation symétrique.

Bien entendu, lorsque le temps s'écoule ( par exemple une heure plus tard) ce ne sont plus les points  $O$  et  $O'$  qui sont en phase mais d'autres, par contre vis à vis des nouveaux points en phase la situation décrite est la même ( invariance par translation).

Notons bien la dépendance du phénomène par rapport à la position spatiale relative des observateurs, leur distance jouant le rôle d'un « potentiel » quand on utilise une interprétation utilisant le principe d'équivalence.. Cet aspect, pas intuitif du tout, sera explicité.

Mais comme nous pouvons nous en douter en RR, une distance, en fait un intervalle d'espace-temps de type espace, n'a pas un caractère absolu de type « espace ». Selon les référentiels elle aura un caractère espace, temps ou mixte. En particulier dans le référentiel propre des fusées cette distance est de type temps et est perçue comme un retard ou une avance!

Ceci c'est pour les systèmes galiléens où la vitesse entre les deux référentiels inertiels est constante, donc le rapport entre les fréquences des horloges constant.

### ***Cas de référentiels non galiléens.***

Mais dans notre cas cela paraît encore plus compliqué, car aucun des deux référentiel n'est galiléen, la vitesse entre référentiels varie en permanence<sup>32</sup>.

Lorsque le temps s'écoule, la nouvelle situation ne se déduit pas seulement par translation de la précédente, car au décalage de phase, il faut ajouter un autre effet de variation de fréquence de paramètre variable.

On comprend alors que comme notre analyse l'a montrée qu'il peut être impossible de synchroniser (avec la méthode d'Einstein) les référentiels co-mobiles des fusées.

Mais cette variation de fréquence est un nouveau degré de liberté et on peut se demander s'il peut être ajusté de façon « corriger » le défaut de simultanéité. Nous verrons au chapitre 7 que c'est le cas et qu'il existe une configuration des accélérations qui permet à deux trajectoires non inertielles différentes de rester synchronisées au sens de la RR.

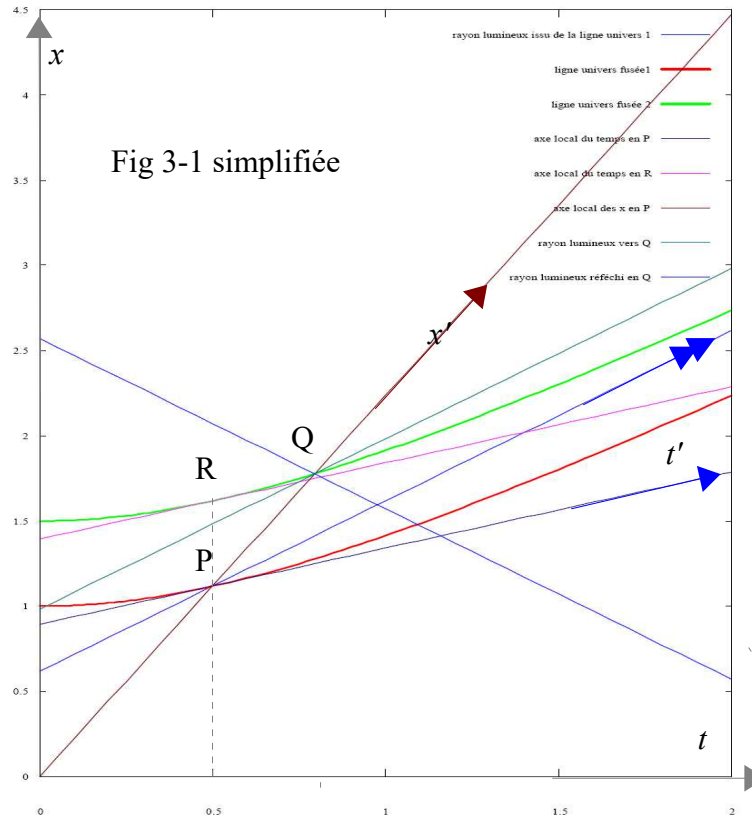
Ceci traduit une propriété structurelle de l'espace-temps de Minkowski qui est évidente, une fois encore sur la représentation utilisant une rotation de Wick.

---

<sup>32</sup> Ce critère seul n'est pas déterminant, comme nous le verrons ultérieurement.

### 5 Equivalence retard distance.

Dans son paradoxe, Bell impose que dans le référentiel du laboratoire la distance « propre » reste constante. Aussi, en simplifiant la fig. 3-,1 ne devrions nous pas nous intéresser au segment *PR* plutôt qu'au segment *PQ*? Si *v* est la vitesse de la fusée 1 en *P*,  $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$  pour le segment *PR*.



Dans le référentiel de la fusée poursuivante la distance *PR* n'est pas la distance propre entre les fusées (*R* n'est pas sur l'axe local *x'*), les évènements « la fusée 1 est en *P* » et « la fusée 2 est en *R* » n'y sont pas simultanés: l'évènement « la fusée 2 est en *R* » est dans le passé de l'évènement « la fusée 1 en *P* » puisque comme nous le voyons sur la figure 3-1 dans ce référentiel  $t'(R) < 0$ . Du point de vue de la fusée 1, la fusée 2 avait une vitesse égale à la sienne dans le passé, comme elle accélère continuellement sa vitesse présente est supérieure (ce qui cohérent avec la phénoménologie analysée puisque cela veut dire que à l'instant présent pour la fusée 1 la distance a augmenté).

Calculons la valeur des coordonnées  $t'(R)$  et  $x'(R)$  dans le référentiel de la fusée poursuivante:

$$s^2 = [x(R) - x(P)]^2 = d^2 = -t'(R)^2 + x'(R)^2, \text{ car } t'(P) = x'(P) = 0 \text{ et } t(P) = t(R) \text{ avec: } x'(R) = \gamma \cdot d$$

$$\text{soit } [t'(R)]^2 = \gamma^2 d^2 - d^2 = d^2(\gamma^2 - 1) = d^2 v^2 \gamma^2 \text{ soit } t'(R) = d v \gamma; (\text{avec } c=1) \text{ soit en fait: } t'(R) = d \gamma v / c^2.$$

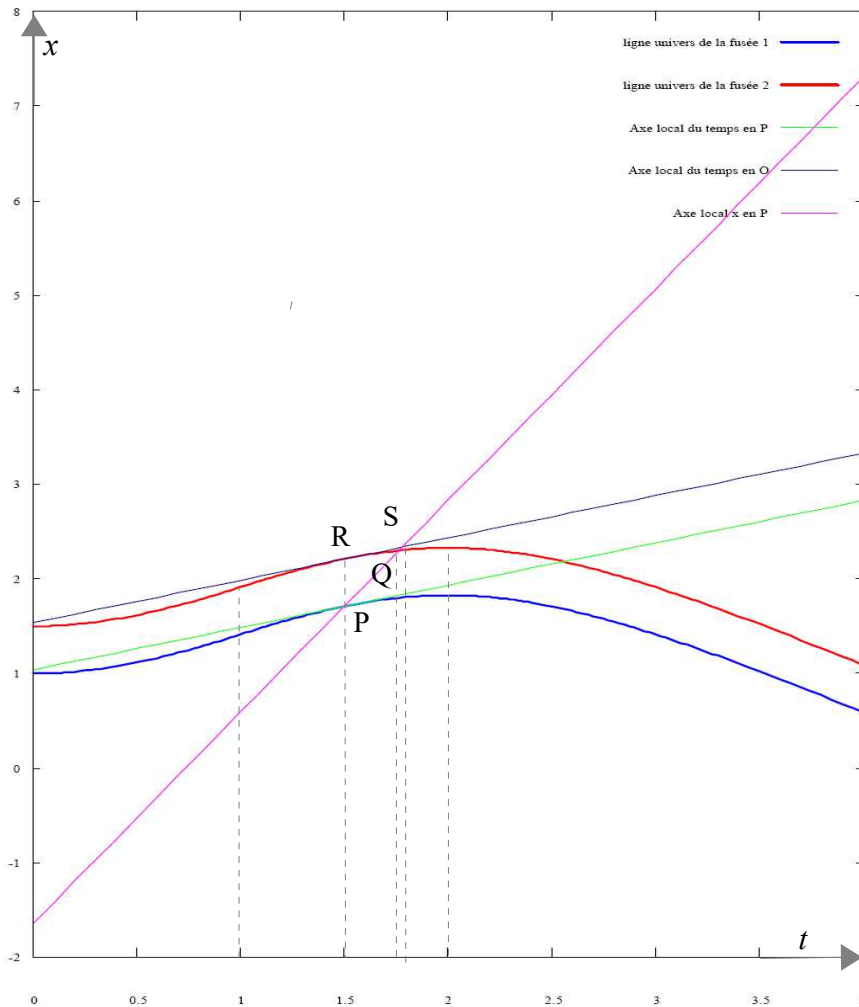
$t'(R)$  est le retard de la fusée 2 dans le référentiel de la fusée 1 en *P*. Il est proportionnel à *d* et tend vers l'infini lorsque *v* tend vers 1, ce qui se produit lorsque *t* tend vers l'infini (l'accélération propre est constante), ceci est attesté par la géométrie de la figure 3-1, l'angle des axes *x',t'* tendant vers zéro. Nous retrouverons ce résultat lorsque nous étudierons la variante avec fin en vol inertiel.

Notons que  $x'(R)$  n'est pas une distance propre, car le segment de droite *PR* n'est pas une ligne de simultanéité. En fait l'une ou l'autre méthode vont conduire aux mêmes conclusions, mais cette méthode ci caractérise mieux la phénoménologie correspondant au problème posé.

### 4- Cas où les fusées décèlèrent.

Nous avons analysé le cas des fusées qui accélèrent. Il est naturel d'analyser le cas où après une phase d'accélération (qui fait que les fusées s'éloignent de plus en plus vite du référentiel de départ) elles décèlèrent. Il est certain que à partir de la position de départ, au repos, la notion de décèlération n'a guère de signification. Simplement c'est la direction initiale de l'accélération qui change (condition initiale). Mais pendant l'accélération nous pouvons arrêter le moteur ou renverser la poussée toutes choses égales par ailleurs. Ceci va inverser le sens du vecteur accélération. Précisons bien la définition que nous donnons de l'accélération et inversement de la décèlération. Accélération signifie que la composante spatiale du vecteur accélération pointe vers les  $x$  croissants du référentiel de départ (le laboratoire). Pour la décèlération c'est l'opposé.

Par rapport à la description générale de la fig.2, sans que nuise à la généralité du problème) nous avons sauté la phase inertielle que nous décrirons en détail au chapitre suivant. Nous utiliserons la similitude (on fait l'opposé) avec le cas des fusées qui accélèrent pour alléger la présentation.



**Fig 4-1 [7]:** Diagramme représentant les lignes d'univers des fusées 1 et 2 conformément au scénario énoncé. Nous voyons la zone accélérée déjà décrite au chapitre 3 jusqu'à  $t = 1$  et la partie décélérée que nous allons considérer. En  $P (t = 1,5)$  sur la ligne d'univers de la fusée 1 nous avons tracé les axes locaux  $t', x'$  du référentiel co-mobile. Nous avons représenté les points  $P, Q, R, S$



significatifs. Considérons le diagramme de Minkowski représenté sur la figure 4-1 qui inclut des lignes d'univers où les astronautes après avoir accéléré avec la même accélération propre constante (mesurée par un accéléromètre embarqué) renversent la poussée de leur moteur après un même temps propre convenu à l'avance mesurée par leurs horloges atomiques embarquées. ( $t = 1$ ) dans l'exemple. Choisissons un point  $P$  tel qu'on ait pas à traiter les problèmes transitoires entre la zone d'accélération et celle de décélération. Faisons le même type d'analyse que celle du chapitre 3. Commençons par le point de vue de la fusée poursuivante. Faisons un zoom sur la partie qui nous intéresse contenant  $P, Q, R, S$  ( $1.4 < t < 2$ ).

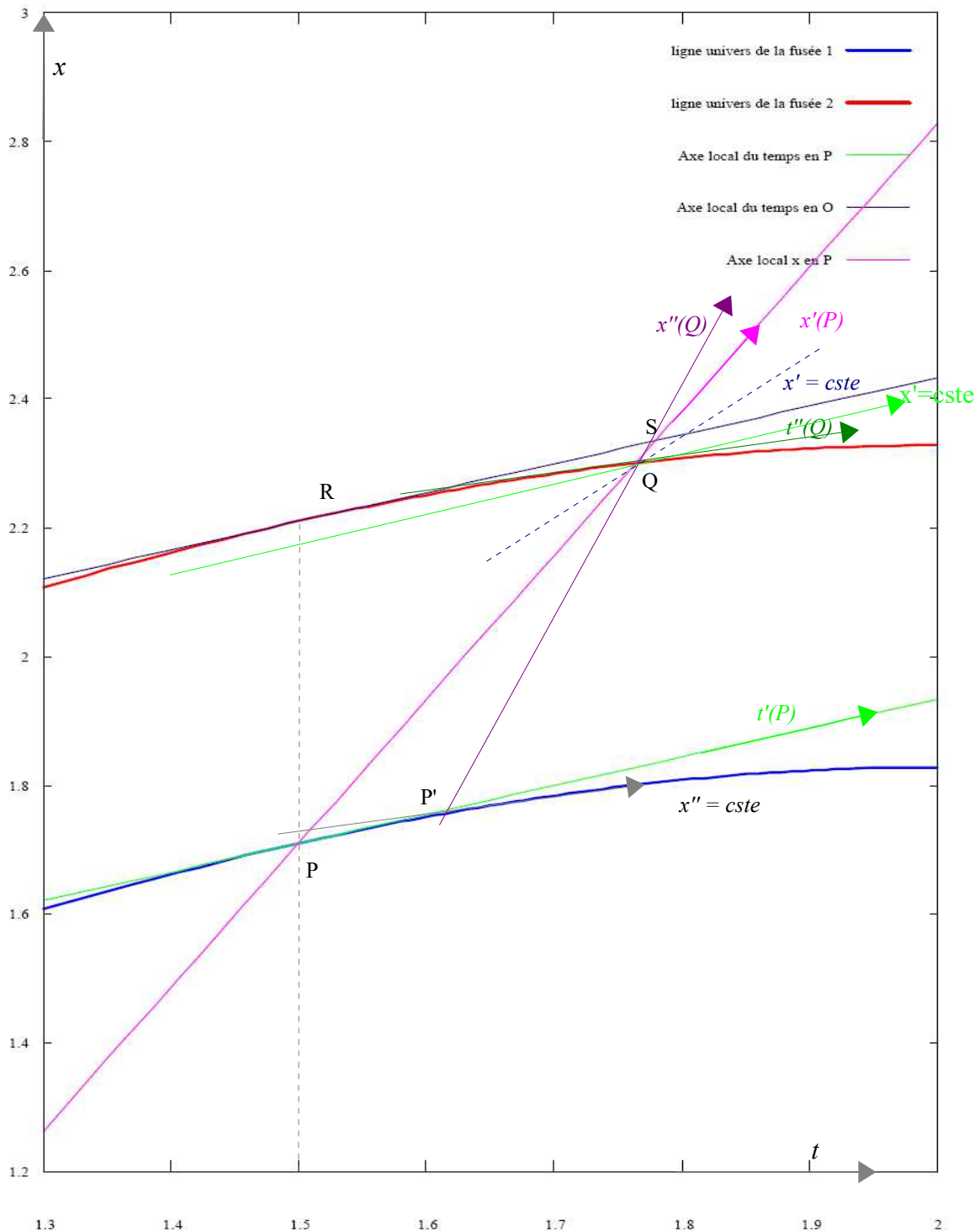


Fig.4-2 [7]: Zoom de la région  $t = 1.4, t = 2$  du précédent diagramme.

Toute ligne verticale  $t = \text{constante}$  coupe les deux courbes en deux points d'ordonnée  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_2 - x_1 = d$ . Les deux fusées maintiennent leur distance constante dans le référentiel du laboratoire. Soit un point  $P$  sur la courbe inférieure, traçons les coordonnées locales de Minkowski en  $P$  comme nous l'avons défini. L'axe des  $x'$  va couper les deux courbes en deux points ( $P$  et  $Q$ ).

## 1 Le point de vue de la fusée 1

La distance  $x'$  entre les fusées est en fait légèrement inférieure à  $\gamma d$ . Nous pouvons le voir par la construction géométrique suivante sur la fig.4-2. Rappelons que  $P$  est un point sur la courbe inférieure et que l'axe  $t'$  en  $P$  est tangent à cette courbe. Traçons une droite verticale (à  $t = t_1$ ) en  $P$ , cette droite coupe la courbe supérieure en  $R$ . Traçons une droite parallèle à l'axe  $t'$  en  $R$  (une droite de la forme  $x' = \text{constante}$ ). L'axe  $x'$  coupe les deux droites inclinées  $x' = 0$  et  $x' = \text{constante}$ , aux coordonnées  $x' = 0$  ( $P$ ) et  $x' = \gamma d$  ( $S$ ), respectivement. Comme la droite  $x' = \text{constante}$  en  $R$  est tangente à la courbe supérieure (ligne d'univers de la fusée 2) en  $R$ , compte tenu de la courbure, la tangente est « au dessus » de la courbe, l'axe  $x'$  va couper la courbe supérieure en  $x' < \gamma d$ .

La vitesse relative de la fusée 2 dans le référentiel de la fusée 1 est négative. En effet la tangente à la courbe supérieure en  $Q$  est en dessous (vers les  $x'$  décroissants) de la droite verte  $x' = \text{cste}$  passant par  $Q$ . Cela résulte de la courbure ( $d^2x/dt^2 < 0$ ) des lignes d'univers dans ce cas.

L'observateur dans la fusée voit l'autre fusée se rapprocher de lui. Si  $d$  est petit par rapport à  $\gamma$ , alors en faisant le développement en série comme en 3-2-2, on pourrait montrer que  $\gamma d$  est l'approximation au premier ordre de la distance  $D$  entre les fusées.

Ce cas est le cas symétrique du cas où les fusées accélèrent. La phénoménologie est symétrique, les conclusions qu'on en tire sont donc symétriques pour les mêmes raisons que nous avons invoquées précédemment, mais appliquées au cas inverse.

Les observateurs dans la fusée poursuivante au repos dans leur référentiel voient la fusée poursuivie se rapprocher. C'est toujours une conséquence du défaut de simultanéité dans ce type de situation.

## 2 Le point de vue de la fusée 2.

Nous nous sommes placé du point de vue de la fusée 1, nous pourrions nous placer du point de vue de la fusée 2. Le même raisonnement que celui fait précédemment dans le cas où les fusées accélèrent nous conduirait à conclure que du point de vue de la fusée 2 (poursuivie) la distance avec la fusée 1 (poursuivante) diminue (elle se rapproche) même si la phénoménologie n'est pas totalement identique (retard, distances qui diminuent ne sont pas les mêmes). Nous reviendrons sur ce point. Nous ne referons pas l'étude détaillée. De même nous ne recalculerons pas la distance, la vitesse l'accélération. Le modèle que nous avons établi reste valable et pourrait être utilisé si cela était utile.

## 3 La phénoménologie observée par les deux fusées est cohérente

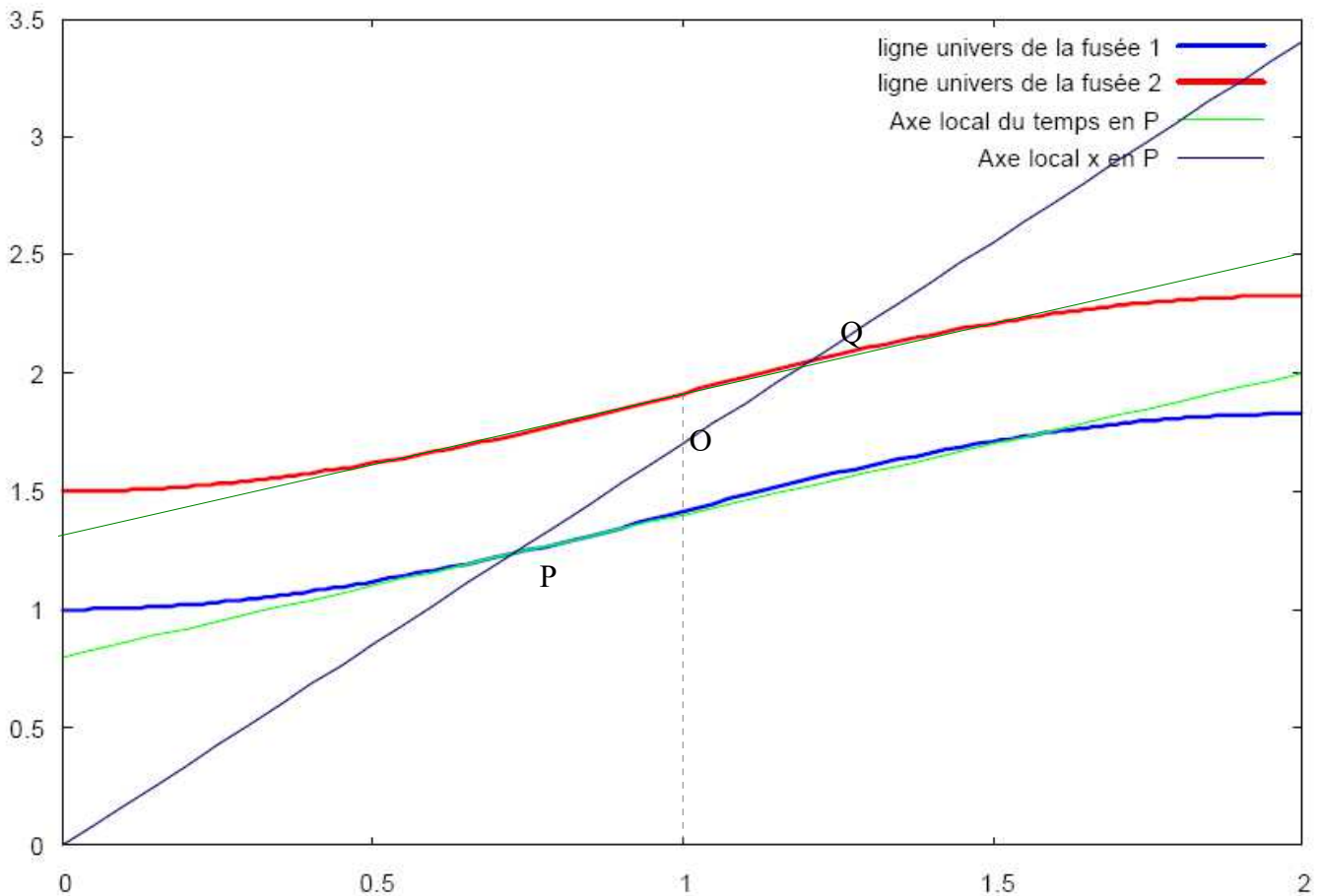
La distance diminue du point de vue des deux observateurs, mais cette distance n'est pas la même comme pour le cas de l'accélération dont c'est l'opposé.

Les deux fusées subissant des décélérations constante et égales, chacune dans leur propre référentiel, ont une décélération égale mais pas constante dans le référentiel du laboratoire. Cette décélération n'est pas égale du point de vue des observateurs dans les fusées.

Le laboratoire voit les fusées toujours à une distance constante, mais pas les observateurs des fusées du fait du défaut de simultanéité entre référentiels en RR.

#### 4 La zone de transition entre accélération et décélération

Avant de conclure ce chapitre soulignons que nous n'avons pas analysé les régions de « transit » entre accélération et décélération situées autour de  $t = 1$ , temps du renversement de poussée sur la fig.4-1. Il n'y a pas de difficulté particulière la situation évoluant continûment passant par un point d'équilibre où la ligne de simultanéité doit être commune aux deux référentiels.<sup>33</sup>



**Figure 4-3 [7]:** Zone de transition entre accélération et décélération.

Ce point peut être calculé en égalant les équations de l'axe  $x'$  pour  $0 < t < 1$  pour la fusée 1 et l'axe  $x''$  pour  $1 < t < 2$  pour la fusée 2. Soit  $P$  ce point sur la ligne d'univers de la fusée 1, et soit  $Q$  ce point sur la ligne d'univers de la fusée 2.

<sup>33</sup> Notons une propriété intéressante d'une hyperbole définie par l'équation  $x = (t^2+1)^{1/2}$ , l'axe des  $x'$  (droite de simultanéité) en tout point  $P$  de la courbe passe par l'origine ( $x = 0, t = 0$ ). C'est une propriété géométrique des hyperboles d'équation  $x = (t^2+k^2)^{1/2}$  comme nous le démontrerons plus loin.

L'équation de l'axe  $x'$  à  $t_0, 0 < t_0 < 1$ , est:  $x' = (1+t_0^2)^{1/2} t/t_0$

L'équation de l'axe  $x''$  à  $t_1, 1 < t_1 < 2$ , est:  $x'' = (1+(t_1-2)^2)^{1/2} t/(2-t_1) + b$

Le problème est symétrique autour de  $t=1$ , alors  $t_0 = 1 - t_2$ , et  $t_1 = 1 + t_2$ , comme nous allons vérifier:

$$(1+(1-t_2)^2)^{1/2}/(1-t_2) = (1+(t_2-1)^2)^{1/2}/(1-t_2)$$

Par raison de symétrie (autour de  $O$  milieu du segment de verticale entre les deux lignes d'univers pour  $t=1$ ) la droite recherchée doit satisfaire:

$$(1+t_0^2)^{1/2}/t_0 = (2)^{1/2} + 0.25, (1+t_0^2)/t_0^2 = [(2)^{1/2} + 0.25]^2 \approx 2,7696068 \quad t_0 = \{[(2)^{1/2} + 0.25]^2 - 1\}^{-1/2} \approx 0.7517295 \approx 1 - 0.248.$$

Donc les coordonnées de  $P(t_0, x)$  sont  $(0.752, 1.28)$

L'axe  $x'$  en  $P$  coupe la ligne d'univers de la fusée 2 pour  $t_1 = 1 + 0.248 = 1.248$ .

L'équation de la ligne d'univers de la fusée 2 pour cette partie de la courbe est:

$$x = 2.(2)^{1/2} + 0.5 - (1+(t-2)^2)^{1/2}$$

$t_1 = 1.248$  donne  $x = 2.08$ , donc le point  $Q$  a les coordonnées  $(1.248, 2.08)$

Vérifions que ce point est sur  $x'(P)$  défini par  $x' = ((1+t_0^2)^{1/2}).t/t_0$

alors pour  $t = 1.248, x'(P) \approx 2.08$ .

Les points  $P$  et  $Q$  sont les points d'inflexion de la synchronisation. En ces points la fusée 1 et la fusée 2 ont une ligne de synchronisation commune et s'accordent sur la simultanéité des événements en particulier sur la distance qui les sépare. En fait chacun au repos dans son référentiel co-mobile voit également l'autre au repos dans ce référentiel.

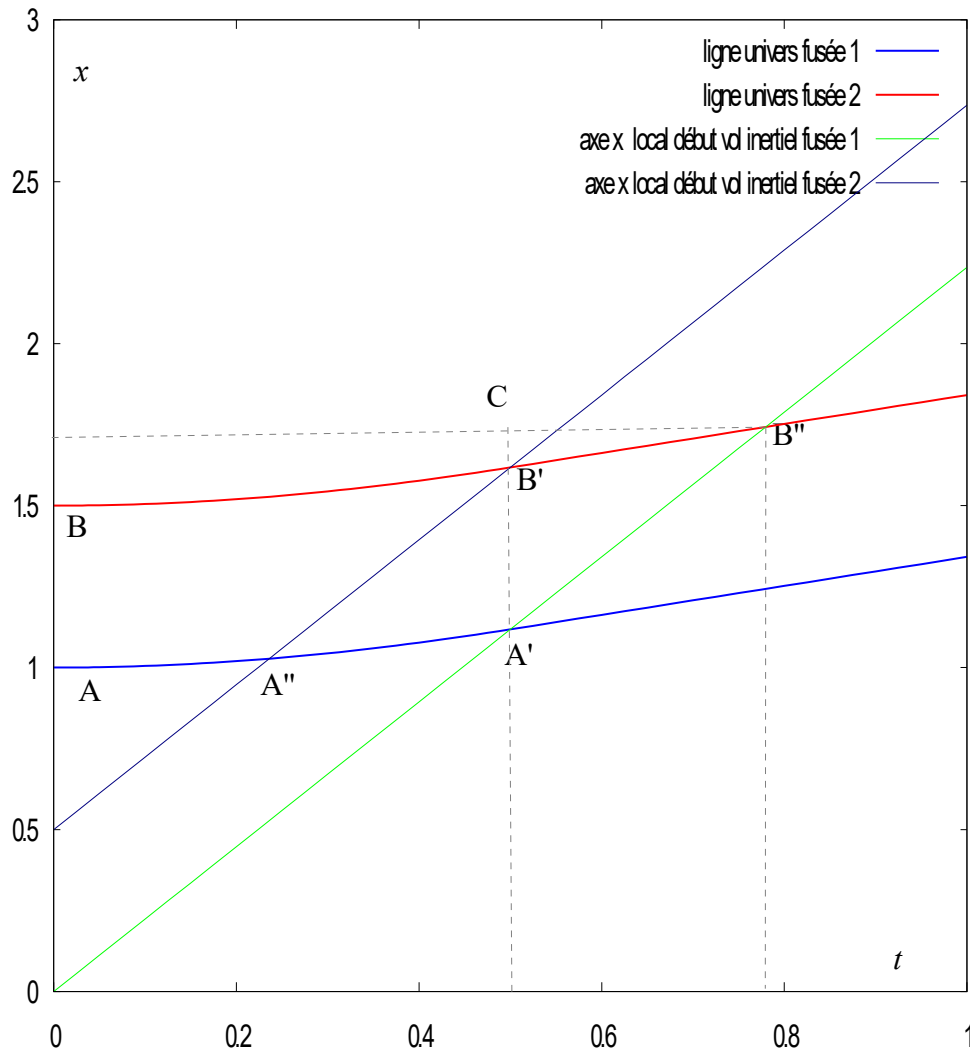
## 5- Que se passe t'il si on coupe les moteurs « simultanément »?

Nous avons vu que pendant des phases d'accélération, comme nous n'avons pas de référentiel commun il était impossible (en RR) de parler de distance « propre » entre les fusées. Ceci nous suggère de se demander ce qui se passe si après une phase d'accélération égale (en module et en temps propre) les deux astronautes coupent leurs moteurs et se retrouvent de facto en vol inertiel, où nous allons pouvoir utiliser la machinerie standard de la RR. Dans l'analyse qui suit <sup>34</sup> nous traiterons les vaisseaux comme des points.

Le voyage commence donc par une phase d'accélération comme celle qui a été décrite au chapitre précédent, puis au bout d'un temps propre convenu à l'avance chaque astronaute coupe son moteur pour se retrouver en vol inertiel. Ceci est écrit sur le diagramme de Minkowski de la figure 5-1.

<sup>34</sup> Dewan semble être le premier dans [4] à avoir introduit cette variante pour expliquer entre autres le décalage de « phase » (retard) entre le point de vue des deux observateurs .

D



Le segment spatial  $A'B''$  ( $D$ ) est-il plus long que le segment spatial  $AB$  ( $d$ )? Remarquons que la droite bleue en trait fin est la ligne de simultanéité de l'observateur  $B$  en  $B'$ , mais que nous ne pouvons pas l'utiliser car comme nous le voyons sur la fig. 4, cette ligne coupe la ligne d'univers de  $A$  en un point où elle n'est pas inertielle. Ceci montre que alors que l'observateur  $A$  commence son vol inertiel en  $A'$ ,  $B$  est déjà en vol inertiel dans le référentiel co-mobile de  $A$  puisqu'il a atteint  $B''$  et réciproquement quand  $B$  commence son vol inertiel en  $B'$ ,  $A$  est encore en phase d'accélération en  $A''$  dans le référentiel co-mobile de  $B$ .

Calculons la distance propre  $A'B''=D$ , en nous aidant de la figure 5-1.

Notons que au delà de  $A'$  et  $B''$  les référentiels correspondant aux lignes d'univers des fusées 1 et 2 sont globalement inertiels et sont confondus (Les deux fusées sont dans le même référentiel). Ce référentiel inertiel commun va nous permettre de calculer sans ambiguïté la distance  $A'B''$  qui est la distance propre dans ce référentiel commun. Ce référentiel inertiel galiléen commun est animé d'une vitesse  $v$  par rapport au référentiel global du laboratoire. Toutes les conditions sont réunies pour utiliser les formules de Lorentz.

$$D = A'B'' = \gamma \cdot A'B' = \gamma \cdot AB = \gamma \cdot d$$

Pour ceux qui en douteraient nous pouvons calculer le  $s^2$  de la RR de  $A'B''$  ( $s^2 = -t'^2 + x'^2 = -t'^2 + x'^2 = x'^2$  quand  $t' = 0$ ). Comme c'est un invariant de la RR, on peut le calculer dans les coordonnées qu'on veut, ici nous choisissons  $(t, x)$ .

L'approche classique consiste à traiter le problème en géométrie analytique, mais quelques propriétés géométriques sur la fig. 5-1 permettent une démonstration très simple.

D'abord notons que la pente de la droite  $A'B''$  vaut  $1/v$ , car cette droite, axe des  $x'$ , est symétrique par rapport aux rayon lumineux (dont la pente vaut  $1$ ) de l'axe  $t'$  dont la pente vaut  $v$ .

Nous pouvons écrire les relations suivantes:

$$A'C = CB''/v \tag{1}$$

$$B'C = CB'' \cdot v \tag{2}$$

$$B'C = A'C - A'B' = A'C - d. \tag{3}$$

Calculons la longueur ( $s^2$ ) de Minkowski de  $A'B''$  avec  $t = CB''$  et  $x = A'C$  en utilisant (1):

$$(A'B'')^2 = - (CB'')^2 + (A'C)^2 = - (CB'')^2(-1 + 1/v^2) = - (CB'')^2[(1 - v^2)/v^2] \tag{4}$$

Les relations (2), (3) nous permettent de calculer  $CB''$

$$B'C = CB'' \cdot v = CB''/v - d \rightarrow CB''(1/v - v) = d \rightarrow CB'' = d [v/(1-v^2)]$$

En reportant dans (4), on obtient:

$$(A'B'')^2 = [v^2 d^2 / (1-v^2)^2] \cdot [(1-v^2) / v^2] = d^2 \cdot (1-v^2) \text{ soit } A'B'' = d \cdot (1-v^2)^{-1/2}.$$

Comme  $A'B''$  est porté par l'axe  $x'$  du référentiel co-mobile des observateurs des fusées, c'est bien la longueur propre dans le référentiel des fusées, on retrouve bien le résultat prédit.

On peut utiliser d'autres méthodes, je l'ai fait en annexe 7, utiliser la méthode (rustique mais fondamentale) du radar ou tout autre méthode, nous trouverons toujours les mêmes résultats, ces méthodes étant équivalentes, l'espace-temps de Minkowski étant ce qu'il est!

Fort de ce résultat, comme la mesure d'une distance dans son référentiel propre possède un caractère physique que nous disposons de ces mesures ( $AB$ ) avant le décollage (le référentiel propre était celui du laboratoire et ensuite en vol inertiel sur le segment  $A'B''$  nous pouvons affirmer que l'allongement de la distance est physique. S'il avait une corde elle aurait subi des contraintes <sup>35</sup>.

Pour analyser ceci, il est instructif de s'intéresser à la phase transitoire où les deux fusées ne sont pas du moins de leur point vue toutes les deux en vol inertiel, cela nous permettra de mieux cerner cette phénoménologie, car comme nous l'avons vu, quand la fusée 2 commence son en vol inertiel en  $B'$ , sur sa ligne de simultanéité, la fusée 1 est encore en phase d'accélération, ne passant en vol inertiel que quand  $B$  est en  $B''$ .

<sup>35</sup> Elle subit des contraintes, mais nous n'avons pas dit qu'elle cassait. Nous reparlerons de ce point plus tard.

Ceci indique que de son point de vue, la fusée 2 atteint sa vitesse maximum avant la fusée 1 et comme elle est devant la distance entre les fusées va s'accroître car jusqu'en B'' son poursuivant navigue à une vitesse inférieure. Calculons cela du point de vue de la fusée 2.

Lorsque dans son référentiel la fusée poursuivie voit la fusée poursuivante commencer son vol inertiel, son temps propre de navigation est supérieur à celui de la fusée poursuivante puisque aux parties accélérées (égales du point de vue des observateurs dans les fusées) il faut rajouter le temps propre de vol inertiel  $B'B''$  qui vaut:

$$\tau(B'B'') = B''C/\gamma = d [v/(1-v^2)] \cdot (1-v^2)^{1/2} = d \cdot v(1-v^2)^{-1/2} = d \cdot \gamma \text{ (avec } c=1) \text{ en fait: } \tau(B'B'') = d \cdot \gamma \cdot v/c^2$$

Nous voyons que ceci représente un temps égal à la distance initiale entre les fusées multiplié par  $v/c^2$  et affecté du facteur de Lorentz  $\gamma$ . C'est le temps propre que mettrait la fusée 2 pour rejoindre la fusée 1 dans leur référentiel devenu commun, (se synchroniser à nouveau) autrement dit c'est le temps propre qui correspond à l'« avance » (elle est devant) qu'elle doit avoir dans ce référentiel pour être synchrone du poursuivant.<sup>36</sup>

Leur reprise de synchronisation (qui va perdurer) se fait dans cette situation, une fusée a volé plus longtemps que l'autre alors qu'elles ont les mêmes paramètres de vol!

Autrement dit les horloges internes des deux vaisseaux qui étaient synchronisées au départ (elles marquaient la même heure) sont désynchronisées à la fin du vol inertiel. Certes elle battent toutes deux au même rythme dans le référentiel final ce rythme étant égal à celui du référentiel de départ puisque ces référentiels sont inertiels mais il y a eu un glissement relatif de phase des horloges pendant le vol non inertiel. C'est ce vol non inertiel qui a modifié le référentiel inertiel des fusées par rapport aux autres en particulier celui du laboratoire.

Le retard de l'horloge de la fusée poursuivie est donné par le temps propre  $B'B'' = d \cdot \gamma \cdot v$ .

Ceci est équivalent (une autre manifestation du même phénomène) à l'augmentation de la distance propre entre les deux fusées, liée la procédure de synchronisation des horloges dans un référentiel inertiel.

On pourrait aussi faire ce calcul du point de vue de la fusée 1, mais nous avons vu que ces points de vue sont cohérents et cela n'apporterait pas grand chose.

Cette phénoménologie reflète bien le fait que la distance s'accroisse physiquement et cette reprise de synchronisation traduit la structure de l'espace de Minkowski vis à vis de lignes d'univers accélérées. Une transformation par une rotation de Wick, qui montre clairement comment les fusées s'écartent l'une de l'autre, de plus en plus, rend intuitive et confirme cette approche (voir chap. 11).

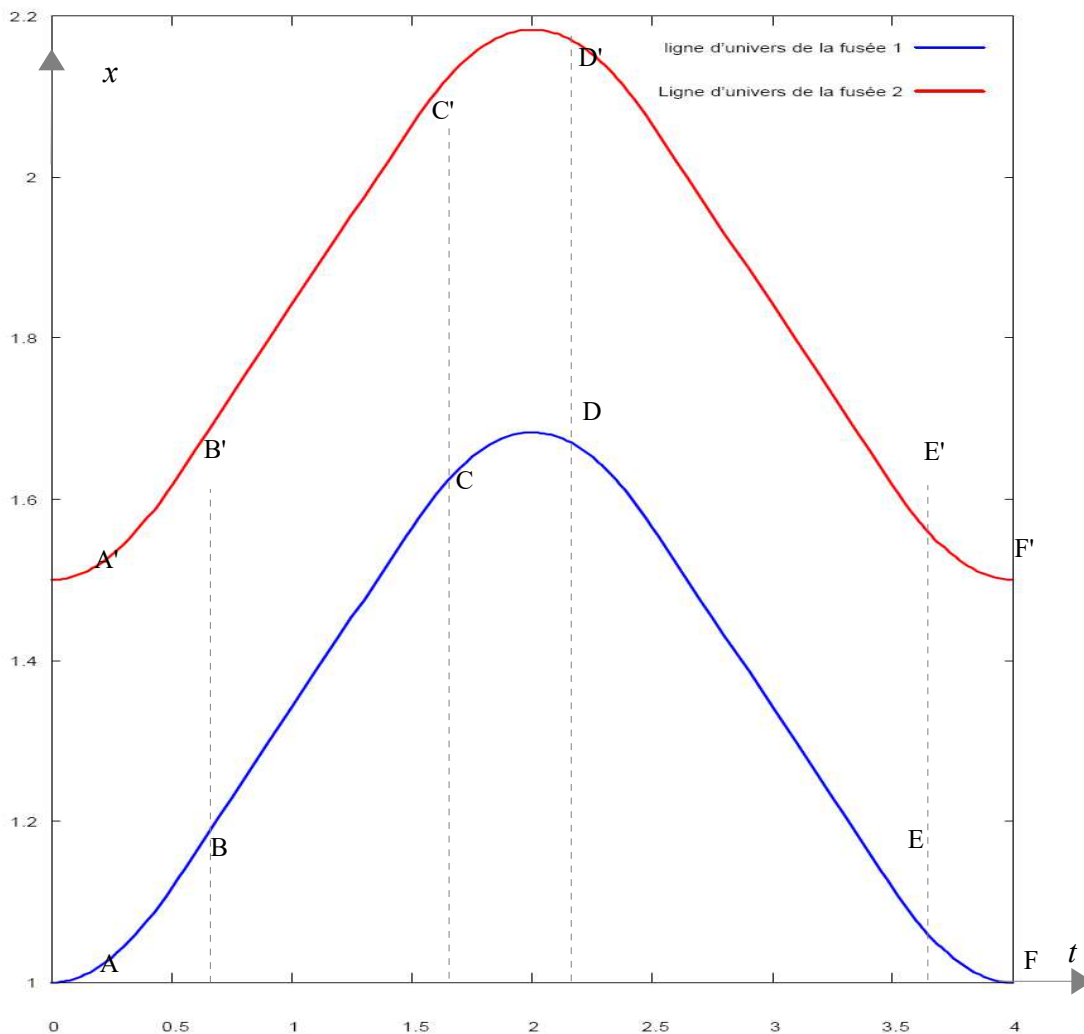
## 6- Cas d'une boucle enchaînant accélération et décélération

Ayant étudié le cas des fusées qui accélèrent, le cas opposé des fusées qui décélèrent et le vol inertiel, il est naturel d'étudier un enchaînement des trois. Sur le diagramme suivant (fig.6-1) nous avons représenté une combinaison des lignes d'univers précédemment étudiées.

<sup>36</sup> Nous l'avions noté au § 3-5, il est plus physique de raisonner en termes de retard que de distance!

Nous décrivons ici les lignes d'univers de deux fusées initialement en deux endroits séparés d'une distance  $d$  dans un référentiel inertiel commun (le laboratoire) décollant simultanément au sens du laboratoire et soumis à une même accélération propre constante.

Au bout d'un temps propre convenu les fusées arrêtent leur moteur pour passer en vol inertiel. Ils rallument leur moteurs en renversant la poussée après un même temps propre convenu de façon à ce que l'accroissement de distance ralentisse jusqu'à un point  $D$  où la vitesse par rapport au laboratoire s'annule et où les fusées se rapprochent maintenant du laboratoire en accélérant. La ligne d'univers est complétée pour obtenir une boucle symétrique par rapport à  $D$ .



**Fig.6-1 [7]:** Ligne d'univers fermée.

Calculons la longueur de Minkowski ( $s$ ) des différentes parties de la ligne d'univers de la fusée 1.

Segment AB (longueur d'un arc d'hyperbole): De  $x = (t^2+1)^{1/2} \rightarrow dx = t.dt/(t^2+1)^{1/2}$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 [1 - t^2/(1+t^2)] = dt^2 (1/(1+t^2)) \rightarrow ds = [1/(1+t^2)]^{1/2}.dt$$

en posant:  $t = \sinh \alpha \rightarrow \alpha = \operatorname{argsinh}(t)$  ,  $\alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_0)$ ,  $\alpha_1 = \operatorname{argsinh}(t_1)$  et

$$ds = [1/(1+\sinh^2(\alpha))]^{1/2} = [1/\cosh^2(\alpha)]^{1/2} = 1/\cosh(\alpha).$$



Comme  $dt = \cosh(\alpha) \cdot d\alpha$ ,  $ds = [1/\cosh(\alpha)]\cosh(\alpha) \cdot d\alpha = d\alpha$ .

Alors  $s = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_1) - \operatorname{argsinh}(t_0)$  Dans notre exemple nous obtenons:

$$\operatorname{argsinh}(0.5) - \operatorname{argsinh}(0) = \operatorname{argsinh}(0.5) = 0.481212 \quad \text{car} \quad \operatorname{argsinh}(0) = 0.$$

Sur la partie rectiligne (AB) de la ligne d'univers le calcul de s est trivial:  $ds^2 = dt^2 - v^2 \cdot dt^2$

$$\text{avec } v = t(1+t^2)^{-1/2} = 0.5[1+(0.5)^2]^{-1/2} = 0.5/(1.25)^{1/2} \quad ds^2 = dt^2(1 - 0.25/1.25) = (1/1.25)dt^2 \rightarrow ds = (1/1.25)^{1/2} \cdot dt \rightarrow s = (1/1.25)^{1/2} \int_{0.5}^{1.5} dt = (1/1.25)^{1/2}$$

Calculons maintenant la partie CD.

Sur le diagramme il est clair quelle est symétrique de AB (si nous considérons que D, au repos dans le référentiel du laboratoire, est l'origine et qu'on progresse vers la gauche). L'intervalle d'espace-temps (s) ne dépend pas du signe de t. Et toutes les autres parties se ramènent à une des deux parties que nous avons calculées.

$$\text{Donc le résultat final s'établit à: } \tau_{\text{rocket}} = 4(0.481212) + 2(0.8944272) = 3.7137024$$

Le temps écoulé dans le laboratoire vaut 4. Ceci montre bien que les observateurs dans les fusées sont plus jeunes que leurs collègues restés dans le laboratoire.

Nous obtiendrions le même résultat pour la fusée 2, les équations des lignes d'univers ne diffèrent que par une constante additive qui s'élimine lors des opérations (dérivées).

## 7- Cas d'accélération différentes maintenant une distance constante entre les référentiels co-mobiles <sup>37</sup>

Notre analyse du défaut de simultanéité au chapitre 3-2 et 3-4 et plus particulièrement le § 3-4-2, nous suggère qu'il peut exister des trajectoires qui éliminent le défaut de simultanéité et permettent aux fusées de maintenir (de leur point de vue), une distance constante entre elles. Effectivement pour que la synchronisation soit respectée, il faut que la ligne de synchronisation des deux fusées soit commune. Comme une propriété de cette ligne de synchronisation est qu'elle passe par le point d'intersection des asymptotes comme nous allons le montrer, la contrainte est alors que les asymptotes des différentes lignes d'univers soient les mêmes (les points O et O' sur les figures 3-1 et 3-5 sont confondus). Ceci définit une famille d'hyperboles. Ceci est appuyé sur la représentation après une rotation de Wick (chapitre 11) des trajectoires uniformément accélérées, où la propriété est évidente. C'est cela que nous allons analyser ici.

### 1 Lignes d'univers accélérées

Nous gardons la même ligne d'univers pour la fusée 1 :  $x = (1 + t^2)^{1/2}$

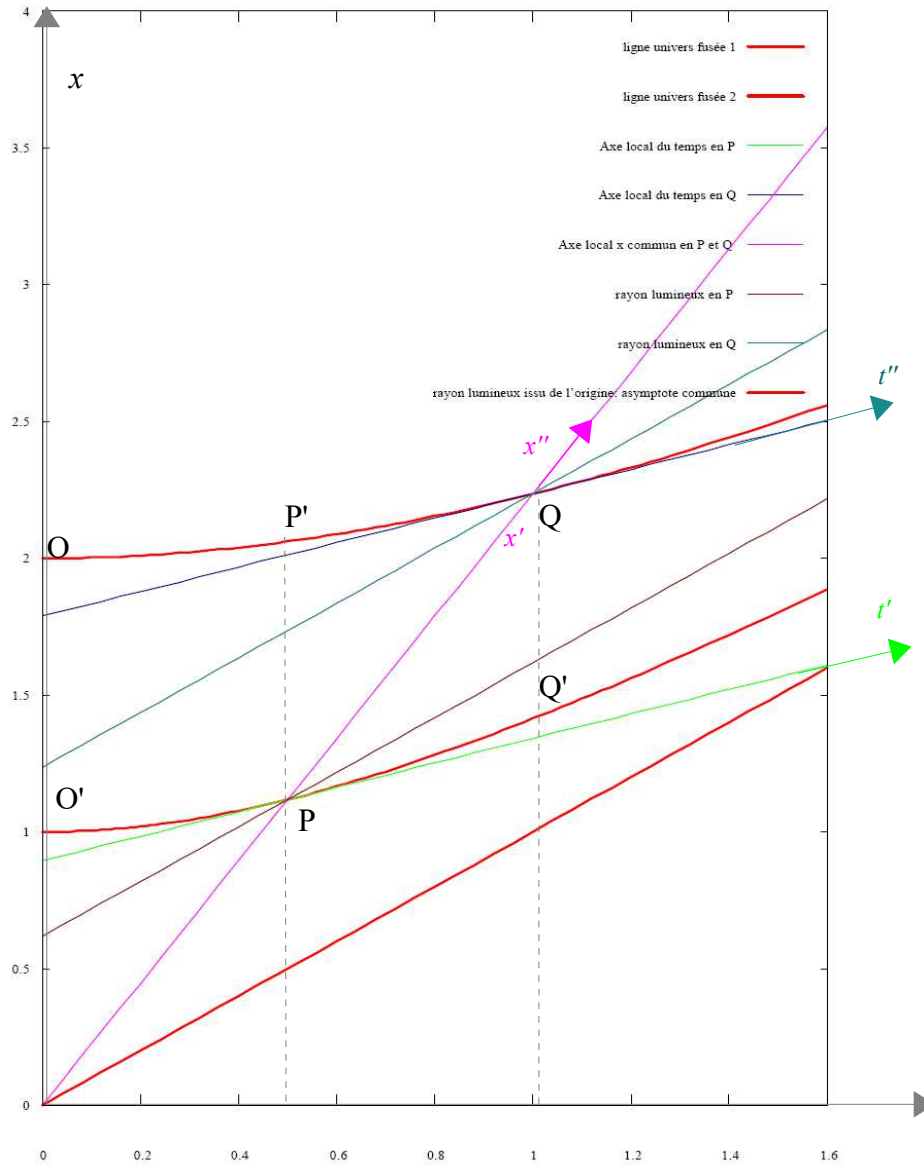
Définissons la celle de la fusée 2 par:  $x = (k^2 + t^2)^{1/2}, \quad k > 1. \quad (7.1)$

---

<sup>37</sup> Voir [16]

Notons que la première équation est un cas particulier de (7-1) qui correspond au cas  $k = 1$ .

Ces deux hyperboles ont les mêmes asymptotes, mais une « courbure » différente. Nous allons voir que comme une hyperbole représente la ligne d'univers de fusée uniformément accéléré cela va correspondre à des accélérations différentes.



**Fig.7-1[7]:** Distance constante entre lignes d'univers de la fusée poursuivante identique à celle cas précédent et celle de la fusée poursuivie définie par  $x = [k^2+t^2]^{1/2}$ , représentée par l'hyperbole supérieure tracée pour  $k = 2$ . L'asymptote commune aux deux hyperboles est la droite (rouge) d'équation  $x = t$ . En  $P$  nous avons représenté un rayon lumineux sortant (marron), l'axe des temps du référentiel co-mobile  $t'$  (en vert) et l'axe des distances du référentiel co-mobile  $x'$  (magenta) symétrique de l'axe  $t'$  par rapport au rayon lumineux.

En  $Q$ , nous avons représenté un rayon lumineux sortant (bleu marine) l'axe des temps du référentiel co-mobile  $t''$  (en turquoise) et l'axe des distance du référentiel co-mobile  $x''$  (magenta) symétrique de l'axe  $t''$  par rapport au rayon lumineux.

Nous voyons les axes  $x'$  et  $x''$  sont identiques et que les axes  $t'$  (en  $P$ ) et  $t''$  (en  $Q$ ) sont parallèles.

Ceci montre qu'il n'y a aucune vitesse relative entre ces deux référentiels inertiels locaux: les deux observateurs dans les fusées mesurent bien, chacun dans leur référentiel propre, que la distance propre entre eux reste toujours la même et reste égale à la distance de départ.

Cependant les observateurs du référentiel du laboratoire mesurent que  $QQ' < PP' < OO'$ : La distance entre les fusées est sujette à la contraction de Lorentz, ce qui est conforme à la RR<sup>38</sup>, le référentiel local commun des fusées ayant une vitesse relative non uniforme par rapport au laboratoire.

***Montrons que la distance est constante dans le référentiel propre des fusées***

Montrons qu'une hyperbole définie par  $x = (k^2 + t^2)^{1/2}$  en coordonnées cartésiennes possédait la propriété géométrique suivante: L'axe  $x'$ , ligne de simultanéité issue d'un point  $P$  quelconque sur l'hyperbole, passe par l'origine ( $t = 0, x = 0$ ).

Démontrons le<sup>39</sup>. En dérivant (7.1) nous obtenons :  $dx/dt = t / (k^2 + t^2)^{1/2} = a$  (7-2)

En posant la pente de la courbe égale à  $a$ . L'axe des  $x'$  en tout point  $P$  sur la ligne d'univers définie par (7.1), est symétrique de l'axe des temps  $t'$ , par rapport à un rayon lumineux issu de  $P$  défini par l'équation  $x = t + b$  pour un rayon sortant ( $x = -t + c$ , pour un rayon entrant).

En conséquence la pente de l'axe  $x'$  en  $P$  vaut:  $1/a = (k^2 + t^2)^{1/2}/t$ .

L'équation générale de l'axe  $x'$  est alors:  $x = t/a + b$ ,

où  $b$  est l'ordonnée à l'origine pour  $t = 0$ .

Comme la valeur de  $x'$  en  $P$  vaut  $(k^2 + t^2)^{1/2}$ , nous avons:

$$x = (k^2 + t^2)^{1/2} = ((k^2 + t^2)^{1/2}/t) * t + b = (k^2 + t^2)^{1/2} + b \rightarrow b=0.$$

Nous avons démontré que l'axe  $x'$  (ligne de simultanéité issue en n'importe quel point  $P$  de l'hyperbole passe par l'origine ( $t = 0, x = 0$ ).

Ceci implique que l'axe  $x'$  en  $P$  sur la ligne d'univers de la fusée 1 (fusée poursuivante) définie par  $x = (1 + t^2)^{1/2}$  va couper la ligne d'univers de la fusée 2 (fusée poursuivie) en  $Q$ . Et comme en  $Q$ , l'axe  $x'$  passe aussi par ( $t = 0, x = 0$ ), les axes  $x'$  et  $x''$  sont confondus.

Comme en  $P$ , l'axe  $t'$  est symétrique de  $x'$  par rapport à un rayon lumineux ainsi que pour  $t''$  en  $Q$ , les axes  $t'$  et  $t''$  sont parallèles. Ceci montre que chaque observateur, au repos par définition dans son référentiel voit aussi l'autre au repos dans ce référentiel, donc la distance dans les référentiels propre ne peut pas varier.

***Le poursuivant n'atteint jamais le poursuivi.***

L'équation (7.1) définit une famille d'hyperboles ayant les mêmes asymptotes ( $x = \pm t$  quand  $t \rightarrow \infty$ ) avec un offset différent pour  $t = 0$ . Ces hyperboles ne peuvent pas avoir un point commun (se

38 La RR qui, rappelons le, donne le rapport entre la mesure d'une longueur dans son propre référentiel et sa mesure dans un référentiel inertielle différent

39 Cette propriété est immédiate sur le diagramme issu d'une transformation de Wick (cf chap.11)

couper) comme on le voit sur l'équation (7.1). Une même valeur de  $t$  donne toujours une valeur de  $x$  différente (pour les valeurs finies).

### ***Le laboratoire mesure une longueur subissant la contraction de Lorentz.***

Comme les hyperboles ne sont pas parallèles dans le diagramme cartésien de Minkowski ( $t, x$ ) la distance  $D$  mesurée sur une ligne à  $t = \text{constante}$  dépend de  $t$ . Cette variation est celle du facteur de Lorentz car le segment  $PQ$  est dans un référentiel inertiel du fait du parallélisme des axes  $t'$  des temps<sup>40</sup>, tangents aux lignes d'univers, (en tous ses points il est animé de la même vitesse  $v$  par rapport au laboratoire, nous l'avons montré pour deux points quelconques). Donc les formules de Lorentz s'appliquent.

### ***Les observateurs des fusées et l'observateur du laboratoire trouvent que la fusée poursuivante a une accélération supérieure à celle du poursuivi.<sup>41</sup>***

L'équation(7-2) montre que l'hyperbole intérieure (ligne d'univers de la fusée poursuivie) a une pente inférieure pour une valeur de  $t$  donnée à celle de la fusée poursuivante. Le calcul complet fait en annexe 4 montre que l'accélération constante vaut  $1$  pour la fusée 1 et  $1/k$  pour la fusée 2. Comme  $k > 1$ ,  $1/k < 1$ , l'accélération de la fusée poursuivie est inférieure.

Notons que cela donne le module de l'accélération (qui est un vecteur) et qu'on peut montrer que la direction est colinéaire de l'axe  $x'$  commun (ligne de simultanéité) et orienté vers les  $x$  croissants sur le diagramme. Cette démonstration est triviale en utilisant la rotation de Wick : accélération radiale centrale d'une trajectoire circulaire (chapitre 11-2-1).

### ***Commentaire sur cette phénoménologie « stationnaire » plutôt étrange.***

Il peut paraître bizarre que quand les deux fusées ont une accélération propre égale leur distance propre augmente (chacun voit l'autre s'éloigner de lui) et que quand la fusée poursuivante a une certaine accélération supérieure à l'autre leur distance propre reste constante (chacun voit l'autre au repos dans son référentiel propre local, à tout instant), caractérisant une situation « stationnaire ».

Par ailleurs nous avons déjà indiqué (chapitre 3-4-2) l'éventualité de synchronisation d'une infinité de points sur une infinité de lignes d'univers non inertielles et non identiques, alors qu'on est incapable de le faire ne serait ce que pour deux référentiels galiléens. Rappelons que nous avons un degré de liberté supplémentaire (l'accélération qui peut être différente) ce qui fait que ce problème est moins contraint que le cas purement inertiel.

En effet pour rester constante dans son propre référentiel le segment délimitant l'intervalle qui sépare les deux fusées doit être dynamique du point de vue du référentiel du laboratoire. Non seulement il est en mouvement dans le laboratoire, mais le mouvement de chacun de ses points est différent (mouvement non uniforme). Le laboratoire ne peut donc pas donner une valeur de longueur propre de cet intervalle en mouvement. En effet, le critère de simultanéité en RR implique que la mesure des distances propres en RR que cette mesure se fasse à temps (local) constant.

<sup>40</sup> Nous venons juste de montrer cette propriété pour toutes les hyperboles du type  $x = (t^2 + k^2)^{1/2}$ . Nous n'avons tracé que les hyperboles des extrémités mais cela aussi s'applique à l'infinité d'hyperboles entre elles.

<sup>41</sup> Voir annexe 4

L'annexe 1 rappelle comment ce critère de simultanéité est définie<sup>42</sup>. Cette solution sera explicitée et prendra tout son sens dans le chapitre que nous consacrerons à l'espace-temps de Rindler.

## 2 Lignes d'univers fermées

### *Accélération suivie de décélération*

Demandons nous ce qui arrive si nous réalisons une séquence d'accélération et de décélération (symétriques) de manière à réaliser une boucle fermée.

Dans cette solution les lignes d'univers sont les membres d'une famille à un paramètre ( $k$ ) d'hyperboles ayant les mêmes asymptotes. Ceci est différent du cas où les hyperboles étaient simplement translatées.

Rappelons aussi que l'accélération des fusées est différente à la fois dans leur référentiel propre et dans celui du laboratoire. Leur temps propre n'évolue pas de la même manière par rapport au temps du laboratoire, le scénario précédent (les fusées renversent la poussée après un temps propre écoulé identique) doit être reconsidéré.

Nous pouvons envisager différentes hypothèses pour ce scénario, nous sommes intéressé par une solution qui maintiendrait la distance constante pendant tout le voyage.

La géométrie de la solution (hyperboles imbriquées de mêmes asymptotes<sup>43</sup>) suggère que pour la décélération on inverse les rôles, vis à vis de l'accélération.

Comment raccorder les deux morceaux de lignes d'univers. La propriété que nous avons annoncée (distance constante) doit aussi être vraie à la jonction, l'axe  $x'$  commun (référentiel co-mobile) qui est la ligne de simultanéité. Ces considérations nous amènent à proposer alors la solution suivante.

Sur la fig.7.2 ci après, appelons  $A$  l'origine, prolongeons l'axe  $x'$  commun passant par  $A(0, 0)$ ,  $P(t_1, x_1)$  et  $Q(t_2, x_2)$ , vers la droite.

Il coupe une ligne verticale d'abscisse  $(t_1+t_2)$  en  $A'[t_0 = (t_1+t_2), x_0 = (x_1+x_2)]$ .

Le point  $A'$  va jouer le rôle de  $A$  pour les lignes d'univers en décélération (les asymptotes des ces hyperboles sont des droites orthogonales à  $45^\circ$  d'origine  $A'$ ).

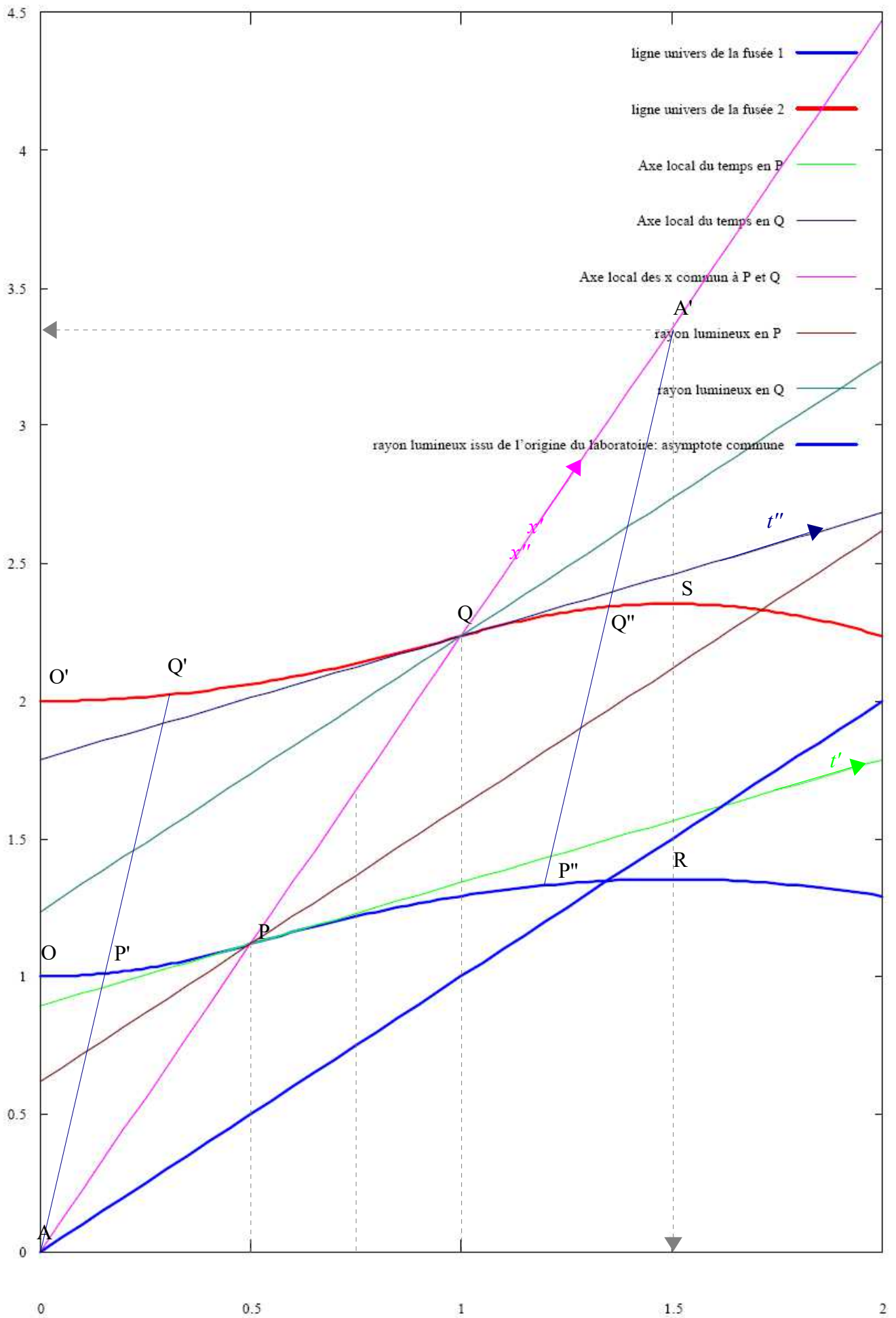
Nous remarquons la symétrie par rapport au point  $M$  milieu de  $PQ$ .

Nous allons démontrer que cette solution maintient une distance constante entre les deux lignes d'univers et nous montrerons plus loin, par différentes méthodes, que le caractère étrange de cette solution (deux fusées ayant des accélérations différentes qui restent à distance constante) s'évanouit quand on l'analyse plus en détail.

La méthode utilisant la rotation de Wick (chap.11) est la plus éclairante à cet égard !

<sup>42</sup> Il existe d'autres critères pour le calcul d'une longueur voir [ Gautreau-Hoffman]

<sup>43</sup> C'est encore plus évident lorsqu'on transpose le problème en lui faisant subir un rotation de Wick (cf chap.7-4).



**Fig.7-2:** Lignes d'univers fermées: Sur le diagramme de Minkowski, nous voyons que sur la première partie (accélérée) des lignes d'univers la distance entre elles décroît, mais que sur la deuxième partie c'est l'inverse jusqu'à revenir à sa valeur initiale ( $OO'$ ) en ( $RS$ )!

La symétrie du diagramme vis à vis de  $M$  confirme cette phénoménologie.

***Temps propre des lignes d'univers conformément au diagramme de la fig. 7-2.***

Conformément au calcul du temps propre sur ce type de ligne d'univers que nous avons déjà fait dans le chapitre précédent, calculons la « longueur de Minkowski » (le temps propre) des différents morceaux de la ligne d'univers.

***Ligne d'univers de la fusée 1 du décollage jusqu'au renversement de poussée.***

Elle est représentée par le segment  $OP$  (longueur du segment d'hyperbole):

De:  $x = (t^2+1)^{1/2} \rightarrow dx = t.dt/(t^2+1)^{1/2}$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 [1 - t^2/(1+t^2)] = dt^2 (1/(1+t^2)) \rightarrow ds = [1/(1+t^2)]^{1/2}.dt$$

en posant:  $t = \sinh(\alpha) \rightarrow \alpha = \operatorname{argsinh}(t)$  ,  $\alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_0)$ ,  $\alpha_1 = \operatorname{argsinh}(t_1)$  et

$$ds = [1+\sinh^2(\alpha)]^{-1/2} = [\cosh^2(\alpha)]^{-1/2} = 1/\cosh(\alpha).$$

Comme  $dt = \cosh(\alpha) .d\alpha$ ,  $ds = [1/\cosh(\alpha)]\cosh(\alpha) .d\alpha$ , =  $d\alpha$ .

Alors:  $s = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_1) - \operatorname{argsinh}(t_0)$  Dans notre exemple nous obtenons:

$\operatorname{argsinh}(0.5) - \operatorname{argsinh}(0) = \operatorname{argsinh}(0.5) = \mathbf{0.481212}$  Comme  $\operatorname{argsinh}(0) = 0$ .

***Ligne d'univers de la fusée 2 du décollage jusqu'au renversement de poussée.***

Elle est représentée par le segment  $O'Q$  (longueur du segment d'hyperbole): Pour la fusée 2 la même méthode appliquée au segment  $O'Q$  de la ligne d'univers donne:

De:  $x = (t^2+k^2)^{1/2} \rightarrow dx = t.dt/(t^2+k^2)^{1/2}$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 [1 - t^2/(k^2+t^2)] = dt^2 (k^2/k^2+t^2) \rightarrow ds = [(1+t^2/k^2)]^{-1/2}.dt$$

en posant:  $t/k = \sinh(\alpha) \rightarrow \alpha = \operatorname{argsinh}(t/k)$  ,  $\alpha_0 = \operatorname{argsinh}(t_0/k)$ ,  $\alpha_2 = \operatorname{argsinh}(t_2/k)$  et

$$ds = [1+\sinh^2(\alpha)]^{-1/2}.dt = [\cosh^2(\alpha)]^{-1/2} dt = dt/\cosh(\alpha).$$

Comme  $dt = k.\cosh(\alpha) .d\alpha$ ,  $ds = [1/\cosh(\alpha)]k.\cosh(\alpha) .d\alpha$ , =  $k .d\alpha$ .

Alors:  $s = k \int_{\alpha_0}^{\alpha_2} d\alpha = \alpha_2 - \alpha_0 = k[\operatorname{argsinh}(t_2/k) - \operatorname{argsinh}(t_0/k)]$

Dans notre exemple ( $t_2 = 1, t_0 = 0, k = 2$ ), ceci donne:

$$s = 2[\operatorname{argsinh}(1/2) - \operatorname{argsinh}(0)] = 2 \cdot \operatorname{argsinh}(1/2) = 2 \cdot (0.481212) = \mathbf{0.962424}$$

Nous voyons que le temps propre écoulé jusqu'au moment de l'inversion de poussée de la fusée 2 est plus long que celui de la fusée 1 lorsqu'elle renverse sa poussée. Ceci était prévisible du fait que son accélération donc sa vitesse résultante est plus petite comme nous l'avons montré en annexe 6. Sur le diagramme de Minkowski l'arc d'hyperbole  $O'Q$  est également plus long que  $OP$ , ce qu'il faut interpréter avec précaution en géométrie de Minkowski, mais qui ici contribue toutefois positivement.

Les autres segments se déduisent de considérations de symétrie:  $QS = OP$  et  $PR = O'Q$ .

Les lignes d'univers des fusées 1 et 2 jusqu'à  $t = 1.5$  (moitié des lignes d'univers) s'évaluent par la somme de segments de type  $OP$  et de segments de type  $O'Q$ , soit dans notre exemple:

$$OR = OP + PR = OP + O'Q = \operatorname{argsinh}(1/2) + 2 \cdot \operatorname{argsinh}(1/2) = 3 \cdot \operatorname{argsinh}(1/2) = 1.443636$$

$$O'S = O'Q + QS = O'Q + OP = OR = 1.443636.$$

Le voyage complet dure le double soit:  $\tau = 2 \cdot 0.481212 = 2.887272$ , pour les voyageurs, tandis que dans le référentiel du laboratoire il s'est écoulé un temps propre:  $t = 3$ .

Les voyageurs ont moins vieilli que les sédentaires comme le paradoxe du voyageur de Langevin le laissait prévoir:  $\tau_{rocket2} = \tau_{rocket1} < \tau_{lab}$ .

### ***Plan de vol.***

Le plan de vol qui s'en déduit est le suivant:

En appelant  $A1$  l'accélération initiale de la fusée 1 et  $A2$  l'accélération initiale de la fusée 2.

A  $t = 0$ , décollage: L'astronaute de la fusée 1 allume son moteur qui lui fournit une accélération constante  $+A1$  pendant un temps propre égal à  $0.481212$ , au bout duquel il renverse la poussée en la réglant à  $A2$ . Il maintient cette accélération  $-A2$  pendant un temps propre  $1.924848$  au bout duquel il renverse à nouveau la poussée en lui donnant la valeur  $+A1$  et maintient cette poussée pendant  $0.481212$ , ce qui fait qu'il se pose « en douceur » à vitesse nulle exactement à son point de décollage.

Son voyage a duré  $2.887272$  ( $0.481212 + 1.924848 + 0.481212$ ).

A  $t = 0$ , décollage: L'astronaute de la fusée 2 allume son moteur qui lui fournit une accélération constante  $+A2$  pendant un temps propre égal à  $0.962424$ , au bout duquel il renverse la poussée en la réglant à  $A1$ . Il maintient cette accélération  $-A1$  pendant un temps propre  $0.962424$  au bout duquel il renverse à nouveau la poussée en lui donnant la valeur  $+A2$  et maintient cette poussée pendant  $0.962424$ , ce qui fait qu'il se pose « en douceur » à vitesse nulle exactement à son point de décollage.

Son voyage a duré  $2.887272$  ( $0.962424 + 0.962424 + 0.962424$ ).



**Calcul dans le cas général.**

Nous avons fait le calcul sur un exemple particulier, faisons le dans le cas général.

Posons  $t = \sinh(\alpha)$  et définissons les coordonnées des points  $A, P, Q : A(t_0 = 0, x_0 = 0), P(t_1, x_1), Q(t_2, x_2)$ .

Pour la ligne d'univers  $OP: x = (t^2 + 1)^{1/2}$ , le temps propre est:

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 = [\operatorname{argsinh}(t_1) - \operatorname{argsinh}(t_0)]$$

$Q$  est l'intersection de l'axe  $x'$  en  $P$  avec la ligne d'univers de la fusée 2.

L'équation de l'axe des  $x'$  en  $P$  est:  $[(1+t_1^2)^{1/2}/t_1]t$

Donc  $t_2$  est défini par :

$$[(1+t_1^2)^{1/2}/t_1]t = (t^2+k^2)^{1/2} \rightarrow [1+t_1^2]/t_1^2 t^2 = t^2+k^2 \rightarrow t^2\{ [1+t_1^2]/t_1^2 - 1 \} = k^2 \rightarrow t^2/t_1^2 = k^2 \rightarrow t_2 = k t_1$$

En insérant ceci dans le calcul du temps propre de la ligne d'univers  $O'Q$  on obtient:

$s = k \int_{\alpha_0}^{\alpha_2} d\alpha = \alpha_2 - \alpha_0 = k[\operatorname{argsinh}(t_2/k) - \operatorname{argsinh}(t_0)] = k[\operatorname{argsinh}(t_2/k)] = k[\operatorname{argsinh}(t_1)]$  Ceci confirme le résultat que nous avons obtenu sur l'application numérique. Jusqu'à la ligne de simultanéité, le temps propre sur la ligne d'univers définie par  $x = (t^2+k^2)^{1/2}$  est  $k$  fois le temps propre de la ligne d'univers  $x = (t^2+1)^{1/2}$ .

**3 Après une phase d'accélération on coupe les moteurs.**

**Description de la variante**

Le paragraphe précédent nous fournit tous les éléments pour traiter ce cas.

Pour garder la distance constante nous allons couper les moteurs respectivement en  $P$  et  $Q$  (sur la ligne de simultanéité) pour les fusées 1 et 2.

La figure 7-1 nous montre que les lignes d'univers du vol inertiel qui s'ensuivent sont représentées par les axes  $t'$  et  $t''$  tangents aux hyperboles en  $P$  et  $Q$ .

Nous savons que la distance entre les fusées  $d$  est identique à celle du départ  $d$ . Le vol devenant inertiel, les deux fusées sont alors dans le même référentiel inertiel global, cette distance ne va pas varier.

Le point particulier que nous pouvons calculer sur cette variante correspond aux paramètres de la trajectoire de transfert, entre le référentiel du laboratoire et ce nouveau référentiel globalement inertiel.

La fusée 1 a accéléré avec une accélération propre  $\alpha = 1$ , pendant un temps propre égal à  $t_1$ , la

vitesse à la fin de l'accélération vaut  $at_1 = t_1$ .

La fusée 2 a accéléré avec une accélération propre  $\alpha = 1/k$ , pendant un temps propre  $t_2 = k.t_1$ , la vitesse à la fin de l'accélération vaut  $at_2 = (1/k)(k.t_1) = t_1$ .

Nous constatons que c'est bien la même, les deux fusées sont bien dans le même référentiel inertiel.

Par ailleurs dans ce cas, les astronautes s'accordent sur le fait qu'ils ont coupé leur moteur simultanément, contrairement à ce qu'affirment les observateurs du laboratoire.

### ***Premier bilan des différentes trajectoires de transfert.***

Rappelons que les formules de Lorentz globales nous indiquent qu'un objet de longueur  $d$  dans son référentiel inertiel propre est mesuré  $D = d/\gamma$  dans un autre référentiel inertiel.

En fait cette formule s'exploite à l'envers, un observateur du laboratoire mesurant une distance  $D$  entre deux points situés dans un autre référentiel, va en déduire que la distance propre entre ces deux points, dans le référentiel qu'il observe, est plus grande est vaut  $d = \gamma.D$ . Il n'a pas, par contre, pas moyen de vérifier que cette contraction est physique ou non puisque ces référentiels globalement inertiels sont censés être infinis et éternels.

Ils sont censés avoir toujours existé ou, si ce n'est pas le cas, nous ne savons pas comment ils se sont constitués. Nous avons vu dans les précédents chapitre que la constitution de deux référentiels à partir d'un seul peut se faire par différentes trajectoires de transfert, nous en avons étudié deux types génériques mais il y en a d'autres, et que cela donne des phénoménologies différentes.

Dans un cas, bien que l'accélération propre à chaque extrémité soit identique le transport allonge physiquement la distance propre  $d$  (les extrémités s'éloignent) pour la rendre conforme à ce que les formules de Lorentz prédisent. Selon ce critère nous disons que la dilatation est physique!

Dans l'autre cas la distance propre est conservée, bien que les accélérations propres des extrémités soient différentes. Par contre dans le laboratoire nous trouverons bien la distance contractée  $D = d/\gamma$

Selon ce critère nous pouvons aussi dire que ce que l'observateur déduit la mesure de la longueur qu'il fait dans son référentiel pour estimer cette longueur dans le référentiel propre est correct.

Dans les deux cas nous arrivons à la même conclusion, pour ces types de trajectoires de transfert il y a accord entre ce que donne l'application des formules de Lorentz et la longueur physique de la distance mesurée dans son référentiel propre. Ce ne sont donc pas des méthodes antinomiques mais différentes.

## 8- Cet espace-temps est décrit par l'espace-temps de Rindler.

### 1 Equation associée à un observateur uniformément accéléré.

Nous allons montrer qu'un observateur uniformément accéléré (d'accélération propre constante  $\alpha$ ) dans l'espace-temps de Minkowski obéit aux équations suivantes <sup>44</sup>:

$$t(\tau) = (1/\alpha)\sinh(\alpha\tau),$$

$$x(\tau) = (1/\alpha)\cosh(\alpha\tau) \quad (8-1-1)$$

Où  $\tau$  est le temps propre. Ici nous utilisons une définition paramétrique via le temps propre  $\tau$ , qui est un paramètre affine de la trajectoire, au lieu d'une équation définissant  $x$  en fonction de  $t$ .

Nous allons obtenir les mêmes résultats, la définition présente étant plus dans l'esprit de la RG que la précédente. Vérifions que ceci correspond à une accélération constante.

Calculons le vecteur accélération 2D, comme l'espace-temps est plat:

$$a^\mu = D^2x^\mu/d\tau^2 = d^2x^\mu/d\tau^2$$

Le calcul du module donne:

$$(a^\mu a_\mu)^{1/2} = \alpha$$

La trajectoire de notre observateur accéléré satisfait à:

$$x^2(\tau) = t^2(\tau) + \alpha^{-2}$$

### 2 Changement de coordonnées.

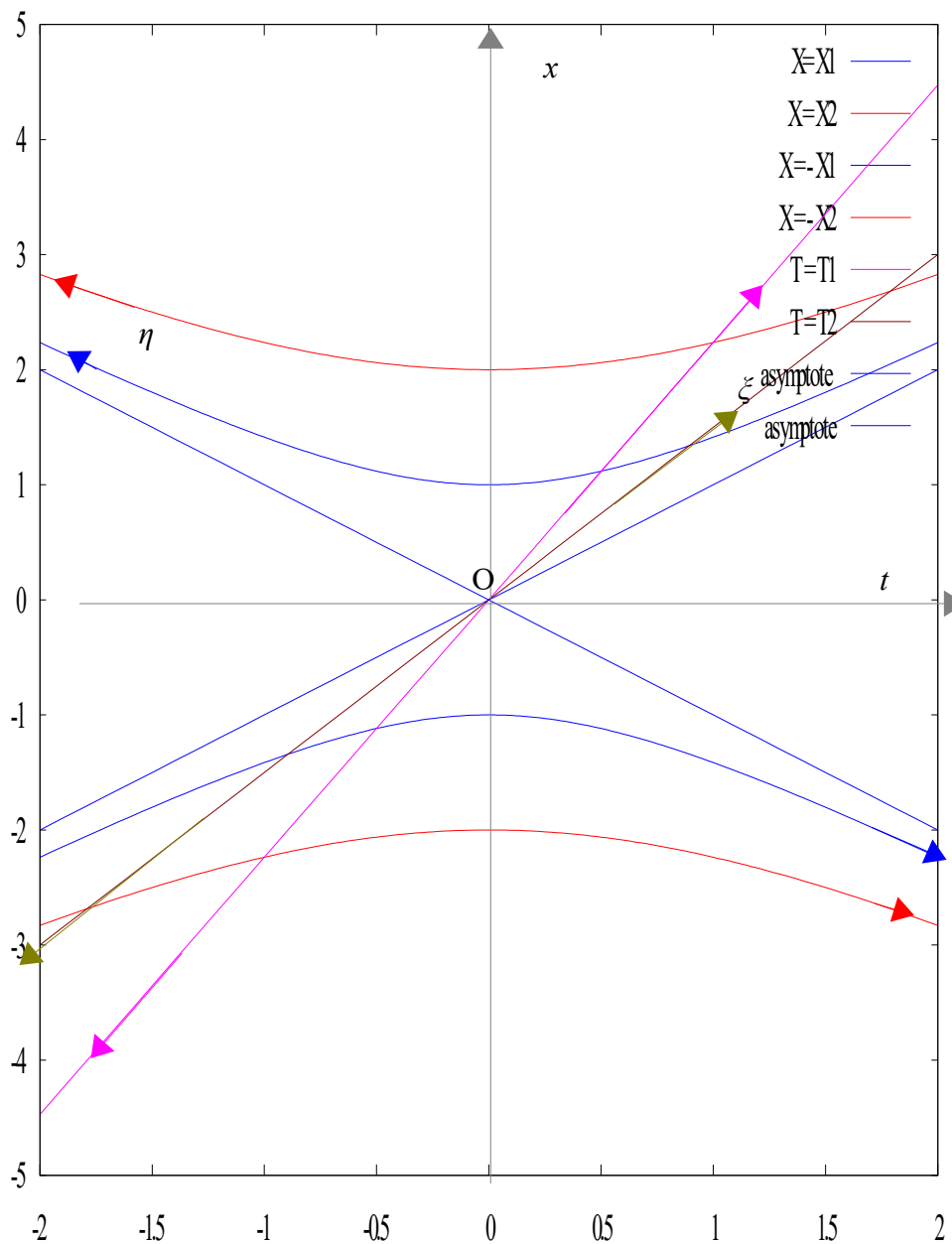
Choisissons de nouvelles coordonnées  $\eta, \zeta$  ( $-\infty < \eta, \zeta < \infty$ ), où  $a$  est un paramètre, telles que:

$$t = (1/a) e^{a\zeta} \sinh(a\eta)$$

$$x = (1/a) e^{a\zeta} \cosh(a\eta) \quad (x > |t|) \quad (8-2-1)$$

---

<sup>44</sup> Pour les détails voir par exemple [10] "Spacetime and geometry", p 403-406 S. Carroll, Addison Wisley 2003.



**Fig 8-2 [7]:** L'espace-temps de Rindler en coordonnées de Minkowski: (On a appelé  $\eta = T$ ,  $\zeta = X$  sur la légende du diagramme). Ces courbes sont tracées pour  $a = 1$ .

Les courbes correspondant à  $\zeta = cste$ ,  $\zeta_1 = 0$  et  $\zeta_2 = \ln 2$  sont des hyperboles où  $\eta$  est la coordonnée temps propre  $\tau$  pour un observateur tel que  $\alpha = a$  (pour  $\zeta_1 = 0$ ). Pour les autres hyperboles (dont  $\zeta_2 = \ln 2$ ) la relation est  $\eta(\tau) = \alpha\tau/a$ . Le paramètre  $\zeta$  en générale la famille infinie. Les droites issues du centre de symétrie sont les coordonnées  $\zeta$  (à  $\eta = \text{constante}$ ). Notons que pour  $t = 0$ ,  $\eta = 0$  pour toutes les hyperboles et que pour une hyperbole où  $\alpha = a$ ,  $\zeta = 0$  pour  $t = 0$  et  $\zeta = \infty$  en O.

Dans ces coordonnées la ligne d'univers d'un observateur uniformément accéléré défini en (8-1-1), satisfait aux équations:

$$\eta(\tau) = \alpha\tau/a$$

$$(8-2-2)$$

$$\zeta(\tau) = [\ln(a/\alpha)]/a$$

$$(8-2-3)$$

Le temps propre est proportionnel à  $\eta$  et la coordonnée spatiale  $\zeta$  est constante .

Pour un observateur tel que  $\alpha = a$ , on a :  $\eta = \tau, \zeta = 0$

Ceci définit une hyperbole particulière, les autres correspondent à des valeurs de  $\alpha \neq a^{45}$ , dont la coordonnée spatiale constante est donnée par (8-2-3) et le paramétrage en temps propre par (8-2-2).

Dans ces coordonnées la forme de la métrique s'écrit:

$$ds^2 = e^{2a\zeta} (-d\eta^2 + d\zeta^2) \quad (8-2-4)$$

Cette métrique est stationnaire, mais non homogène. Dans ces coordonnées nous voyons que:

$$x^2 - t^2 = (1/a^2) e^{2a\zeta} \cdot \cosh^2(a\eta) - (1/a^2) e^{2a\zeta} \sinh^2(a\eta) = (1/a^2) e^{2a\zeta}$$

avec  $(1/a^2) e^{2a\zeta} = K^2$ , (pour  $\zeta = \text{constante}$  et en rappelant que  $a = \text{constante}$ ).<sup>46</sup>

Cette équation est la même que l'équation (7.1).

De:  $t = (1/a) e^{a\zeta} \cdot \sinh(a\eta), x = (1/a) e^{a\zeta} \cosh(a\eta),$

avec  $a = \text{constante}$  :  $x/t = \text{constante}$  à  $\eta = \text{constante}$ : Cela définit des droites

### 3 Distance entre deux lignes d'univers d'observateurs accélérés.

Nous tirons la distance spatiale entre les deux lignes d'univers par intégration à  $\eta = \text{cste}$  à partir de:

$$ds = e^{a\zeta} d\zeta, \text{ de } \zeta = b_1 \text{ à } \zeta = b_2 \text{ pour } a = a_1 \text{ et } a = a_2.$$

$$S = l = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{a\zeta} d\zeta = 1/a [e^{k\zeta_2} - e^{k\zeta_1}]$$

Nous voyons que comme la métrique dépend non linéairement de  $\zeta$ , la coordonnée spatiale est « courbée ». Par contre la distance entre les deux hyperboles, mesurée sur les rayons vecteurs issus du centre de symétrie (porteurs de la coordonnée  $\zeta$ ), est constante, propriété que nous avons démontrée dans le chapitre 7.

L'espace-temps décrit au chapitre 7 (ou tout du moins moins une région) est bien l'espace-temps de Rindler où  $\alpha$  est le paramètre d'accélération et  $\zeta$  est un paramètre d'espace générant la famille infinie d'hyperboles.

Le système de coordonnées de Rindler réalise un feuilletage de l'espace-temps de Minkowski par les lignes d'univers accélérée (hyperboles de type temps à coordonnée spatiale constante) et par la distance entre ces lignes (de type espace à coordonnée temporelle constante).

<sup>45</sup> Les hyperboles correspondent à des valeurs de l'accélération mais celle ci est un vecteur colinéaire de la coordonnée  $\xi$ , ligne de simultanéité comme le diagramme après rotation de Wick (chapitre 11-2) le montre de façon évidente.

<sup>46</sup> En fait le paramètre  $a$  permet de définir un paramétrage des coordonnées. Une même hyperbole dans le plan  $(x, t)$  est définie par  $(1/a^2) e^{2a\zeta} = K^2$ , à chaque valeur de  $a$  correspond un  $\zeta$  différent. Idem pour le paramétrage de  $\eta$ .

#### 4 Illustration de la phénoménologie du paradoxe de Bell dans cette représentation.

On peut alors considérer que ce problème est équivalent à celui de fusées se mouvant dans un espace-temps inhomogène, comme sa métrique le montre, ce qui va générer un "effet de marée" des corps étendus comme en RG. Ceci explique la phénoménologie que nous avons rencontrée (contraintes variables liées aux accélérations variables dépendant de la coordonnée spatiale).

#### 5 Généralisation de la description des différentes lignes d'univers accélérées considérées.

Nous avons vu aux chapitres 3 à 6 le cas des hyperboles translattées, le cas des hyperboles imbriquées au chapitre 7-8, nous avons identifié ce dernier cas à l'espace-temps de Rindler.

Existe il une description synthétique qui décrit l'ensemble de ces configurations? Dans le chapitre 2 nous avons mentionné les transformations de Wu et Moller généralisées par J.P Hsu et N. Suzuki [11, 11bis] qui permettent de définir à partir des coordonnées  $(t, x, y, z)$  cartésiennes de l'espace-temps de Minkowski de nouvelles coordonnées  $(T, X, Y, Z)$ , dans l'espace-temps de Minkowski.

La solution de Rindler définit une famille d'hyperboles d'asymptotes communes dont le centre de symétrie est « libre ». Les coordonnées « locales »  $\xi, \eta$  se définissent dans un diagramme issu de ce centre de symétrie. Ceci est associé à l'isotropie (invariance par rotation) de l'espace-temps de Minkowski en tout point.

Pour prendre en compte l'homogénéité (invariance par translation), il faut positionner ce centre de symétrie dans l'espace-temps de Minkowski (en fait ce sont des positionnement relatifs, on prend une origine arbitraire) et pour cela introduire deux paramètres complémentaires. Nous disposerons alors d'une solution permettant de couvrir tous les cas que nous avons traités.

Montrons que ces transformations généralisent bien le problème de cette manière.

On part de la transformation de **Wu**, où  $T$  et  $X$  sont définis implicitement par la relation suivante<sup>47</sup>:

$$t = \gamma \cdot v(X + (\alpha \cdot \gamma a^2)^{-1}) + T_a, \quad x = \gamma(X + (\alpha \cdot \gamma a^2)^{-1}) + X_a, \quad (8-4-1)$$

$$\text{où } \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad v = v_a + \alpha(T - T_a), \quad \gamma_a = (1 - v_a^2)^{-1/2}, \quad (8-4-2)$$

$$\text{et } T_a = \gamma_a \cdot T_a - v_a / \alpha \cdot \gamma_a, \quad X_a = \gamma_a \cdot v_a \cdot T_a - 1 / \alpha \gamma_a, \quad v_a = v_0 + \alpha \cdot T_a. \quad (8-4-3)$$

Avec les paramètres suivants:  $v_a$  est la vitesse au temps  $T_a$ ,  $v_a = v_0 + \alpha \cdot T_a$ , si on pose  $T_a = 0$  alors  $v_a$  est la vitesse initiale  $v_0$ . La relation pour  $v$  dans (8-4-2) montre que poser  $\alpha \rightarrow 0$  est équivalent à faire  $T \rightarrow T_a$ , donc la limite  $\alpha \rightarrow 0$  doit s'interpréter comme étant prise à  $T = T_a$ , de sorte que  $v = v_0$  à cette limite.

Pour décrire la phénoménologie, pour une accélération donnée, on peut poser  $v_0 = 0$  sans que cela nuise à la généralité (cela introduit juste un décalage par rapport à  $T_a$ ), le paramètre important étant  $v_a$  dont toutes les valeurs possibles (de -1 à +1) sont obtenues en faisant varier  $T_a$ . Souvent nous poserons  $v_0 = 0$  pour ne pas s'encombrer d'un paramètre peu utile à la compréhension du problème.

47 Notons que ces transformations dépendent directement de  $X$  et indirectement de  $T$  à travers  $v$  et donc  $\gamma$ . Les transformations inverses de (8-4-1) sont:  $T = (t - T_a) / \alpha \cdot (x - X_a) - v_a / \alpha + T_a$ ,  $X = [(x - X_a)^2 - (t - T_a)^2]^{1/2} - 1 / \alpha \gamma_a^2$

Dans ces transformations, les paramètres  $T_a$  et  $v_0$  (non présents dans l'espace-temps de Rindler) indépendants de l'accélération  $\alpha$ , vont permettre de fixer des «conditions initiales» dans le plan  $(x, t)$  qui étendent la solution de Rindler: Avec  $v_0$  on peut avoir une vitesse initiale non nulle et avec  $T_a$  considérer la phénoménologie en prenant n'importe quel point de l'espace-temps comme référence.

Ceci conduit à une métrique de la forme:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = W^2.dT^2 - dX^2 \quad \text{avec} \quad W^2 = \gamma^4(\gamma_a^{-2} + \alpha.X)^2 \quad (8-4-4)$$

On voit que dans (8-4-4)  $g_{00}$  dépend explicitement de la coordonnée  $X$  et implicitement de  $T$  et de  $T_a$  à travers  $\gamma$  et  $\gamma_a$  (8-4-2). Cette forme de la métrique n'est pas très explicite.

On peut réduire la dépendance de  $g_{00}$  à  $X$  et  $T_a$ , en opérant le changement de coordonnées suivant:

$$T^* = [(\alpha\gamma_a^2)^{-1}]\{tanh^{-1}[v_a + \alpha(T - T_a)] - tanh^{-1}[v_a - \alpha T_a]\} \quad (8-4-5)$$

On obtient alors les transformations de **Moller** généralisées:

$$t = (X + (\alpha.\gamma_a^2)^{-1}).sinh(\gamma_a^2.\alpha.T^* + tanh^{-1}v_0) + T_a, \quad x = (X + (\alpha.\gamma_a^2)^{-1}).cosh(\gamma_a^2.\alpha.T^* + tanh^{-1}v_0) + X_A, \quad (8-4-6)$$

où rappelons le,  $v_0 = v_a - \alpha.T_a$ . Est une vitesse initiale,  $T^*$  est une coordonnée temps déduite de  $T$ <sup>48</sup>. En posant  $v_0 = 0$ , comme dans le cas considéré de l'espace-temps de Rindler, on obtient:

$$t = (X + (\alpha.\gamma_a^2)^{-1}).sinh(\gamma_a^2.\alpha.T^*) + T_a, \quad x = (X + (\alpha.\gamma_a^2)^{-1}).cosh(\gamma_a^2.\alpha.T^*) + X_A, \quad (8-4-6 \text{ bis})$$

de forme similaire à celle de la transformation de l'espace de Rindler rappelée ci dessous, mais qui prend en compte une translation du centre de symétrie dans le plan  $(x, t)$  par les paramètres  $T_a, X_A,$

$$t = (1/a) e^{a\xi}.sinh(a\eta), \quad x = (1/a)e^{a\xi}cosh(a\eta) \quad (x > |t|) \quad (8-2-1)$$

La métrique de Moller généralisée (où  $g_{00}$  ne dépend que de  $X$  et  $T_a$ )<sup>49</sup> s'écrit:

$$ds^2 = W_M^2.dT^{*2} - dX^2, \quad \text{avec} \quad W_M = (1 + \gamma_a^2\alpha.X) \quad (8-4-7)$$

Pour une accélération tendant vers zéro, la transformation, converge vers celle de Lorentz.

De (8-4-6) on tire que:  $(x - X_A)^2 - (t - T_a)^2 = (X + (\alpha.\gamma_a^2)^{-1})^2 (x - X_A) / (t - T_a) = cotanh(\gamma_a^2.\alpha.T^* + tanh^{-1}v_0)$

De la première on tire que pour des paramètres  $v_0$  et  $T_a$  donnés, les courbes à valeur constante de la coordonnée  $X$  du référentiel accéléré sont des hyperboles dans le plan  $(x, t)$  du diagramme de Minkowski, ce qui correspond à un mouvement accéléré comme dans l'espace-temps de Rindler, mais avec un paramétrage différent. On a une «triple» infinité d'hyperboles (qui balayent tout le plan  $x, t$  et se recouvrent) lorsque  $X, T_a$  et  $v_0$  varient.

De la seconde on tire que pour des paramètres  $v_0$  et  $T_a$  donnés, les courbes à valeur constante de la

48 Voir [11] ou [11bis] pour les détails et la justification de ce qui suit. Notons que alors que  $T$  variait entre des limites finies,  $T^*$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$

49 La forme est simplifiée mais elle dépend de paramètres de la forme de Wu ( $T_a, v_a, \gamma_a$ ). Elle n'est pas si simple qu'elle paraît! Les paramètres  $X_A, T_a$  qui définissent l'offset des coordonnées inertielles dépendent de  $\alpha, v_0$ , et  $T_a$  qui est un paramètre des coordonnées accélérées. La dépendance spatiale  $(X + (\alpha.\gamma_a^2)^{-1})$  de la transformation est plus complexe.

coordonnée  $T^*$  du référentiel accéléré sont des droites comme dans la forme de Rindler mais avec un paramétrage différent. On a une « triple » infinité de droites (qui balayent tout le plan  $x, t$  et se recouvrent) lorsque  $X, T_a$  et  $v_0$  varient.

Si on fait le lien avec le mouvement accéléré que nous avons défini pour la forme de Rindler:

$$t(\tau) = (1/\alpha)\sinh(\alpha\tau) \leftrightarrow t = (X+(\alpha.\gamma_a^2)^{-1}).\sinh(\gamma_a^2.\alpha.T^* + \tanh^{-1}v_0) + T_A,$$

$$x(\tau) = (1/\alpha)\cosh(\alpha\tau) \leftrightarrow x = (X+(\alpha.\gamma_a^2)^{-1}).\cosh(\gamma_a^2.\alpha.T^* + \tanh^{-1}v_0) + X_A,$$

On voit qu'on ne peut pas établir une correspondance simple comme dans le cas de la forme de Rindler pour en déduire le paramétrage à partir du temps propre.

Si on pose  $\gamma_a^2.\alpha. = \ln(\eta) \rightarrow t = [\ln(e^X) - \ln(\eta)] .\sinh[\ln(\eta)T^* + \tanh^{-1}v_0] + T_A,$

avec  $v_0 = 0$  on obtient:  $t - T_A = \ln(e^X/\eta) .\sinh[\ln(\eta)T^*], \quad x - X_A = \ln(e^X/\eta).\cosh[\ln(\eta)T^*]$

Ce qui ressemble un peu plus à la forme de Rindler.

Cette forme donne elle la solution à notre problème initial des fusées de Bell où nous avons deux hyperboles identiques correspondant aux lignes d'univers des deux fusées dont les centres de symétrie étaient sur l'axe des  $x$  ( $t=0$ ) à deux valeurs différentes de  $x$ .

Ici nous avons le contrôle du centre de symétrie de ce diagramme, nous pouvons donc superposer une infinité de tels diagrammes en faisant balayer ce plan par le centre de symétrie en faisant varier  $\alpha,$   $T_a$  et aussi éventuellement  $v_0$  dans leurs limites permises. Nous pouvons penser que nous avons atteint notre objectif, tracer deux lignes d'univers uniformément accélérées sur le même diagramme. Mais en fait la métrique ne permet pas calculer une distance « propre » entre les hyperboles puisqu'elle n'est pas la même pour les deux (elle dépend des paramètres qu'on fait varier).

En effet ces transformations sont en fait adaptées à l'espace-temps de Rindler qu'elles généralisent comme nous l'avons montré et pas adaptées, contrairement à ce que le titre de l'article laisse supposer, à la résolution du paradoxe des fusées de Bell (elles n'apportent rien de plus que ce que nous avons établi par d'autres méthodes).

La conclusion de l'article est d'ailleurs assez surprenante. Après avoir établi et discuté de ces équations sans référence au paradoxe des fusées de Bell, les auteurs terminent leur article par: « En conclusion,nous pouvons utiliser les transformation généralisées de Moller et Wu pour traiter le problème des deux fusées qui suppose un accélération linéaire constante.

Comme ces transformations de coordonnées se ramènent progressivement aux transformations de Lorentz lorsque l'accélération tend vers zéro, la mesure des longueurs ou des temps a une signification opérationnelle bien définie et il n'y a pas de « paradoxe des deux fusées »<sup>50</sup>. !!!

---

50 On peut utiliser les formules, comme on l'a vu, encore qu'elles n'apportent rien au problème de Bell, mais on ne voit pas ce qui autorise les auteurs à affirmer pourquoi que le fait que les transformations convergent vers les transformations de Lorentz lorsque l'accélération tend vers zéro donne à la mesure des temps et des longueurs une signification opérationnelle qui résoudrait le paradoxe. Les auteurs sont passé à côté du sujet.



## 9- Relation de l'univers de Rindler avec l'univers de Milne.

### 1 Présentation de l'univers de Milne

La cosmologie de Milne est une théorie ne faisant appel qu'à la RR <sup>51</sup>. Elle est également solution de l'équation de Friedmann construite sur la métrique de Robertson Walker (RW) lorsque la densité de matière<sup>52</sup>  $\rho$  est nulle. Dans ce cas l'équation de Friedmann devient:

$$H(t)^2 = -\kappa/a(t)^2$$

où  $\kappa$  est la courbure de l'espace et  $a$  le facteur d'échelle. Nous voyons que la courbure doit être négative.

Avec  $H = (da/dt)/a$ , l'équation se met sous la forme:  $da/dt = (-\kappa)^{1/2}$  qui a pour solution évidente:

$$a(t) = (-\kappa)^{1/2}.t + b \text{ avec } a(t) = 0 \text{ à } t = 0, \text{ nous obtenons: } a(t) = (-\kappa)^{1/2}.t$$

la loi d'expansion est linéaire. En insérant dans la métrique RW:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dr^2/(1+r^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad \text{on obtient :}$$

$$ds^2 = -dt^2 + t^2[dr^2/(1+r^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

La version 2D s'écrit:  $ds^2 = -dt^2 + t^2.dr^2/(1+r^2)$

Réalisons une transformation de coordonnées similaire à celle que nous avons faite pour l'espace-temps de Rindler.

$$T = \cosh(\alpha), \quad r = \sinh(\alpha), \quad \text{donne: } dt = \sinh(\alpha)d\alpha, \quad dr = \cosh(\alpha)d\alpha.$$

$$ds^2 = -dt^2 + t^2.dr^2/(1+r^2) = -\sinh^2(\alpha).d\alpha^2 + [\cosh^2(\alpha).\cosh^2(\alpha)/(1 + \sinh^2(\alpha)).d\alpha^2.$$

Comme:  $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1 \rightarrow 1 + \sinh^2(\alpha) = \cosh^2(\alpha),$

$$ds^2 = -dt^2 + t^2.dr^2/(1+r^2) = d\alpha^2 [\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha)] = d\alpha^2.$$

Comme  $d\tau^2 = -ds^2$  en posant  $\alpha = i.\tau$  (rotation de  $\pi/2$  dans le plan complexe: le temps devient l'espace et vice versa) nous obtenons  $d\alpha = i.d\tau, d\alpha^2 = -d\tau^2$ , l'équation précédente devient:

$$ds^2 = -d\tau^2$$

Nous voyons que l'espace-temps de Milne est lié à l'espace-temps de Rindler par une inversion de signature de la métrique (en 2D). Le temps joue le rôle de l'espace et vice versa.

51 Référence [17] E.A. Milne, 1933, Z. Astrophys.6,1

52 Il s'agit de la densité de masse "gravitationnelle". Cette masse peut être nulle avec de la matière et de l'antimatière en proportions égales si on considère que l'antimatière possède une masse gravitationnelle négative.

## 2 Compléments sur l'univers de Milne.<sup>53</sup>

En gros l'univers de Milne est une solution cosmologique s'appuyant uniquement sur la RR où tout l'univers des galaxies a été créé en un seul point de l'espace-temps de Minkowski.

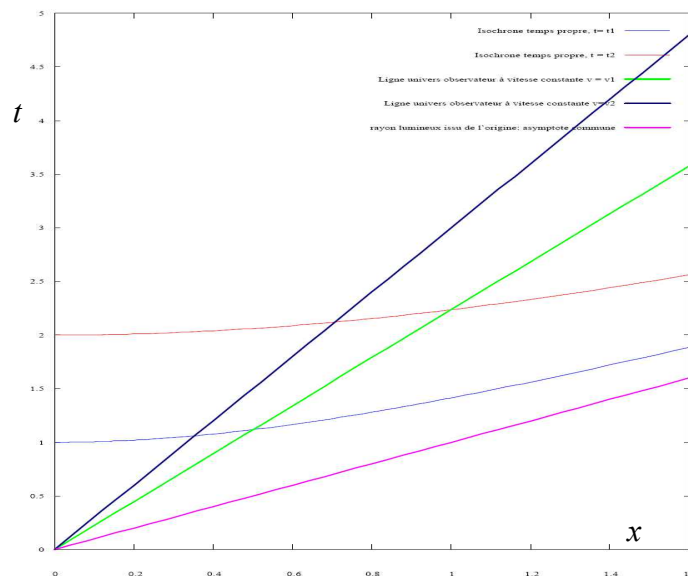
Toutes ces galaxies sont animées de vitesses toutes différentes dans chaque direction donnée.

Elles sont traitées comme des corps non gravitants. A la différence des cosmologies *FLRW* de la RG cet univers a un extérieur (est inclus dans un univers de Minkowski) qui pré-existait à l'explosion (il existe un "avant big bang").

On peut aussi noter que bien que son volume soit fini, il peut contenir un nombre infini de galaxies.

Pour permettre des comparaisons avec les cosmologies standards il est intéressant de définir un temps cosmique dans l'univers de Milne, c'est à dire de définir des hypersurfaces à temps propre écoulé constant depuis sa création.

L'équation en 2D est immédiate puisqu'il suffit juste d'utiliser les transformations de Lorentz (avec  $c = 1$ ). Ci dessous un schéma du diagramme de Minkowski [7].



La droite magenta est un rayon lumineux issu de l'origine (asymptote commune aux hyperboles à temps propre constant).

Pour illustrer que les galaxies sont toutes animées d'une vitesse constante mais quelconque, nous avons tracé la ligne d'univers (en 2D) de 2 d'entre elles. La droite verte est la ligne d'univers d'une galaxie de vitesse  $v_1$ , la droite bleu foncé celle d'une galaxie de vitesse  $v_2$ . Nous avons tracé deux segments d'une courbe (hyperboles) à temps propre constant ( $t = t_1, t = t_2$ ). Attention contrairement aux conventions précédentes c'est l'axe des  $x$  qui est horizontal!

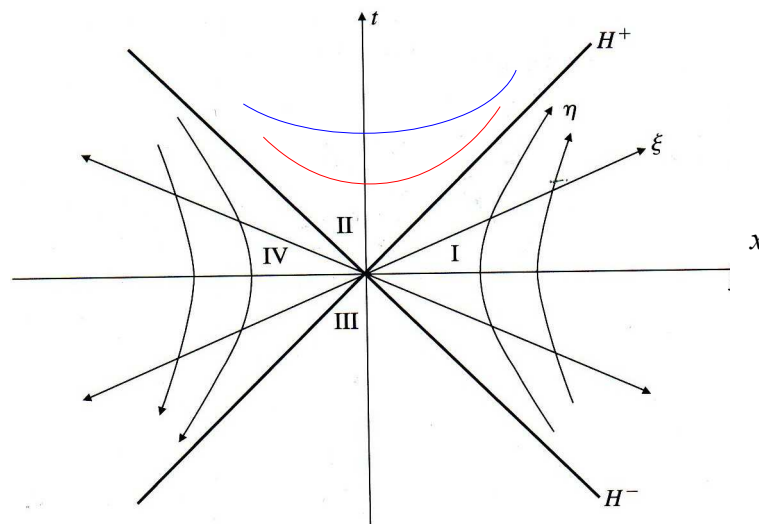
Comme:  $\tau = t/(1-v^2)^{1/2}$  et  $v = x/t$ , il vient:  $\tau^2 = t^2/(1-x^2/t^2) = 1/t^2 - x^2$ .  
 L'équation à  $\tau$  constant est l'hyperbole que nous connaissons définie par:  $t^2 - x^2 = 1/\tau^2 = cste$ <sup>54</sup>

<sup>53</sup> Voir [8] pour une description simple de la cosmologie de Milne.

<sup>54</sup> C'est lié à la nature hyperbolique (signature -, +, +, +) de l'espace-temps de la RR.

Ce système de coordonnées réalise un feuilletage de l'espace-temps de Minkowski par les référentiels inertiels (de type temps à coordonnée spatiale constante: décrit le mouvement d'un observateur inertiel) issus d'un point et les hyperboles (de type espace) à temps propre écoulé constant depuis ce même point. Nous sommes ici en Relativité Restreinte (globale) de base

Rappelons encore qu'à la différence de l'espace-temps de Rindler, les hyperboles ne sont pas des courbes à coordonnée spatiale constante, mais sont des courbes à temps propre constant.



Nous avons repris le diagramme précédent de Rindler avec ces quadrants droits et gauche comme définis au chapitre précédent, auquel nous avons rajouté un quadrant supérieur (le quadrant inférieur n'est pas représenté) où nous avons tracé des courbes (rouge et bleue) de type espace à temps propre constant et des droites de type temps (magenta et marron) qui représentent des lignes à vitesse constante: le temps propre des observateurs inertiels, car ces droites sont les axes du temps  $t'$  du référentiel inertiel co-mobile.

A une rotation de  $90^\circ$  près, ce feuilletage de l'espace-temps est celui que nous avons réalisé pour l'espace-temps de Rindler. Ces deux configurations s'obtiennent par une dualité du feuilletage où le temps et l'espace échangent leurs rôles du même espace-temps, celui de Minkowski, ce qui n'était pas évident au vu des phénoménologies associées: Dans un cas les observateurs sont linéairement et uniformément accélérés, l'espace complet étant généré par l'ensemble de toutes les accélérations possibles (relativité restreinte locale), dans l'autre ils sont tous issus d'un point avec une vitesse constante, l'espace complet étant générés par l'ensemble de toutes les vitesses possibles (relativité restreinte globale).

Cette dualité non triviale entre une solution globale en RR et une solution locale en RR s'explique par la nature hyperbolique de l'espace-temps de Minkowski ce qui se traduit par une « courbure » du temps propre en fonction de la vitesse dans Milne qui a la même forme que la courbure de l'espace en fonction du temps propre liée à l'accélération dans Rindler. Est ce une coïncidence, ou est ce structurel, nous en discuterons dans la conclusion.

Dans cet espace-temps de Milne on utilise un système de coordonnées où la génération d'un espace-temps de Minkowski par des référentiels inertiels est mise en évidence, en relation avec le groupe de symétrie associé aux référentiels inertiels galiléens.

## 10- Un parfum de Relativité Générale.

Pour cette dernière configuration, faisons un pas vers la RG<sup>55</sup>. Considérons la métrique suivante (indéfinie) dans le plan  $(t, x)$  :

$$d\tau^2 = e^{2x} dt^2 - dx^2 \tag{10-1}$$

Cet espace-temps possède un champ de gravitation uniforme: Plus précisément les géodésiques de type temps satisfaisant à la condition initiale  $dx/d\tau = 0$  en un point  $P$  satisfont à:

$$d^2x/d\tau^2 = -1 \text{ en } P$$

L'équation géodésique est:  $d^2x/d\tau^2 + \Gamma^x_{\mu\nu}(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau) = 0$

Avec  $g^{xx} = 1/g_{xx} = -1$ ,  $g_{tt} = e^{2x}$ , le seul symbole de type  $\Gamma^x_{\mu\nu}$  non nul est:

$$\Gamma^x_{tt} = 1/2 g^{xx}(\partial_t g_{tx} + \partial_t g_{tx} - \partial_x g_{tt}) = 1/2 g^{xx}(-\partial_x g_{tt}) = 1/2(2e^{2x}) = e^{2x} \rightarrow d^2x/d\tau^2 = -e^{2x} (dt/d\tau)^2 \tag{10-2}$$

De (10-1)  $dt^2/d\tau^2 = [1 + dx^2/d\tau^2]e^{-2x}$ .

En insérant dans (10-2):

$$d^2x/d\tau^2 = -e^{2x} [1 + dx^2/d\tau^2]e^{-2x} = -1 - dx^2/d\tau^2 \rightarrow d^2x/d\tau^2 = -1 \text{ (avec } dx/d\tau = 0\text{)}.$$

Donc si un observateur du référentiel de laboratoire de système de coordonnées  $(t, x)$  lâche un objet, il va le voir tomber avec une accélération égale à  $1$  (s'il utilise une horloge qui lui donne son temps propre  $d\tau$ , par exemple une horloge atomique). Pour rester stationnaire dans un tel univers, le moteur de la fusée doit maintenir une poussée constante.

On peut penser qu'un tel univers se déduit de l'espace-temps de Minkowski par une transformation de coordonnée. Que nenni! Prenons deux fusées stationnaires dans le référentiel du laboratoire, ils maintiennent une poussée constante.

Si un observateur quitte la fusée et commence à tomber, il devient à ce moment notre observateur co-mobile (étant en chute libre il est inertiel par définition!). Il tombe avec une accélération constante de  $1$ , mais de son point de vue c'est la fusée qui accélère ainsi.

Donc si cet univers n'est que celui de Minkowski simplement travesti, alors l'accélération intrinsèque de chaque fusée, l'accélération mesurée par un observateur co-mobile est toujours  $1$ . Donc nos deux fusées devraient décrire des hyperboles parallèles dans le diagramme de Minkowski.

Mais alors conformément à ce que nous avons établi pour ce cas la distance entre eux, mesurée dans leur référentiel associé, devrait s'accroître avec le temps mais manifestement ce n'est pas le cas!

Notre nouvel univers n'est pas plat ce dont nous pouvons nous convaincre en calculant le tenseur de Riemann (qui n'est pas nul et caractérise donc un univers non plat), le tenseur de Ricci et scalaire

---

<sup>55</sup> Chapitre d'après [16]. Notons la similitude de la métrique avec celle de Moller ( $d\tau^2 = e^{2x} dt^2 - dx^2 \leftrightarrow ds^2 = (1 + \gamma_a^2 \alpha.X)^2 dT^{*2} - dX^2$ , bien que ici le tenseur de Riemann n'est pas nul contrairement au cas de Moller (RR).

de Ricci.

En posant  $t = x^0, x = x^1$ , et en utilisant Mathematica 4 avec  $ds^2 = -e^{2x} dt^2 + dx^2$  nous trouvons:

Le tenseur de Riemann  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$  a 2 valeurs de composantes non nulles:  $R[0,1,1,0] = 1, R[1,0,1,0] = e^{2x}$ ,

Le tenseur de Ricci a  $R_{\gamma\delta}$  deux valeurs de composantes non nulles:  $R[0,0] = e^{2x}, R[1,1] = -1$ ,

Le scalaire de Ricci  $R = R_{\gamma\delta} g^{\gamma\delta}$  vaut :  $R = -2$  <sup>56</sup>.

Le tenseur d'Einstein<sup>57</sup> est nul :  $G = 0$ , car  $G = R_{\gamma\delta} - \frac{1}{2}g_{\gamma\delta}R. \rightarrow G_{00} = e^{2x} - (\frac{1}{2}).(-2).e^{2x} = 0$ ,

$$G_{11} = -1 - (\frac{1}{2}).1.(-2) = 0,$$

C'est un espace assez peu ordinaire où le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci ne sont pas nuls mais où le tenseur d'Einstein est nul.

La métrique 4-d correspondante s'écrit:

$$d\tau^2 = e^{2z} dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Avec  $t = x^0, x = x^1, y = x^2, z = x^3$ , Mathematica 4 donne avec:

$$ds^2 = -e^{2z} dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 :$$

Le tenseur de Riemann possède deux composantes non nulles:

$$R[0,3,3,0] = 1, R[3,0,3,0] = e^{2z},$$

Le tenseur de Ricci possède deux composantes non nulles :

$$R[0,0] = e^{2z}, R[3,3] = -1, \text{ Le}$$

tenseur d'Einstein possède deux composantes non nulles:

$$G[1,1] = 1, G[2,2] = 1.$$

Le scalaire de Ricci vaut:

$$R = -2.$$

Puisque le tenseur d'Einstein est diagonal on peut l'écrire:

$$\text{diag}(G_{\mu\nu}) = (0, 1, 1, 0)$$

Rappelons l'équation d'Einstein, où  $\kappa$  est une constante dimensionnée :  $G_{\mu\nu} = \kappa.T_{\mu\nu}$

Ceci implique un tenseur énergie impulsion, ayant les mêmes composantes non nulles.

En supposant que ce tenseur est celui d'un fluide parfait cela s'écrirait:  $\text{diag}(T_{\mu\nu}) = (0, p, p, 0)$

On voit que la densité de matière du fluide est nulle mais que la pression est non isotrope (la composante  $z$  est nulle) et non nulle, quelque chose qui paraît assez exotique au niveau physique, dont le tenseur n'est certainement pas celui d'un fluide, même s'il satisfait la condition d'énergie faible en RG,  $\rho \geq 0, \rho + p \geq 0$ .

En effet la pression est confinée dans un plan perpendiculaire à l'axe  $z$ .

***Soulignons que cette solution ne peut pas être décrite correctement à la fois en RR et en RG, ceci étant exclusif. Qu'elle est alors la bonne interprétation? L'analogie de phénoménologie n'est valide au premier ordre: une trajectoire inertielle en RG n'est équivalente à une trajectoire en RR qu'au 1er ordre. Le tenseur énergie impulsion exotique auquel peut difficilement donner un sens physique n'est en rien contradictoire avec la RG mais traduit juste une situation atypique.***

<sup>56</sup> J'ai vérifié en utilisant Mathematica 4 que  $R = -2$  avec  $ds^2 = -e^{2x} dt^2 + dx^2, .$

<sup>57</sup> Nous sommes en 2 dimensions, n'empêche qu'un espace-temps de la RG avec un tenseur d'Einstein nul est atypique.

## 11-Analyse en utilisant la rotation de Wick.

### 1 Rappel sur la rotation de Wick

#### *Généralités*

En physique la rotation de **Wick**, appelée du nom de son auteur Gian-Carlo Wick, est une méthode permettant de trouver une solution à un problème en espace-temps de Minkowski en résolvant ce problème dans un espace Euclidien, et en transposant la solution ensuite dans l'espace de Minkowski par une transformation.

On constate que la métrique de Minkowski:  $ds^2 = - (d\tau^2) + dx^2 + dy^2 + dz^2$  et la métrique quadri dimensionnelle euclidienne:  $ds^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  sont équivalente si on pose  $t = i.\tau$ ,  $\tau$  étant réel. Souvent le problème prend une forme plus simple en géométrie euclidienne et certaines propriétés plus évidentes. Cette transformation est réversible et la solution trouvée en géométrie euclidienne se transpose en géométrie de Minkowski.

On l'appelle rotation parce que si on représente les nombres complexes par un plan, la multiplication d'un nombre complexe par  $i$  est équivalent à la rotation du vecteur représentant ce nombre par un angle de  $\pi/2$ .

#### *Propriétés générales de la transformation*

Rappelons certaines propriétés<sup>58</sup> qui vont nous servir lorsque nous allons traiter un problème en géométrie euclidienne pour le transposer ensuite en géométrie minkowskienne.

Une droite dans les coordonnées  $\tau, x$  se transforme en une droite dans les coordonnées  $t, x$ .

Une hyperbole ( $x^2 - t^2 = k^2$ ) dans les coordonnées  $\tau, x$  se transforme en un cercle ( $x^2 + t^2 = k^2$ ) dans les coordonnées  $t, x$ .

La famille d'hyperboles d'asymptotes communes définie par  $x^2 - t^2 = k^2$  dans les coordonnées  $\tau, x$  se transforme en la famille de cercles concentriques  $x^2 + t^2 = k^2$  dans les coordonnées  $t, x$ . Dans cette transformation une droite issue du centre de symétrie (une ligne de simultanéité commune) se transforme en un rayon issu du centre des cercles.

A ce propos les tangentes aux point d'intersections de cette droite avec les hyperboles de la famille sont parallèles, tout comme les tangentes aux points d'intersection d'un rayon issu du centre des cercles concentriques avec les cercles de la famille.<sup>59</sup> Ceci a pour conséquence que le référentiel « inertiel local » (tangent) en un point à une ligne d'univers hyperbolique (en RR) qui n'est pas représenté de façon orthogonale sur les diagrammes de Minkowski classiques se transforme en un

<sup>58</sup> Que nous démontrerons pas, mais dont la démonstration découle directement de correspondance entre les métriques

<sup>59</sup> Ceci est facile à démontrer en considérant dans un diagramme cartésien  $t, x$  deux cercles d'équation  $x^2 + t^2 = k^2$  et  $x^2 + t^2 = k'^2$  ainsi que les deux hyperboles correspondantes d'équation  $x^2 - t^2 = k^2$  et  $x^2 - t^2 = k'^2$ . Un rayon d'équation  $x = vt$  ( $v < 1$ ) coupe les cercles et les hyperboles en certains points que nous pouvons calculer. Reste à calculer les dérivées en ces points et montrer qu'elles satisfont à la propriété énoncée.

référentiel euclidien local orthogonal (l'axe  $t'$  est tangent à un cercle, l'axe  $x'$  est le rayon de ce cercle passant par ce point).<sup>60</sup>

L'équivalent de la distance spatiale « propre » entre deux lignes d'univers hyperboliques en un point de l'une de ces deux lignes dans les coordonnées  $\tau, x$  se transforme en la distance la plus courte pour le point considéré entre les deux cercles correspondants dans les coordonnées  $t, x$ . Cette propriété permet de mettre en correspondance des figures différentes représentant la même physique.

## 2 Application au paradoxe de Bell.

*Variante 1: lignes d'univers définies par  $x = \sqrt{t^2+k^2}$*

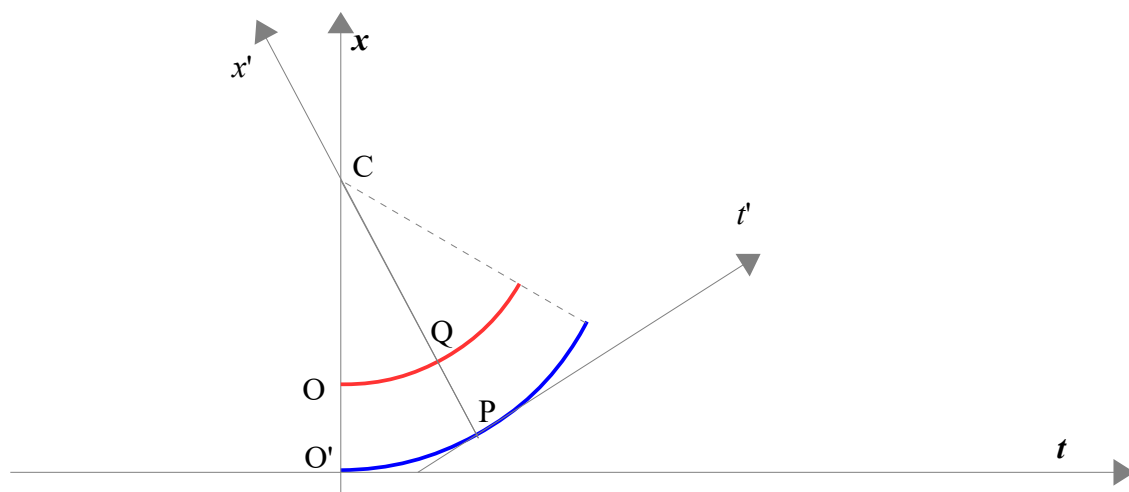
### Lignes d'univers accélérées

Changeons l'ordre d'analyse de cet essai et commençons par nous intéresser à ce cas où la rotation de Wick va nous éclairer sur la propriété étrange que nous avons notée, à savoir que la fusée poursuivante doit avoir une accélération propre supérieure à la fusée poursuivie, non pas pour la rattraper, ce qui n'arrive jamais mais pour garder une distance constante avec elle!

Nous savons que cette situation correspond à l'espace-temps de Rindler. La rotation de Wick s'exécute en multipliant la coordonnée réelle  $t$  par  $i$ , ce qui donne la valeur imaginaire  $i.t$ :

$$x = (k^2 + t^2)^{1/2} \rightarrow x = (k^2 - t^2)^{1/2} \rightarrow x^2 + t^2 = k^2: \text{ ceci est l'équation d'un cercle de rayon } k.$$

Esquissons <sup>61</sup> la partie accélérée de la ligne d'univers de la fig.7-2 qui traitait ce cas, en la transformant par une rotation de Wick.



**Fig. 11-2-1-1:**<sup>62</sup> Lignes d'univers accélérées représentées en géométrie euclidienne après une rotation de Wick: Les arcs d'hyperboles imbriquées deviennent des arcs de cercles<sup>63</sup> concentriques (

<sup>60</sup> Cela sera illustré sur la figure 11-2-1-2 du cas correspondant à l'espace-temps de Rindler.

<sup>61</sup> Les fig 12 à 14 ne sont pas exactes. Elles ont été esquissées juste pour illustrer le résultat de la rotation de Wick.

<sup>62</sup> Ce diagramme comme tous ceux de la représentation de Wick (sauf 11-2-1-2) sont "inversés" par rapport à ce qu'il devrait être si on appliquait la rotation de Wick directement sur les diagrammes en représentation de Minkowski (voir fig. 11-2-1-2). Mais c'est plus clair ainsi et cela ne nuit pas à la validité des démonstrations qui les utilisent.

<sup>63</sup> Ce qui confirme ce qu'on sait qu'en géométrie euclidienne: Un mouvement uniformément accéléré de ce type est

centrés en  $C$ , de rayon  $l$  et  $k$ ). Les points  $O, O', P, Q$  sont les mêmes que sur la fig. 7-1 (après rotation de Wick). Ils ont évidemment les mêmes coordonnées  $x, t$ .

Nous avons aussi représenté les axes  $t'$  et  $x'$  (le rayon commun) du référentiel co-mobile de la fusée 1 au point  $P$ .

Ce diagramme montre clairement que le référentiel co-mobile de la fusée 1 au point  $P$  ( $x' = 0$ ) est aussi le référentiel co-mobile de la fusée 2 au point  $Q$  ( $x' = PQ$ ).

Le moins qu'on puisse dire c'est que cela saute aux yeux que la distance  $PQ$  mesurée sur l'axe de simultanéité  $x'$  entre les lignes d'univers des fusées dans le référentiel co-mobile ( $t', x'$ ) (qui est naturellement la plus courte distance en géométrie euclidienne<sup>64</sup>) est constante.

Comme  $CPQ$  est le rayon commun aux deux il est orthogonal à la ligne d'univers  $O'P$  au point  $P$  ainsi qu'à la ligne d'univers  $OQ$  en  $Q$ . Les tangentes à ces lignes d'univers respectivement en  $P$  et  $Q$ , qui sont les axes locaux  $t'$  sont orthogonaux au rayon qui est l'axe local des  $x'$ .

De plus nous avons que dans un tel mouvement circulaire non seulement l'accélération est constante mais le vecteur accélération est radial.

Par la transformation inverse (fig. 11-2-1-2) les cercles vont se transformer en hyperboles et le rayon du cercle va devenir le segment issu du centre de symétrie (intersection des asymptotes communes) jusqu'au point  $P$  sur l'hyperbole correspondante au cercle transformé. Ce segment est porté par l'axe  $x'$  en  $P$ , axe de simultanéité commun à toutes les hyperboles (comme le rayon prolongé l'était commun à tous les cercles concentriques).

Cette représentation lève le voile sur le mystère du référentiel accéléré de ce type que nous avons rencontré précédemment sous sa forme Minkowskienne.

Les lignes d'univers accélérées de la famille définie par l'équation  $x^2 + t^2 = k^2$  étant représentées par des cercles concentriques de rayon  $k$  (elles se déduisent les unes des autres par une homothétie) leur synchronisation est assurée et la mesure des distances entre ces lignes identique pour tous les observateurs « locaux » associés.

Cet espace de représentation  $(t, x)$  étant « euclidien », il est isotrope. La représentation du problème posé, sur ce diagramme, se traduit par une figure isotrope<sup>65</sup> (par rapport au centre du cercle).

Il ne faut donc pas être surpris par les propriétés de symétrie particulières associées au problème.

Cependant pour montrer que cela est applicable à notre problème, encore faut-il montrer que les propriétés préservées par la rotation inverse de Wick, que nous avons indiquées précédemment, sont suffisantes pour conserver ces symétries.

Le fait que le parallélisme des tangentes aux points d'intersections  $A, B$  avec les rayons vecteurs (qui sont communs aux deux représentations) qui se transforment en  $P, Q$  soit préservé, et que la

---

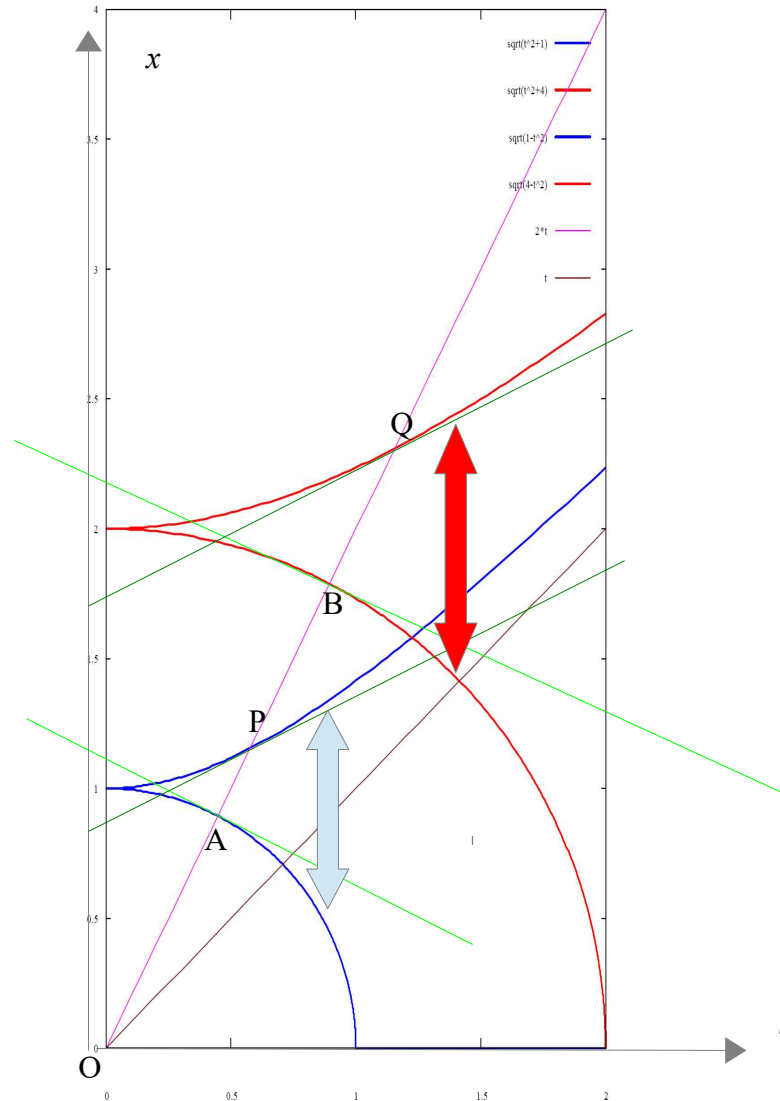
représenté par un arc de cercle dans le plan  $(t, x)$ . Cela se déduit pratiquement immédiatement de considérations de symétrie.

64 Mais la plus longue en géométrie de Minkowski du fait de la rotation de Wick.

65 L'isotropie est spatiale puisque  $t = i\tau$  est de type espace. La rotation de Wick inverse ne préserve pas l'isotropie (car  $\tau$  est de type temps, mais les caractéristiques qui nous intéressent sont préservées.



distance de Minkowski entre les points  $P, Q$  correspondants, corresponde bien à la distance  $A, B$  la plus courte dans cette représentation, ces propriétés étant caractéristiques, nous le garantis. Ceci est illustré ci dessous.



**Fig 11-2-1-2:** Rotation de Wick. Deux hyperboles  $x^2 = 1+t^2$  et  $x^2 = 4+t^2$ , avec O comme centre de symétrie et la droite marron issue de O comme asymptote commune  $x = t$ , se transforment en deux cercles concentriques de centre O (centre de symétrie) de rayon 1 et 2 et réciproquement pour la transformation de Wick inverse. Nous n'avons représenté que le quadrant supérieur (en fait seule la partie au dessus de l'asymptote aux hyperboles soit  $45^\circ$  doit être considérée), cela peut être complété par symétrie, sachant que selon le problème on choisit la partie concernée.

La droite (magenta) est la ligne de simultanéité commune aux représentations en géométrie de Minkowski et en géométrie euclidienne résultant de la rotation de Wick. Elle coupe les hyperboles en  $P$  et  $Q$  et les cercles en  $A$  et  $B$ .

Nous avons déjà démontré que les tangentes (en vert foncé) en  $P$  et  $Q$  étaient parallèles..

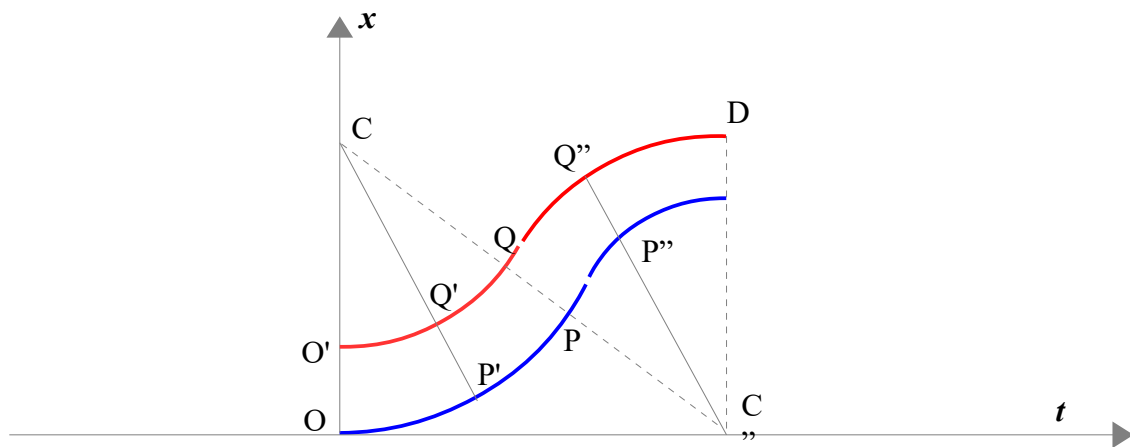
Les tangentes en  $A$  et  $B$  sont évidemment parallèles car orthogonales à un rayon commun. La distance entre les lignes d'univers est  $AB$  dans la représentation euclidienne résultant d'une rotation de Wick, et on peut voir qu'elle est constante (en géométrie euclidienne) pour tous les rayons issus

de  $O$  (lignes de simultanéité) .

Cela est moins évident que  $PQ$  distance dans la métrique hyperbolique de Minkowski est constant puisque sur le diagramme euclidien elle ne l'est pas ( $PQ \neq P'Q'$  par exemple) mais le fait que les tangentes en  $P$  et  $Q$  soient parallèles nous indique que cela est un effet de perspective dû à la courbure de la coordonnée spatiale comme montré à propos de l'espace-temps de Rindler.

**Lignes d'univers accélérées puis décélérées .**

Si nous prolongeons un arc de ligne d'univers correspondant à un observateur accéléré par un arc correspondant à une décélération identique nous voyons que compte tenu de la position du centre des cercles concentriques correspondant à la décélération l'arc de cercle intérieur est prolongé par un arc de cercle extérieur et vice versa. Esquissons les lignes d'univers de la fig.10, qui traitait ce cas, après une rotation de Wick.



**Fig.11-2-1-3:** Variante 1. Nous avons ajouté la partie correspondante à la décélération en représentation de Wick au diagramme précédent: Les lignes d'univers sont symétriques par rapport à  $C''PQC$ , le rayon commun au arcs de cercles correspondant à l'accélération et à la décélération, frontière entre les deux.

Les arcs d'hyperboles imbriquées deviennent des arcs de cercles concentriques (centres  $C, C''$ , rayons  $l, k$ ).

Les points  $O, O', P, Q, P', Q', P'', C''$  sont les mêmes que ceux de la fig 7-2 (à la rotation de Wick près). Ceci est évident car ils ont les mêmes coordonnées..

Nous voyons qu'ici aussi la distance entre les lignes d'univers définies en géométrie euclidienne reste constante et que la ligne simultanéité reste commune partout malgré le changement de centre des cercles (fonction continue). Les tangentes aux lignes d'univers en  $P'$  et  $Q'$ , en  $P$  et  $Q$  ainsi qu'en  $P''$  et  $Q''$  sont respectivement parallèles deux à deux.

En métrique euclidienne, où  $t$  et  $x$  sont deux degrés de liberté indépendants il est évident que des cercles concentriques, chaque cercle correspondant à une ligne d'univers uniformément accélérée (dans son référentiel local) dont l'accélération décroît quand le rayon augmente (les accélérations de ces cercles concentriques sont toutes différentes), restent à distance spatiales constante.

A ce propos faisons remarquer que le concept d'accélération constante dans son référentiel local

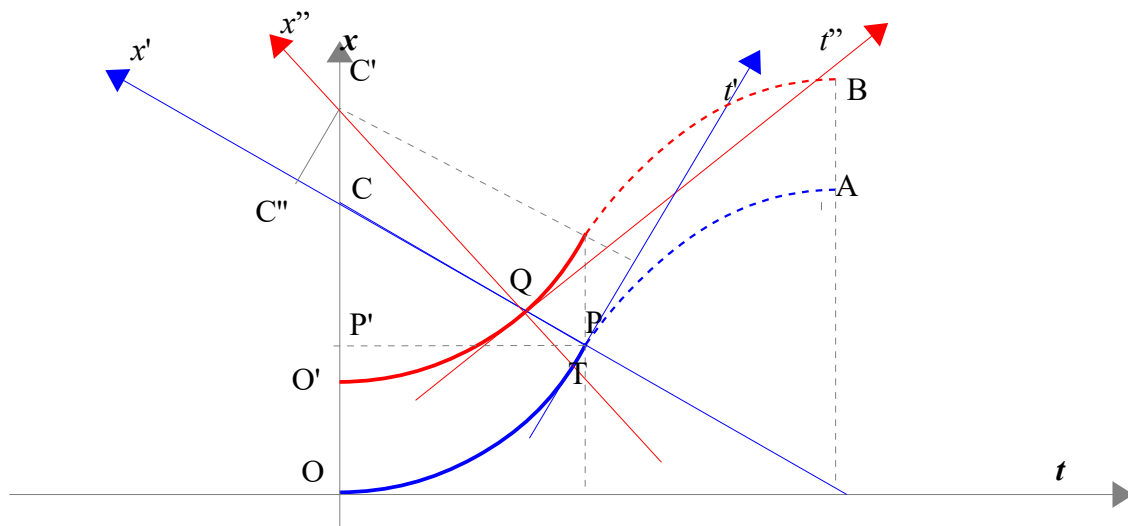
rend chaque ligne d'univers totalement indépendante de tout référentiel autre que le sien. Il ne faut pas s'étonner alors qu'il n'y ait pas de lien (de synchronisation par exemple) entre ces lignes d'univers. C'est la représentation par le diagramme de Minkowski, où rappelons le, les longueurs sur la figure ne sont pas représentatives des longueurs propres en RR qui brouille l'image.

La représentation en géométrie euclidienne, rétablit le caractère trivial de cette propriété. Ainsi disparaît le caractère mystérieux que le diagramme de Minkowski nous avait révélé.

Notons que nous pourrions compléter ce diagramme par symétrie autour de C''D pour fermer la boucle et ainsi représenter le paradoxe de Langevin très explicitement dans cette représentation.

**Lignes d'univers accélérées parallèles dans un diagramme de Minkowski.**

Revenons au problème de départ. Représentons ci dessous la fig.3-1, qui traitait ce cas, après une rotation de Wick.



**Fig. 11-2-2-1:** Lignes d'univers accélérées représentées schématiquement en géométrie euclidienne suite à une rotation de Wick. Cette figure reprend les éléments essentiels de la figure 3-1 (les 3 référentiels, les points P,Q,T) et les transpose par une rotation de Wick. Les arcs d'hyperboles translats deviennent des arcs de cercle translats en traits pleins bleus et rouge (centres en C, C' rayon= 1 ) avec  $CC' = O'O = d$ .

En pointillés est esquissée la partie décélération pour montrer que si celle ci est symétrique de la partie accélérée, la distance AB à l'issue de cette phase est la même que celle de départ  $AB = OO'$ .

Nous avons aussi représenté les axes  $x', t'$  du référentiel co-mobile de la fusée 1 en P ainsi que les axes  $x'', t''$  du référentiel c-mobile de la fusée 2 en Q.

**Variation de la distance entre les fusées**

Il n'y a pas de rayon commun aux deux arcs de cercles, donc pas de ligne de simultanéité commune, aussi la distance entre les lignes d'univers QT mesurée dans le référentiel co\_mobile de la fusée 2 est différente de la distance PQ mesurée dans le référentiel de la fusée 1. Ceci confirme bien ce que nous avons trouvé avec la représentation de Minkowski.

Nous voyons sur cette figure que pour chaque observateur la distance entre les fusées varie depuis la position de départ où elle vaut la valeur commune  $OO'$  (quand les fusées décollent) jusqu'à respectivement  $PQ$  ( dans le référentiel local en  $P$ ) et  $QT$  (dans le référentiel local en  $Q$ ) qui sont inférieurs à  $OO'$  en géométrie euclidienne lorsque la fusée 2 est en  $Q$ .

Comme en métrique euclidienne la distance est la distance la plus courte, on voit que pour  $Q$ , dans le référentiel local  $t',x'$ , cette distance s'obtient par un segment issu de  $Q$  qui est perpendiculaire à la circonférence représentant la ligne d'univers de la fusée 1 ( porté par un rayon de ce cercle). Idem (avec les substitutions adéquates) pour la distance de  $T$  dans le référentiel de la fusée 2.

D'autre part pour une valeur de  $d > 1$ , sur la figure 11-2-2-1 (le point  $O'$  est alors au dessus de  $C$  et le rayon  $CP$  ne coupe pas le cercle centré en  $C'$ ): les lignes d'univers sont causalement déconnectées comme nous l'avions noté.

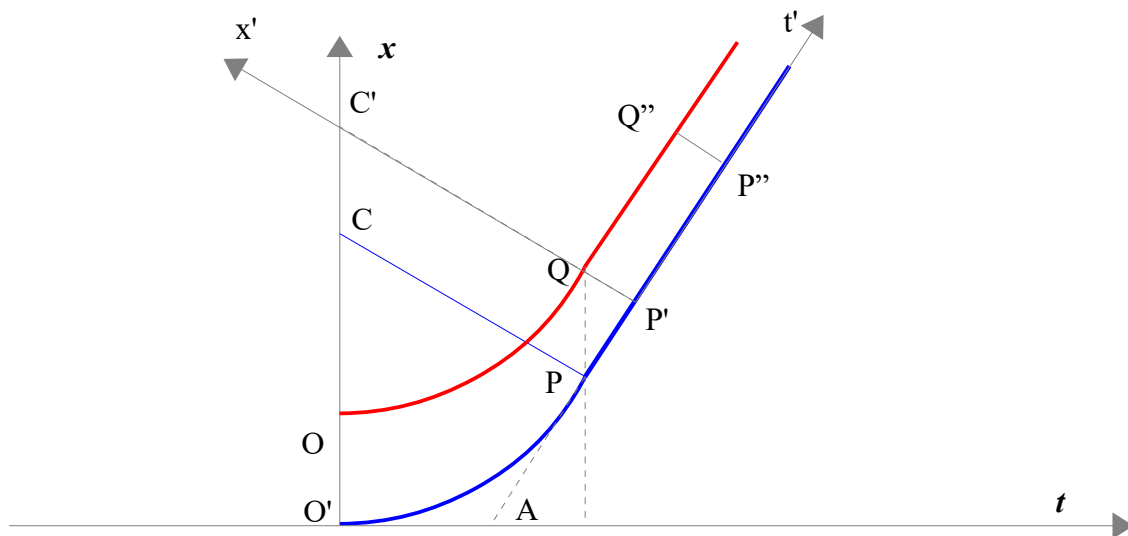
Par rapport au cas précédent, nous voyons que comme cette fois les lignes d'univers de la famille se déduisent par translation on ne peut pas avoir de configuration qui s'intègre dans la symétrie de la représentation du problème (qui était constituée de cercles concentriques). La symétrie d'une figure constituée de cercles translattés est bien inférieure à celle de cercles concentriques. En particulier les propriétés qui se trouvaient conservées par la rotation de Wick dans le cas précédent ne le sont plus, rendant impossible la synchronisation.

La translation est une transformation très particulière, son groupe d'invariance associé n'étant pas compact, à la différence du groupe associé aux rotations.

Cette représentation révèle la propriété qui était cachée sur le diagramme de Minkowski. On retrouve des propriétés similaires dans l'espace euclidien. Nous pourrions donc nous appuyer sur cette représentation euclidienne qui nous est plus familière pour interpréter certains résultats.

***Lignes d'univers parallèles accélérées puis inertielles.***

Revenons à cette variante du problème. La figure 4, se transforme en la figure ci dessous.



**Fig. 15:** Lignes d'univers accélérées puis inertielles représentées schématiquement en géométrie euclidienne après une rotation de Wick. Les arcs d'hyperboles parallèles deviennent des arcs de

cercles parallèles (centres en  $C, C'$  rayon= 1 ), les droites restent des droites. Les axes  $x', t'$  du référentiel co-mobile inertiel sont représentés. La partie accélération ayant été traitée au paragraphe précédent, nous nous intéressons ici à la partie inertielle.

En plus de notre analyse relative à la fig.14 pour la partie non inertielle, nous voyons que après  $PQ$ , il existe une zone de transition jusqu'à  $P'Q$  où la distance continue à varier indépendamment pour les deux fusées. Après  $P'Q$ , contrairement à ce que nous avons trouvé sur la fig.14, la distance mesurée dans le référentiel de chaque fusée qui devient alors commun ( $t',x'$ ) devient et reste constante.

La distance  $d = P''Q''$  entre les fusées sur cette partie inertielle est inférieure <sup>66</sup> (sur le diagramme) que la distance initiale  $D = OO'$  dans le référentiel du laboratoire ( $t,x$ ):

$$d = P'Q = P''Q'' < D = O'O = PQ.$$

Il est simple de calculer le facteur de "contraction". La vitesse  $v$  en  $P$  vaut:  $v = dx/dt = tg(\hat{A})$  Les angles  $\hat{A}$  et  $PQP'$  sont égaux, alors  $d = D \cdot \cos(\hat{A})$ , comme  $1/\cos^2 x = 1 + tg^2 x$ , nous obtenons:

$$1 + v^2 = 1/\cos^2 \hat{A}, \cos \hat{A} = (1/(1+v^2))^{1/2} \text{ alors } d = D/(1+v^2)^{1/2} \tag{1}$$

On effectue la rotation inverse de Wick ( géométrie euclidienne vers géométrie de Minkowski en remplaçant  $t$  par  $i.t$ ):

$$v = dx/dt \text{ devient en métrique de Minkowski } i.v \text{ et } v^2 \rightarrow -v^2.$$

En insérant ceci dans l'équation(1) on obtient:

$$d = D/(1-v^2)^{1/2}$$

C'est bien le résultat que nous escomptions ( cf Lorentz ). Ceci montre que dans le référentiel co-mobile commun attaché aux fusées la distance "propre" (mesurée sans ambiguïté car les deux fusées sont dans un même référentiel inertiel) est plus grande que celle mesurée dans le référentiel du laboratoire. Étant partis du référentiel du laboratoire avec une distance propre égale à  $D$ , la dilatation est physique!

Ce qui confirme ce que nous avons trouvé précédemment!

Pour étayer par cette méthode un calcul fait à la fin du chapitre 4, sur le décalage des temps propres au moment de la re-synchronisation à partir de  $PQ^2 = OO'^2 = D^2 = P'Q^2 + PP'^2$  et que  $PP' = P'Q \cdot v$  nous obtenons après rotation de Wick  $D^2 = PP'^2(1 - 1/v^2) \rightarrow (PP')^2 = D^2 v^2 \cdot \gamma^2$ , ce qui confirme, avec les notations utilisées ici, le calcul du chapitre 4.

---

66 Mais conformément à la rotation de Wick le plus court devient le plus long et vice versa.

## 12- Cas d'une règle rigide accélérée.

### 1 Introduction

Après avoir examiné différents aspects du paradoxe avec ses aspects connexes lorsque les fusées sont libres de toute attache, donc avoir examiné ce que subissait l'espace-temps entre les deux fusées, et avant de nous intéresser au cas cité par Bell où les deux fusées sont reliées par un câble, considérons le cas d'une règle rigide uniformément accélérée.

Nous avons déjà mentionné les débats entre Einstein, Ehrenfest et Born, entre autres, au sujet de la validité de la RR lorsqu'elle est appliquée à un corps rigide. En particulier la notion de rigidité implique une vitesse infinie de propagation des perturbations, en contradiction avec la RR qui limite à la vitesse de la lumière toute propagation de perturbation.

On peut faire observer que si la situation conduit à un état stationnaire, alors aucune perturbation ne se propage et qu'envisager la rigidité dans ce cas ne semble pas en contradiction avec la RR.

De tout façon il est intéressant d'étudier ce que nous donne la RR quand on impose certaines contraintes imposées par d'autres théories (cohésion de type électromagnétique dans un solide).

H.Nikolic traite ici de façon rigoureuse d'un des cas cités dans l'analyse préliminaire de Dewan et Beran mais qui n'est pas le problème de Bell, comme nous le verrons. Toutefois comme son analyse comporte un certain nombre d'aspects intéressants nous en donnons quelques éléments.

### 2 Phénoménologie de la barre infiniment rigide.

#### *Définition des hypothèses*<sup>67</sup>

On suppose la barre rigide de longueur propre  $L_0$ , soumise, par application d'une certaine force en un de ses points, à un mouvement linéaire accéléré sans rotation. Comme la barre est rigide il suffit de connaître la position, dans l'espace-temps, d'un quelconque de ses points que nous appellerons  $A$ . Cette étiquette nous permettra de référencer les différents paramètres qui seront relatifs à ce point. Soit  $S$  un référentiel inertiel (le laboratoire) et  $S'$  le référentiel accéléré associé à un observateur attaché à la règle rigide.

Evidemment cette hypothèse de rigidité absolue n'est certainement pas réaliste, mais pour l'instant faisons comme si cela était possible et nous verrons comment amender cette proposition pour la rendre plus physiquement acceptable.

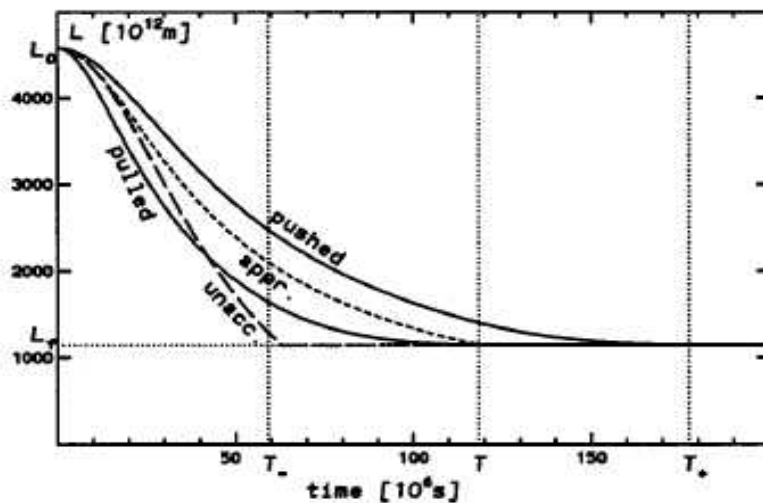
Nous supposons connue la fonction  $x_A(t_A)$ , coordonnées de  $A$  dans  $S$ , qui sera déterminée par l'action  $F(t')$  sur la règle, ce qui fait que nous connaissons la vitesse:

$$v(t_A) = d[x_A(t_A)]/d[t_A] \tag{1}$$

<sup>67</sup> Nous reprenons les éléments de l'analyse de Nikoli Hrvoje. [6], Notons que ce cas ne traite pas le problème de Bell . Il est pourtant souvent cité dans les références, et l'analyse est intéressante car elle traite rigoureusement d'un problème qui comporte un mouvement accéléré et à ce titre elle apporte des éléments de réflexion

Avec  $L_0 = x'_B - x'_A$ , (les coordonnées « ' » sont dans  $S'$ ) en appelant  $A$  et  $B$  respectivement l'arrière et l'avant de la règle (déterminé par le sens du mouvement) et  $t'_A - t'_B = 0$ , on déduit les fonctions des coordonnées des points  $A$  et  $B$  dans le référentiel ce qui permet d'établir les équations décrivant ce qu'un observateur inertiel constate <sup>68</sup>:

En supposant que la force soit appliquée, à  $t' = 0$ , à la règle précédemment au repos dans  $S'$  pendant un temps fini  $T'$  (dans  $S'$ ), en utilisant tous ces éléments avec les conditions initiales  $x_A(t_A = 0) = 0$ , l'auteur traite le cas d'une accélération constante ce qui donne les résultats suivants qui sont synthétisés dans le diagramme ci dessous et commentés dans la suite.



**Fig-12-2-1<sup>69</sup>**: Longueur (dans le référentiel inertiel) de la barre en fonction du temps. Les courbes continues représentent les longueurs des barres poussées (21) et tirées (23). La courbe en pointillés représente le résultat approximatif (22) tandis que la courbe en trait interrompu représente la longueur d'une barre non accélérée.

**Quelques commentaires sur les résultats obtenus.**

Un observateur galiléen va constater que le temps d'accélération de l'avant de la règle va durer plus longtemps que celui de l'arrière de plus si la règle est tirée il lui apparaît que la fin de l'accélération de l'arrière qui est la conséquence intervient avant l'arrêt de l'avant qui en est la cause! Pourtant, ceci n'est pas un paradoxe car l'intervalle entre les deux extrémités de la règle est de type espace, ce qui est un artefact<sup>70</sup> du fait de la rigidité supposée de la règle.

Un observateur non accéléré ne peut pas vraiment savoir si la règle rigide est tirée par une accélération  $a$ , ou poussée par une accélération  $A$  donnée par<sup>71</sup>:

$$A = a / (1 - a.L_0) \tag{26}$$

<sup>68</sup> Se reporter à l'article pour les détails du calcul. On pose  $c = 1$  dans ce qui suit. Nous avons conservé la numérotation des équations de l'article [6]

<sup>69</sup> Diagramme extrait de l'article [6]

<sup>70</sup> Dans un intervalle de type temps un observateur peut percevoir l'évènement « effet » avant l'évènement « cause ». Ce que l'auteur appelle artefact est simplement la conséquence que la rigidité de la règle telle que décrite suppose une vitesse de propagation infinie du son dans la règle, ce dont tous les calculs ont tenu compte, mais qui est non physique! D'où cette bizarrerie!

<sup>71</sup> A rapprocher de l'analyse que nous ferons lorsque nous traiterons le cas de l'espace-temps de Rindler.

On peut généraliser la formule (26) au cas où on applique l'accélération  $a$  en un point quelconque  $x'_A$  de la règle, ceci est équivalent à une accélération  $a(x')$  appliquée au point  $x'$  avec:

$$a(x') = a/[1 + (x' - x'_A)a] \quad (27)$$

La conséquence importante qu'on peut noter est qu'un observateur dans une fusée (rigide) uniformément accélérée n'est pas soumis à une force inertielle homogène, mais à une force qui décroît quand  $x'$  croît comme l'indique la formule (27), voir aussi [3].

On peut scinder une longue règle rigide en un ensemble de petites règles indépendantes, chacune animée d'une accélération donnée par (27).

Ensuite, dans la partie V, l'auteur traite le cas de plusieurs forces  $F_k$  appliquées en plusieurs points  $x_k$  sur la règle en le ramenant à une force résultante, somme de toutes les forces, appliquée en un point  $x$  <sup>72</sup>déterminé par:

$$x = \sum_k F_k x_k / \sum_j F_j \quad (35)$$

On peut généraliser au cas continu en remplaçant les sommes par des intégrales. Dans la démonstration l'auteur suppose que toutes les forces sont dirigées dans le même sens et discute du cas où cela n'est pas satisfait, mais cette partie ainsi que les hypothèse sur la non rigidité totale de la règle n'entraînant pas de phénoménologie particulière applicable au problème de Bell, nous ne nous étendrons pas.

### Discussion sur l'équilibre local.

Bien que le problème traité ici soit différent du problème de Bell, la généralité du raisonnement le rend applicable au cas de Bell, en effet quand l'accélération change avec le temps, un nouvel équilibre nécessite un certain temps  $\Delta t$  (de relaxation) pour s'établir ( $t$  est le temps dans le référentiel accéléré de la règle) et la nouvelle longueur de la règle (non rigide) dépend de la nouvelle accélération. Ce temps de relaxation correspond à l'amortissement sensible des oscillations provoquées par le changement, donc:

$$\Delta t \approx L_0 / v_s \quad (37)$$

où  $v_s < c$  est la vitesse du son dans la règle. Si l'accélération change lentement nous pouvons utiliser l'approximation adiabatique, c'est à dire que la longueur de la règle est toujours égale à sa longueur d'équilibre qui dépend de l'accélération instantanée. Cette condition s'écrit  $\Delta a/a \ll 1$  pendant le temps de relaxation  $\Delta t$ , donc de (37) et de la relation  $\Delta a = a' \Delta t$ , nous déduisons le critère de validité de l'approximation adiabatique.

$$A' \ll a \cdot v_s / L_0. \quad (38)$$

Nous retiendrons cette formule!

---

<sup>72</sup> La règle étant supposée « rigide » ce raisonnement est correct pour le mouvement global de la règle (moment d'ordre 0), mais pas pour les contraintes dans la règle (moments d'ordre > 0) qui sont différentes entre une force résultante appliquée en un point et  $N$  forces appliquées en  $N$  points. Comme la règle est supposée rigide seul le moment d'ordre 0 intervient dans le mouvement.



## 13-1 Le problème de Bell, enfin! Un lien entre les fusées va t'il finir par casser?

### 1 Introduction

L'étude que nous avons menée nous a permis d'approfondir un certain nombre de points délicats du problème et d'en préciser la phénoménologie associée, mais nous n'y avons pas vraiment répondu. Mais, fort de ces réflexions et des difficultés qu'elles nous ont permis de caractériser, nous sommes en mesure d'aller un peu plus loin dans la réponse que nous pouvons y apporter.

Nous allons proposer une solution dans ce chapitre dans le cas où le critère « adiabatique »<sup>73</sup>, inspiré de l'article [6] que nous adapterons ainsi: Dans le cas d'un pseudo équilibre ou équilibre local nous pourrions considérer que la longueur du lien varie localement avec le temps et l'espace sans nous préoccuper des problèmes de propagation des perturbations dans le lien<sup>74</sup> (ce qui supposerait de connaître ses caractéristiques physiques, résistance et élasticité linéaire, vitesse du son dans le câble..). La masse du lien sera négligée. Cette solution donnera un majorant à la limite de rupture qui peut intervenir avant du fait d'un régime transitoire qui peut excéder la limite de rupture. La solution exacte complète étant complexe et nous ne la traiterons pas.

Pour notre propos nous devons commencer à établir un certain nombre d'éléments en particulier une « longueur propre » de ce lien qui doit avoir la même valeur pour les deux fusées et montrer que le lien, dans les conditions énoncées doit avoir cette valeur.

### 2 Existence et détermination d'une longueur propre commune aux 2 fusées.

Peut on définir une longueur propre (de type espace) entre les fusées, c'est à dire une ligne entre les lignes d'univers des fusées dont la tangente en tout point  $M$  (y compris aux limites) est l'axe local  $x'$  de la ligne d'univers d'une fusée fictive dont l'équation du mouvement serait  $x = (1 - t^2)^{1/2} + d$  ?

Autrement dit, en partant de  $P$ , si  $M$  est le point immédiatement voisin de cette courbe, vers la ligne d'univers de la fusée 2, il est sur l'axe  $x'$  (au premier ordre). En réitérant l'opération en prenant ce point  $M$  comme nouvelle référence on trace par récurrence la ligne de distance propre jusqu'à la ligne d'univers de la fusée 2. Cette ligne, unique pour  $P$  donné, va être représentée sur le diagramme par une courbe  $C$  qui coupe la ligne d'univers de la fusée 1 en  $P$  et celle de la fusée 2 en  $S$ .

*Si la condition adiabatique est satisfaite cette ligne (localement de type espace partout), unique en  $P$ , représente le lien entre les deux fusées car localement chacun voit son voisin immédiat au repos (au 1<sup>er</sup> ordre) dans son référentiel propre ce qui est caractéristique d'un état stationnaire.*

*Cet équilibre résulte du fait que localement (sur chaque morceau infiniment petit du lien représentée par notre courbe) la force de rappel (liée à l'élasticité du lien) que nous supposons*

<sup>73</sup> Il faut introduire  $\Delta t \approx L_0/v_s$  le temps de relaxation de la perturbation dans le lien, où  $v_s$  est la vitesse du son et  $L_0$  la longueur du lien (coordonnées dans le référentiel propre du lien supposé en quasi équilibre). Si  $a$  est l'accélération la condition s'écrit  $\Delta a/a \ll 1$  pendant le temps de relaxation et si on pose  $\Delta a = a'\Delta t$  on déduit  $a' \ll a \cdot v_s/L_0$ .

<sup>74</sup> Dans ce cas la condition s'écrit  $(\Delta L/L)/\Delta t \ll 1$  avec  $\Delta t \approx L/v_s$ .

*proportionnelle à l'allongement « propre » du morceau de câble<sup>75</sup> est égale au gradient d'accélération entre les extrémités du morceau. Ceci est démontré en annexe 7.*

*De plus cette définition et le calcul de la longueur associée vaudra pour tous les observateurs sur cette courbe en particulier ceux de la fusée 1 et 2 qui auront alors une notion commune de cette longueur propre, à la différence de l'analyse que nous avons faite jusqu'à présent.*

Cette ligne est l'équivalent de la droite de simultanéité commune que nous avons rencontré lors de l'étude des trajectoires à distance constante dans l'espace-temps de Rindler (voir chap.7 et 8).<sup>76</sup> Bien entendu ici cette courbe n'est pas une droite et n'est pas inertielle, mais rien n'interdit de définir et calculer une longueur (en RR) d'une courbe non inertielle.

### 3 Calcul de l'équation de la courbe longueur propre

Nous avons vu que la pente de  $x'$  valait  $1/v$  où  $v$  est la vitesse en ce point qui vaut:

$$v = dx/dt = t/(1+t^2)^{1/2} \rightarrow dt/dx = 1/v = (1+t^2)^{1/2} / t$$

La courbe intégrale C représentant la longueur propre vaut<sup>77</sup>:

$$x = (1+t^2)^{1/2} + \ln(t) - \ln[1+(1+t^2)^{1/2}] + K$$

Imposons que cette courbe passe par le point P de coordonnées  $(t_0, x_0 = (1+t_0^2)^{1/2})$

$$x_0 = (1+t_0^2)^{1/2} = (1+t_0^2)^{1/2} + \ln(t_0) - \ln[1+(1+t_0^2)^{1/2}] + K \rightarrow K = -\ln(t_0) + \ln[1+(1+t_0^2)^{1/2}] \rightarrow x = (1+t^2)^{1/2} + \ln\left\{\frac{t}{t_0} \frac{1+(1+t_0^2)^{1/2}}{1+(1+t^2)^{1/2}}\right\}$$

### 4 Intersection avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie

Calculons la coordonnée  $t = t_1$  de S, intersection de C avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie.

$$X_1 = (1+t_1^2)^{1/2} + d = (1+t_1^2)^{1/2} + \ln\left\{\frac{t_1[1+(1+t_0^2)^{1/2}]}{t_0[1+(1+t_1^2)^{1/2}]}\right\} \rightarrow e^d = \frac{t_1[1+(1+t_0^2)^{1/2}]}{t_0[1+(1+t_1^2)^{1/2}]} \rightarrow e^d t_0 / [1+(1+t_0^2)^{1/2}] = t_1 / [1+(1+t_1^2)^{1/2}] = A \rightarrow t_1 = A [1+(1+t_1^2)^{1/2}] \rightarrow t_1 - A = A (1+t_1^2)^{1/2}$$

$$\text{En élevant au carré: } (t_1 - A)^2 = A^2 (1+t_1^2) \tag{0}$$

$$\rightarrow t_1^2(1-A^2) - 2At_1 = 0 \rightarrow t_1[t_1(1-A^2) - 2A] = 0 \tag{1}$$

avec  $A = [e^d]t_0/[1+(1+t_0^2)^{1/2}]$  et où  $d$  est la distance initiale séparant les deux fusées.

En résolvant (1) on trouve<sup>78</sup>:  $t_1 = 2A/(1-A^2) = 2\{[e^d]t_0/[1+(1+t_0^2)^{1/2}]\} / \{1 - [e^{2d}]t_0^2/[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2\}$

<sup>75</sup> Ce qui est réaliste en résistance des matériaux, tant que nous sommes dans la limite élastique.

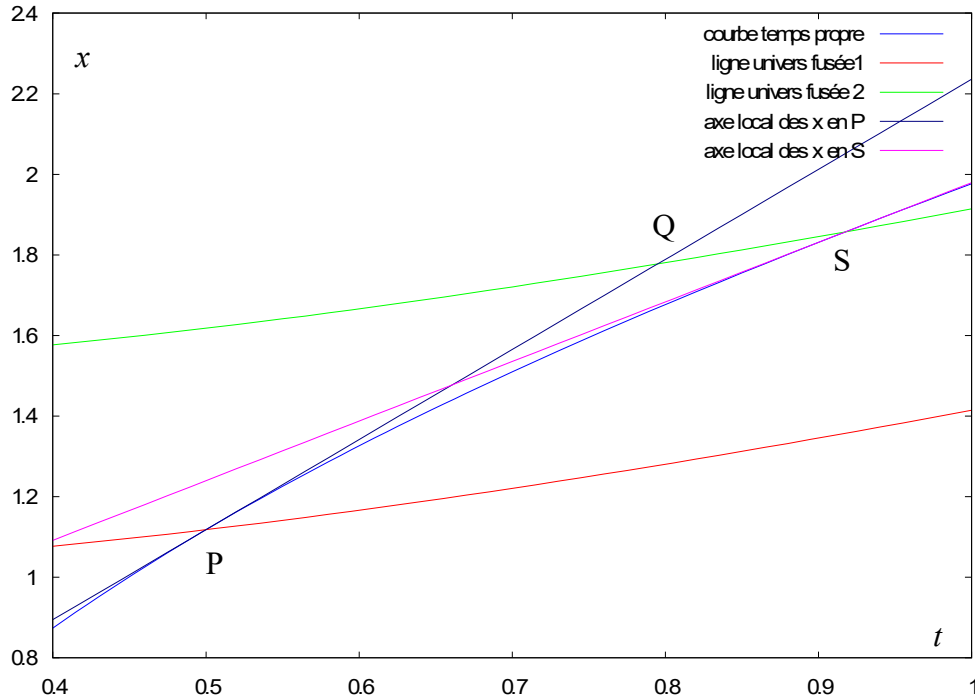
<sup>76</sup> On doit pouvoir définir une transformation entre les deux espaces temps qui corrobore cela.

<sup>77</sup> Intégrale donnée par Mathematica, Maxima la donne sous la forme équivalente  $x = (1+t^2)^{1/2} - a \operatorname{Sinh}(|t^{-1}|) + K$ .

<sup>78</sup> L'autre racine  $t_1 = 0$  est un artefact du fait de l'élevation au carré à la ligne (0) comme on peut le vérifier.

en simplifiant cela donne: 
$$t_1 = \frac{2e^d t_0 [1+(1+t_0^2)^{1/2}]}{[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2 - [e^{2d}] t_0^2} \tag{2}$$

Ceci est illustré sur la figure ci dessous.



**Figure 13-1:**[7] Courbe de longueur propre pour l'exemple de la figure 3-1 ( $t_0 = 0.5$ ) Intersection avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie<sup>79</sup>.

### 5 Calcul des temps propres des fusées jusqu'à la courbe longueur propre.

On peut reprendre les calculs faits au chapitre 6 qui traitaient ce problème. Cela donne:

$$\tau_1 = \operatorname{argsinh}(t_0) = -\ln(t_0^{-1}) + \ln(1 + (1+t_0^{-2})^{1/2}) = \ln(t_0 (1 + (1+t_0^{-2})^{1/2})) = \ln(t_0 + (1+t_0^2)^{1/2})$$

$$\tau_2 = \operatorname{argsinh}(t_1) = -\ln(t_1^{-1}) + \ln(1 + (1+t_1^{-2})^{1/2}) = \ln(t_1 + (1+t_1^2)^{1/2}) =$$

$$\ln \left| \frac{2e^d t_0 [1+(1+t_0^2)^{1/2}]}{[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2 - e^{2d} t_0^2} + \left\{ 1 + \frac{[2e^d t_0 [1+(1+t_0^2)^{1/2}]]^2}{\{[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2 - e^{2d} t_0^2\}^2} \right\}^{1/2} \right|$$

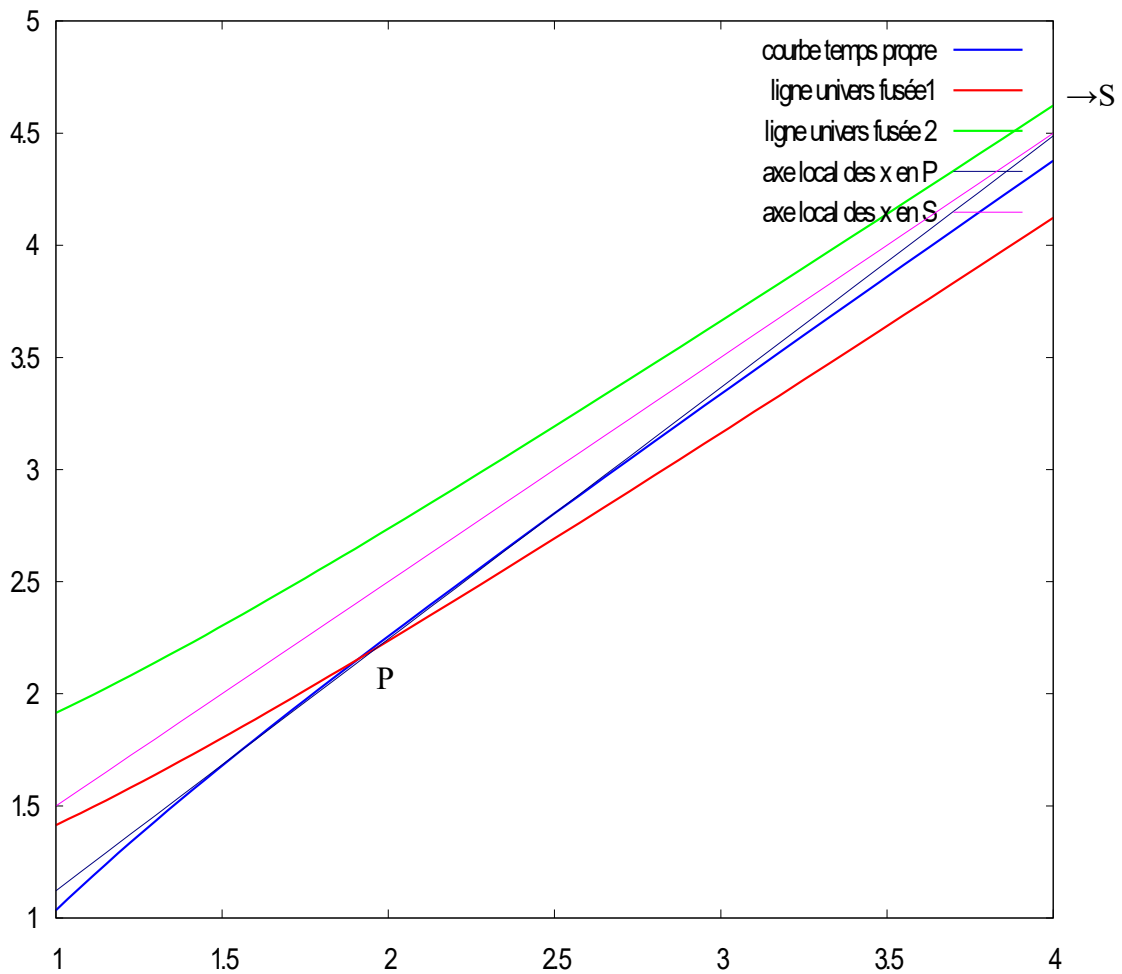
### 6 Existence de l'intersection de la courbe longueur propre avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie.

Dans (2) on voit que pour que cette intersection existe il faut que  $t_1 > 0$ , soit:

$$\{[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2 - [e^{2d}] t_0^2\} > 0 \tag{3}$$

puisque si on suppose  $t_0 > 0$  le numérateur de l'expression donnant  $t_1$  est toujours positif.

<sup>79</sup> Avec les valeurs des paramètres, dans les unités prises sur ce diagramme, la condition adiabatique n'est pas satisfaite, mais cela n'empêche pas de représenter le phénomène. Bien entendu les phénomènes qui vont être révélés avec ces données se produisent de façon moins rapide et "dramatique" dans une application réaliste!



**Fig 13-2:**[7] Même figure que 3-5-1 mais avec  $t_0 = 1.91$  proche de la valeur limite dans notre exemple ( $d=0.5$ ). On voit que le point S, intersection de la courbe de longueur propre avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie, est très loin (hors figure).

### 7 Calcul de la longueur propre de la courbe longueur propre

Calculons la longueur L propre de C entre les points P et S.

$$L = \int_{t_0}^{t_1} (dx^2 - dt^2)^{1/2} = \int_{t_0}^{t_1} ((1+t^2)/t^2) dt^2 - dt^2)^{1/2} = \int_{t_0}^{t_1} dt/t = [\ln(t)]_{t_0}^{t_1} = \ln(t_1/t_0)$$

avec les valeurs calculées pour  $t_1$  à partir de  $t_0$  ci dessus cela donne:

$$L = \ln(2\{[e^d][1+(1+t_0^2)^{1/2}]\} / \{[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2 - [e^{2d}]t_0^2\}) = d + \ln 2 + \ln[1+(1+t_0^2)^{1/2}] - \ln \{[1+(1+t_0^2)^{1/2}]^2 - [e^{2d}]t_0^2\}$$

Notons que pour  $t_0 = 0$  on obtient:  $L = d$ , ce qui est correct et pour  $t_0 \rightarrow \infty$ :  $L \rightarrow -\ln [t_0^2(1 - e^{2d})]$

Il n'y a pas de valeur réelle.

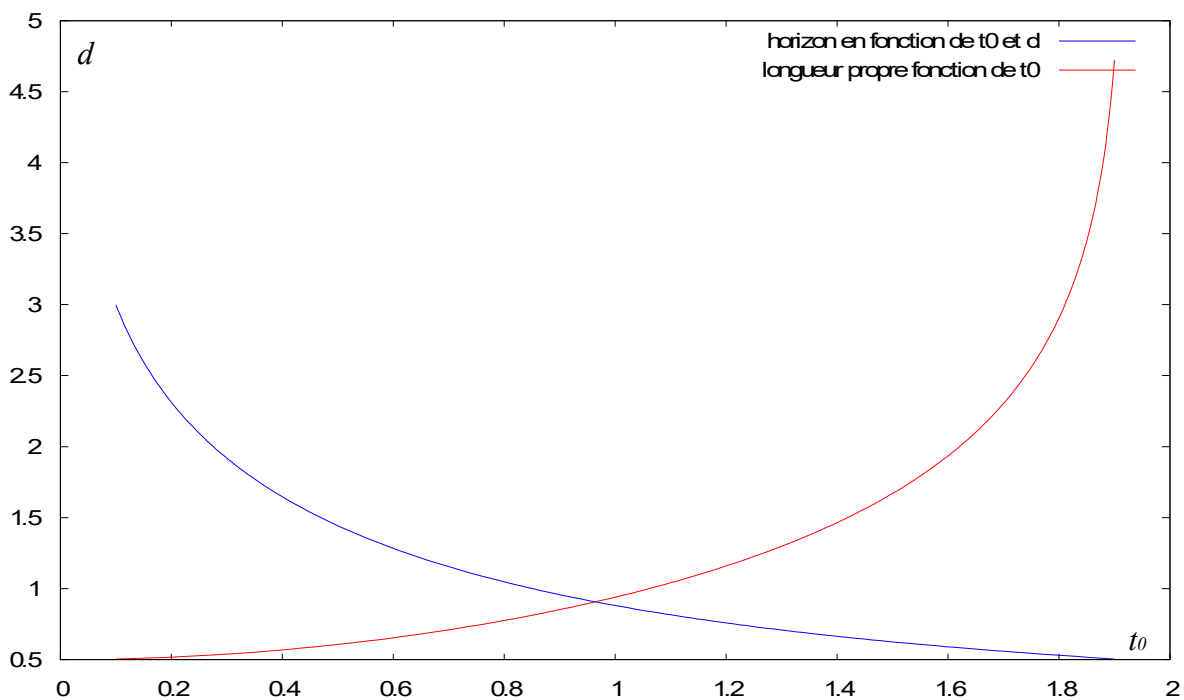
La condition pour une valeur réelle est:

$$\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}^2 - [e^{2d}]t_0^2 > 0$$

Ceci corrobore l'équation (3) car pour que la longueur propre soit définie entre les 2 lignes d'univers il faut que cette courbe coupe les deux lignes d'univers. En fait ceci caractérise également un "horizon". Notons la différence avec ce que nous avons décrit au §3-3 qui mentionnait un horizon pour la fusée poursuivie lorsque  $d \geq 1$  dans notre application, horizon qui n'existait pas pour la fusée poursuivante. Les situations étaient différentes pour les deux fusées.

### 8 Divergence de la longueur propre: le câble casse!

Pour la longueur propre telle que nous l'avons définie comme la situation est nécessairement la même pour les deux fusées, une nouvelle phénoménologie commune en résulte.



**Fig. 13-3:**[7] Horizon (en bleu) en fonction de  $d$  et  $t_0$ . Les valeurs pour lesquelles la courbe longueur propre est définie se situent sous la courbe. On voit que, dans notre exemple où  $d = 0.5$ , la valeur limite de  $t_0$  se situe vers  $1,9$ . Ceci est confirmé par la courbe rouge donnant la longueur propre en fonction de  $t_0$ . pour les valeurs de notre exemple ( $d = 0.5$ ). On voit que pour  $t_0 \approx 1.9$  la valeur de la longueur propre diverge.

Ci dessous d'autres courbes donnant la variation de la longueur propre en fonction de  $t_0$  pour différentes valeurs de  $d$ , montrant la dépendance de la divergence par apport à  $d$  et  $t_0$ .

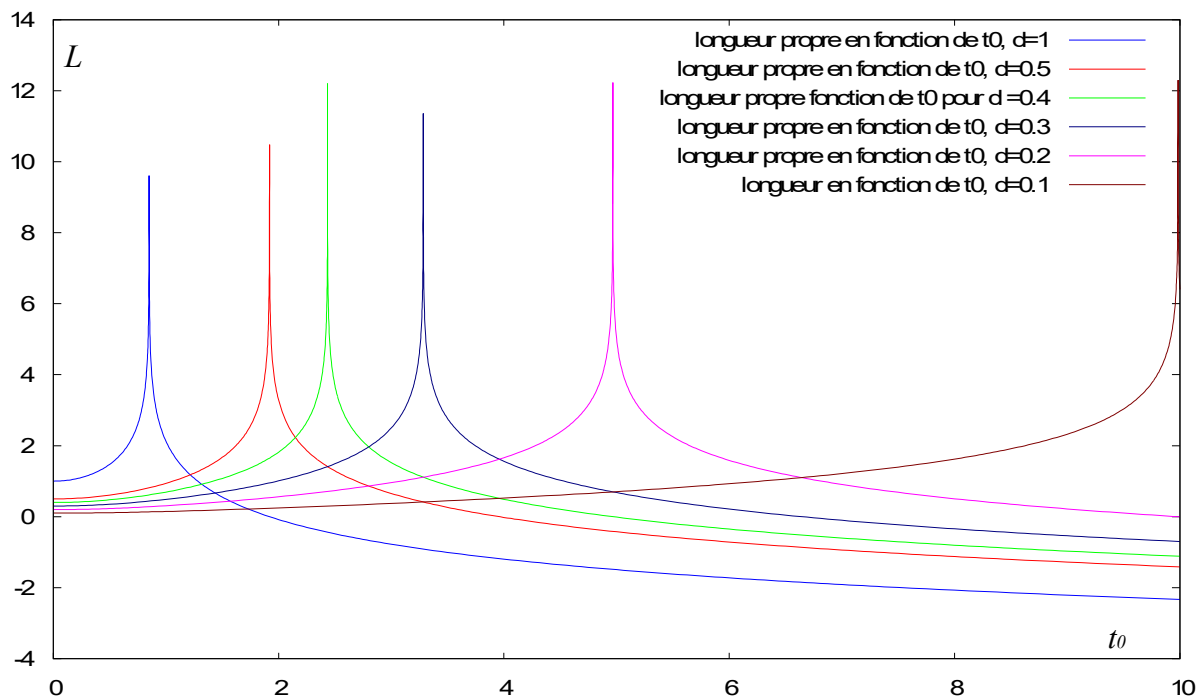


Fig. 13-4: [7] Longueur propre en fonction de  $t_0$  pour différentes valeurs de  $d$ .

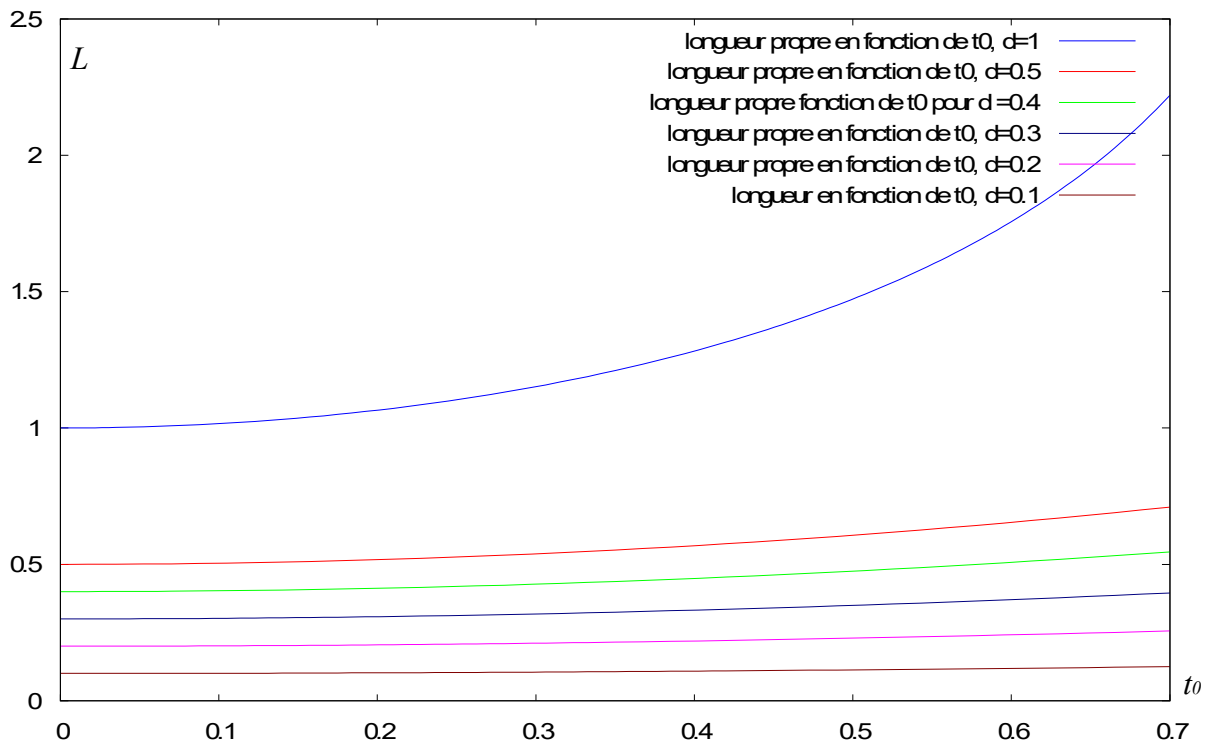


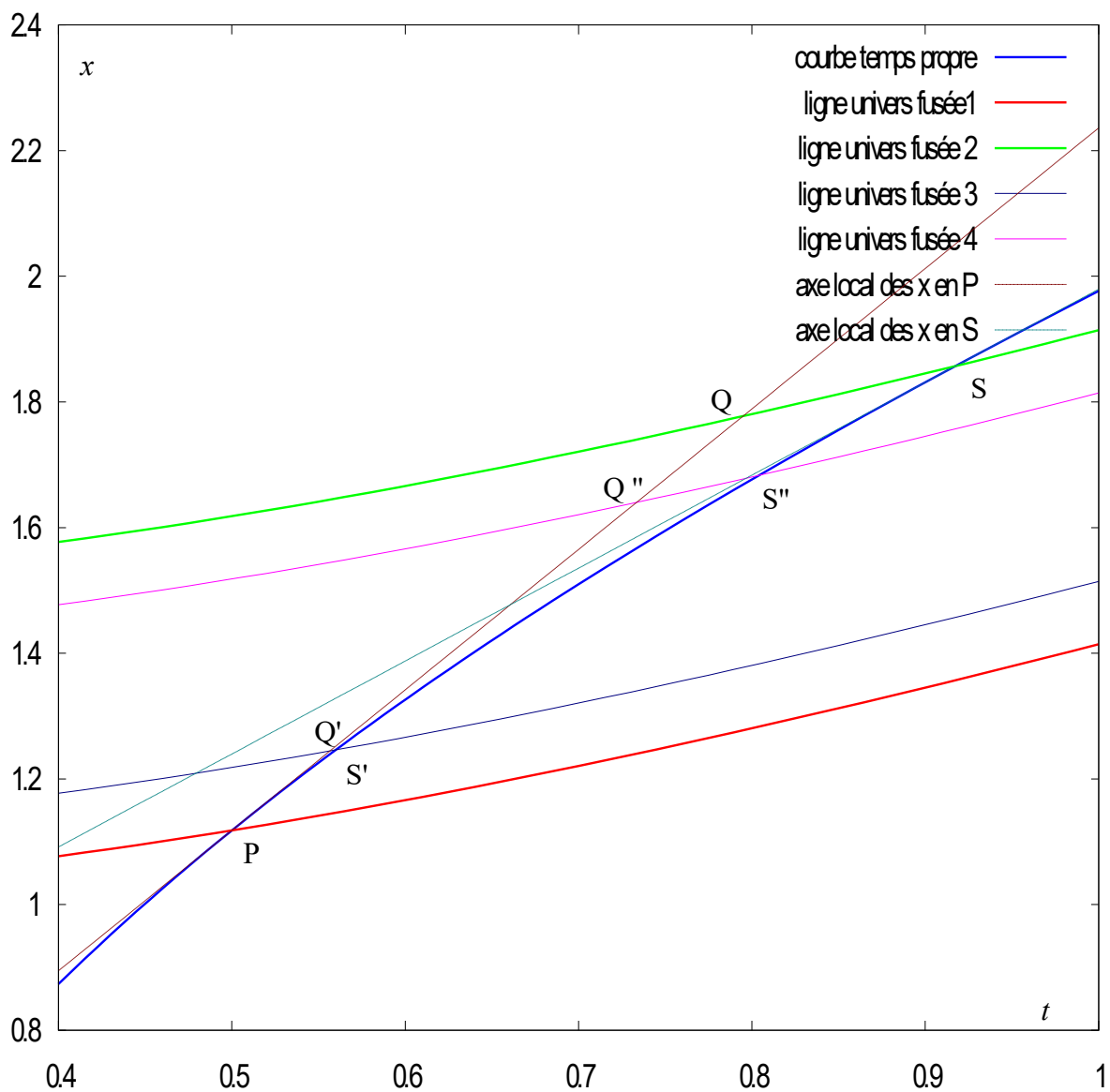
Fig. 13-5: [7] Zoom de la figure précédente.

### 9 Variation locale de longueur propre le long de la courbe (inhomogénéité) .

Lorsque nous allons traiter le problème de Bell (destin du lien entre les fusées) nous aurons à considérer les contraintes locales sur un fil reliant les deux fusées.

Nous ferons l'hypothèse que sous réserve que l'équilibre « local » soit respecté (condition adiabatique)<sup>80</sup> la représentation du lien épouse cette courbe. Rien n'impose que ces contraintes soient homogènes le long de cette courbe.

Pour l'instant considérons une chaîne d'un grand nombre de fusées régulièrement espacées au départ entre nos deux fusées, suivant la même loi d'accélération et intéressons nous à la variation de distance entre ces fusées en fonction du temps.



**Fig. 13-6:** [7]: Même figure que 3-5-1 mais avec deux fusées supplémentaires à  $d = 0,1$  et  $d = 0,4$ .

<sup>80</sup> Autrement nous sommes en régime transitoire et le calcul est alors plus complexe: La vitesse du son doit nécessairement intervenir et le critère de rupture est sans doute lié à une contrainte transitoire excédant la limite de rupture locale.

Le diagramme ci dessus illustre ceci pour deux fusées intermédiaires 3 et 4 chacune proche respectivement des fusées 1 et 2. Une propriété de la courbe de longueur propre est que comme elle est tangente à l'axe local des  $x'$  en tout point, ceci est aussi vrai pour les fusées 3,4. Les équations que nous avons établies vont donc être utilisables.

Calculons la longueur propre du segment de courbe PS', pour cet exemple:  $L_3 = d + \ln 2 + \ln[1+(1+t_0^2)^{1/2}] - \ln [\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}^2 - [e^{2d}]t_0^2] = 0.1 + \ln 2 + \ln[1+(1+0.5^2)^{1/2}] - \ln [\{1+(1+0.5^2)^{1/2}\}^2 - [e^{0.2}]0.5^2] = 0.11315264337337$ .

La longueur propre du segment de courbe PS'' vaut:  $L_4 = d + \ln 2 + \ln[1+(1+t_0^2)^{1/2}] - \ln [\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}^2 - [e^{2d}]t_0^2] = 0.4 + \ln 2 + \ln[1+(1+0.5^2)^{1/2}] - \ln [\{1+(1+0.5^2)^{1/2}\}^2 - [e^{0.8}]0.5^2] = 0.47507677892345$ .

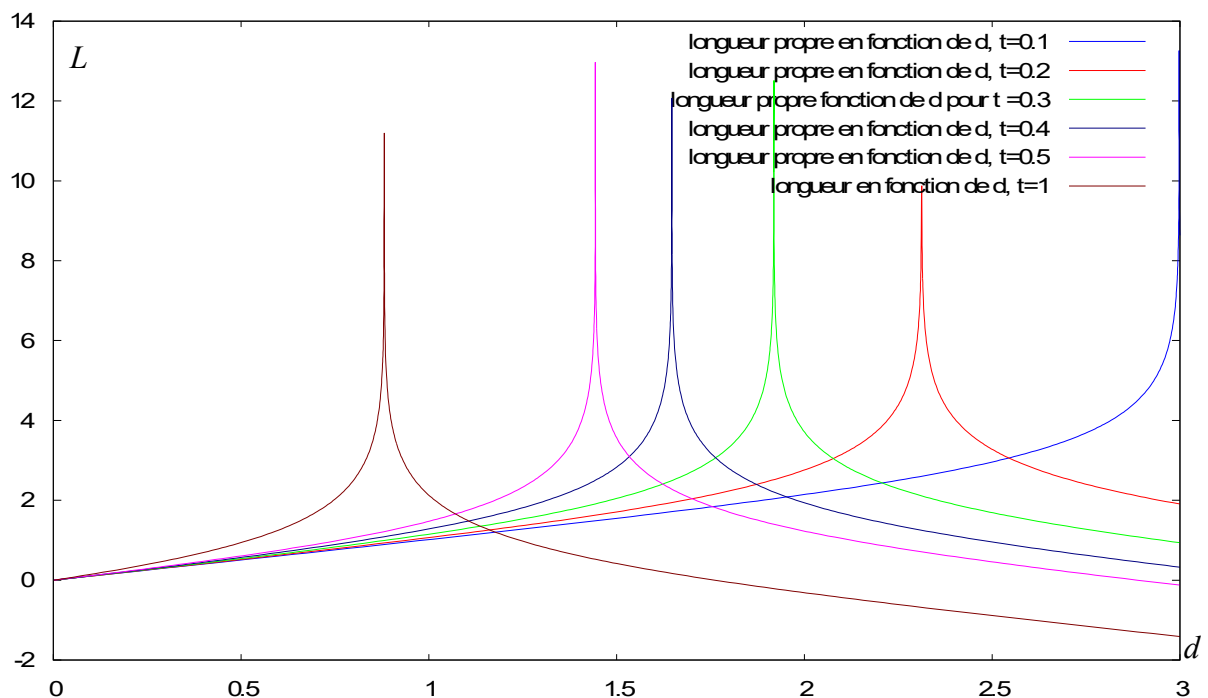
La longueur propre du segment de courbe PS vaut:  $L_{4\_2} = d + \ln 2 + \ln[1+(1+t_0^2)^{1/2}] - \ln [\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}^2 - [e^{2d}]t_0^2] = 0.5 + \ln 2 + \ln[1+(1+0.5^2)^{1/2}] - \ln [\{1+(1+0.5^2)^{1/2}\}^2 - [e^1]0.5^2] = 0.60692599483088$ .

Nous déduisons<sup>81</sup> que S''S vaut  $0.60692599483088 - 0.47507677892345 \approx 0.13184921590744 > 0.11315264337337$ .

L'allongement n'est pas homogène il est plus important du côté de la fusée poursuivie, ce qui traduit une phénoménologie compatible avec ce que nous avons déjà étudié (La fusée poursuivie est en avance dans tous les référentiels locaux accélérés) donc son accélération est plus grande.

Bien entendu, ceci n'est qu'un exemple, mais nous allons montrer qu'il se généralise.

Commençons par étudier la variation de longueur en fonction de  $d$  pour différentes valeurs de  $t_0$ .



**Fig. 13-7:** [7] Différentes longueurs propres en fonction de  $d$  pour des valeurs données de  $t_0$ .

81 Le calcul de l'intégrale se fait sur  $t$ , le long de la courbe, ce qui nous autorise à faire cela.



Nous voyons que la longueur propre diverge pour une certaine valeur de  $d$  toutes les valeurs de  $t_0$  que nous avons illustrées. Pour cette valeur de divergence, si le lien reliant les deux fusées est représenté par cette courbe, ce lien se casse nécessairement (c'est un majorant à la valeur correspondant à la rupture)

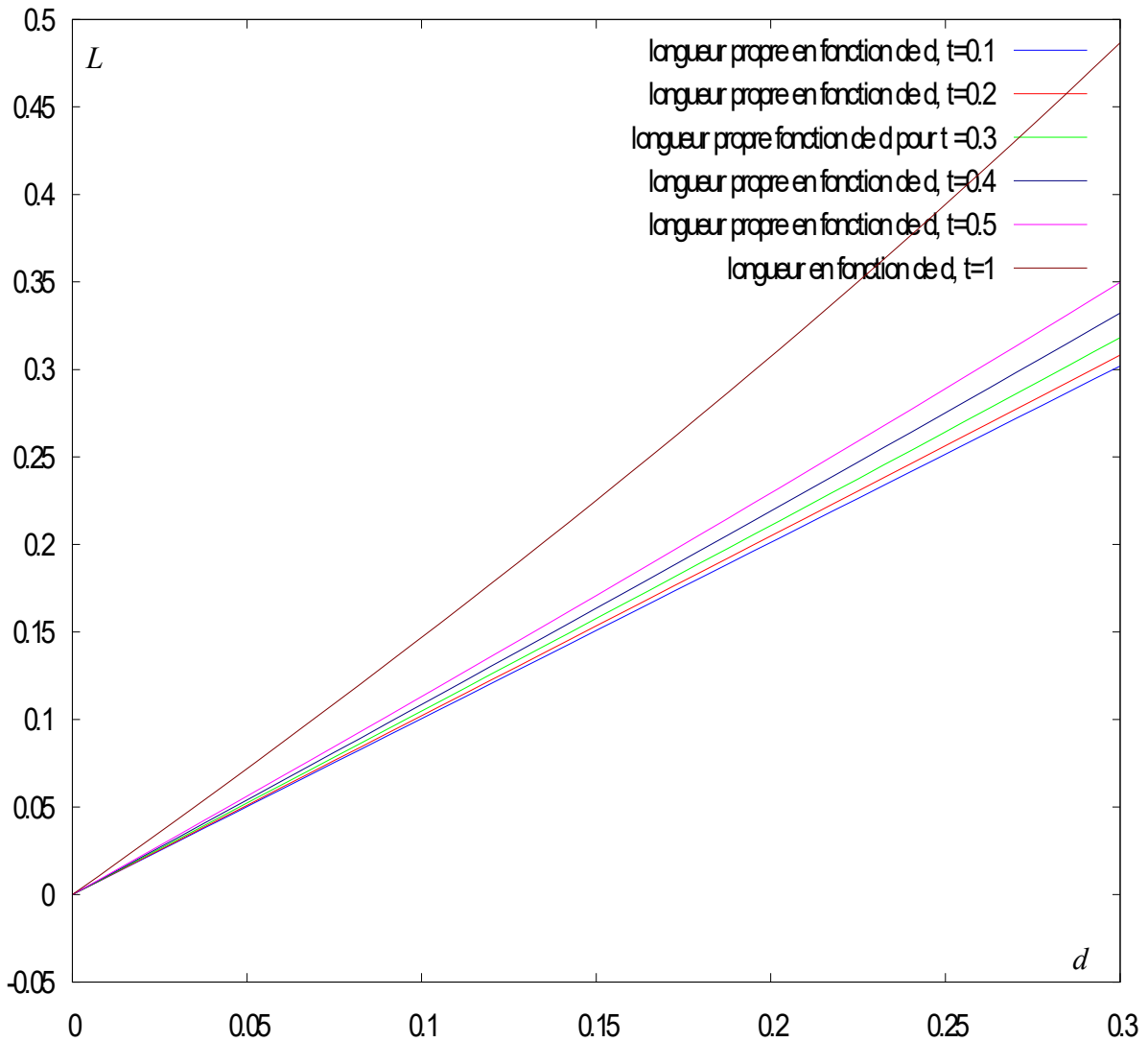


Fig. 13-8: [7] Zoom de la figure précédente: Ce zoom nous permet de visualiser l'allure de la courbe avant sa divergence. Nous voyons que les courbes pour différentes valeurs de  $t_0$  s'écartent les unes des autres et qu'elles présentent une courbure « positive » (la dérivée est croissante avec  $d$ ).

### 10 Variation locale de la longueur propre en fonction de $d$

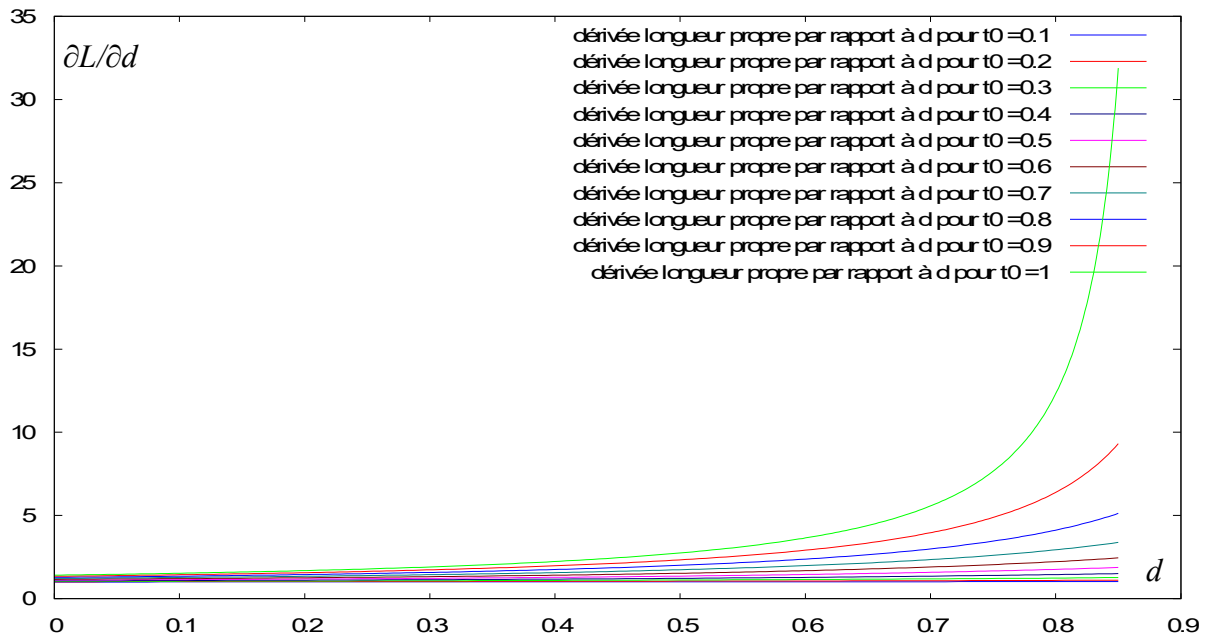
Pour étudier comment la longueur propre varie localement en fonction de  $d$ , pour une valeur de  $t_0$  donnée, il faut dériver la fonction longueur propre pour une valeur de  $t_0$  donnée par rapport à  $d$ .

$$L'_{(d)} = \partial_d L = 1 + 2 \cdot [e^{2d}] t_0^2 / \{ [1 + (1 + t_0^2)^{1/2}]^2 - [e^{2d}] t_0^2 \}.$$

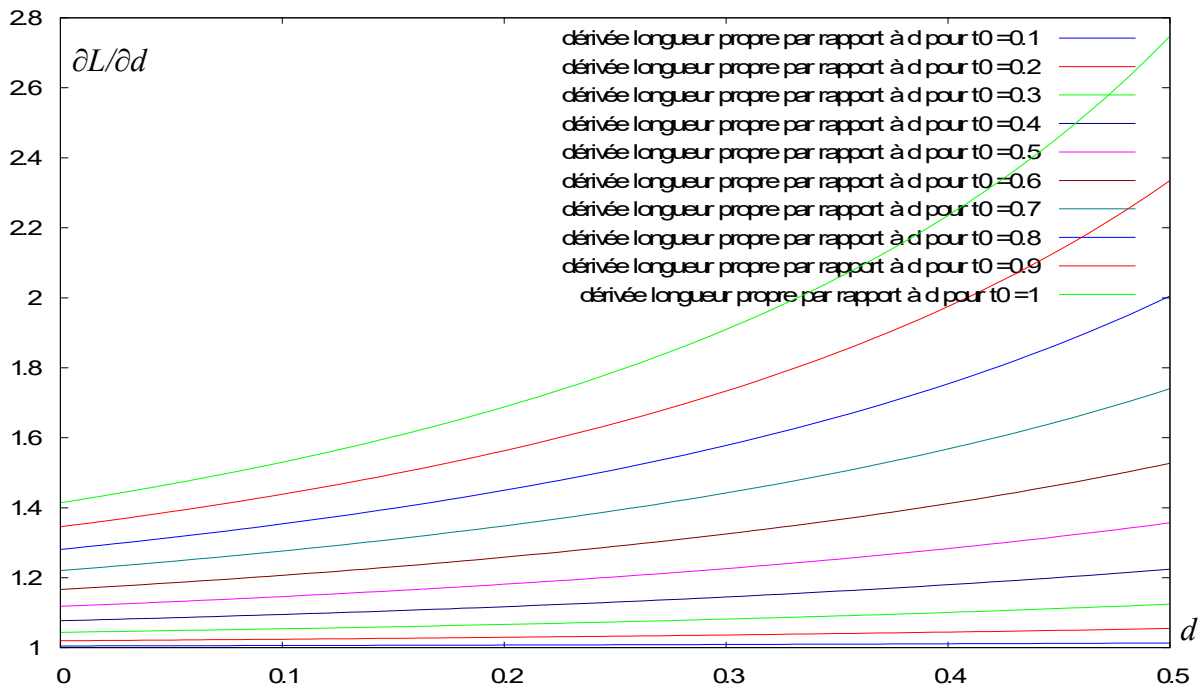
On voit que cette expression est toujours positive pour  $d$  croissant de 0 jusqu'à une valeur telle que:

$$d_{\underline{l}} = [1 + (1 + t_0^2)^{1/2}]^2 - [e^{2d}] t_0^2 = 0$$

Pour  $d = d_{\underline{l}}$ , la dérivée diverge, mais la longueur propre aussi. Nous pouvons nous intéresser qu'à la valeur de la dérivée jusqu'à  $d_{\underline{l}}$ : La longueur propre locale croît donc continuellement avec  $d$ .



**Fig. 13-9:** [7] Dérivée par rapport à  $d$  de la longueur propre pour des valeurs de  $t_0$  données. Nous constatons que les dérivées sont croissantes pour toutes les courbes: la longueur propre locale est une fonction croissante de  $d$  pour une valeur de  $t_0$  donnée.



**Fig. 13-10:** [7]: Dérivée de la longueur propre en fonction de  $d$  pour différentes valeurs de  $t_0$ . On voit que la dérivée est toujours positive et augmente en fonction de  $d$ ! Pour interpréter cela traçons les courbes donnant la longueur propre en fonction de  $t_0$  pour différentes valeurs de  $d$  et faisons les recoupements.

## 13-2 Phase accélérée puis phase inertielle. Quid de l'élasticité sur l'état final ?

### 1 Généralités et hypothèses

Nous avons traité ce problème à l'occasion de différentes phénoménologies dans le cas des fusées non liées, l'exemple typique étant donné au chapitre 6.

Dans le cas des fusées liées, si à l'arrêt total y compris le temps de "resynchronisation" le lien n'est pas rompu, qu'advient-il de la situation? La distance entre les fusées reste-t-elle inchangée ou le lien étant sous contrainte, sa force de rappel ramène-t-elle la distance à la valeur initiale<sup>82</sup>, à une autre valeur et comment? Cela influence-t-il sur la vitesse inertielle finale par rapport au cas des fusées non liées, par exemple en retournant à l'état initial (fusées au repos dans le laboratoire)?

### 2 Hypothèse 1: Les lignes d'univers sont identiques au cas des fusées non liées.

Considérons que, pour une raison physique à définir, les fusées décrivent des lignes d'univers identiques à celles du cas où elles sont non liées. Appliquons l'analyse de la longueur propre et de ses implications que nous avons réalisée dans ce chapitre, en la modifiant pour tenir compte de la transition entre la phase accélérée et la phase inertielle comme suit:

Notre courbe  $C$  que nous avons définie ne va s'appliquer que jusqu'au point où son extrémité supérieure (intersection avec la ligne d'univers de la fusée poursuivie) atteint la partie inertielle de cette ligne d'univers.

Ensuite la courbe le lien suit une courbe  $C'$  constituée d'un morceau (courbe) de ligne  $C$  jusqu'à ce que sa pente atteigne la valeur de celle de la partie inertielle en  $S$ , elle est alors complétée par la tangente à  $C$  en  $S$  jusqu'à couper la ligne d'univers de la fusée poursuivie en  $T$ .

Cette méthode va conduire progressivement, lorsque le temps croît, à une ligne  $C'$  totalement droite lorsque l'extrémité de  $C'$  sur la ligne d'univers de la fusée poursuivante atteint la partie inertielle. La suite est connue puisque nous sommes en régime inertiel stationnaire.

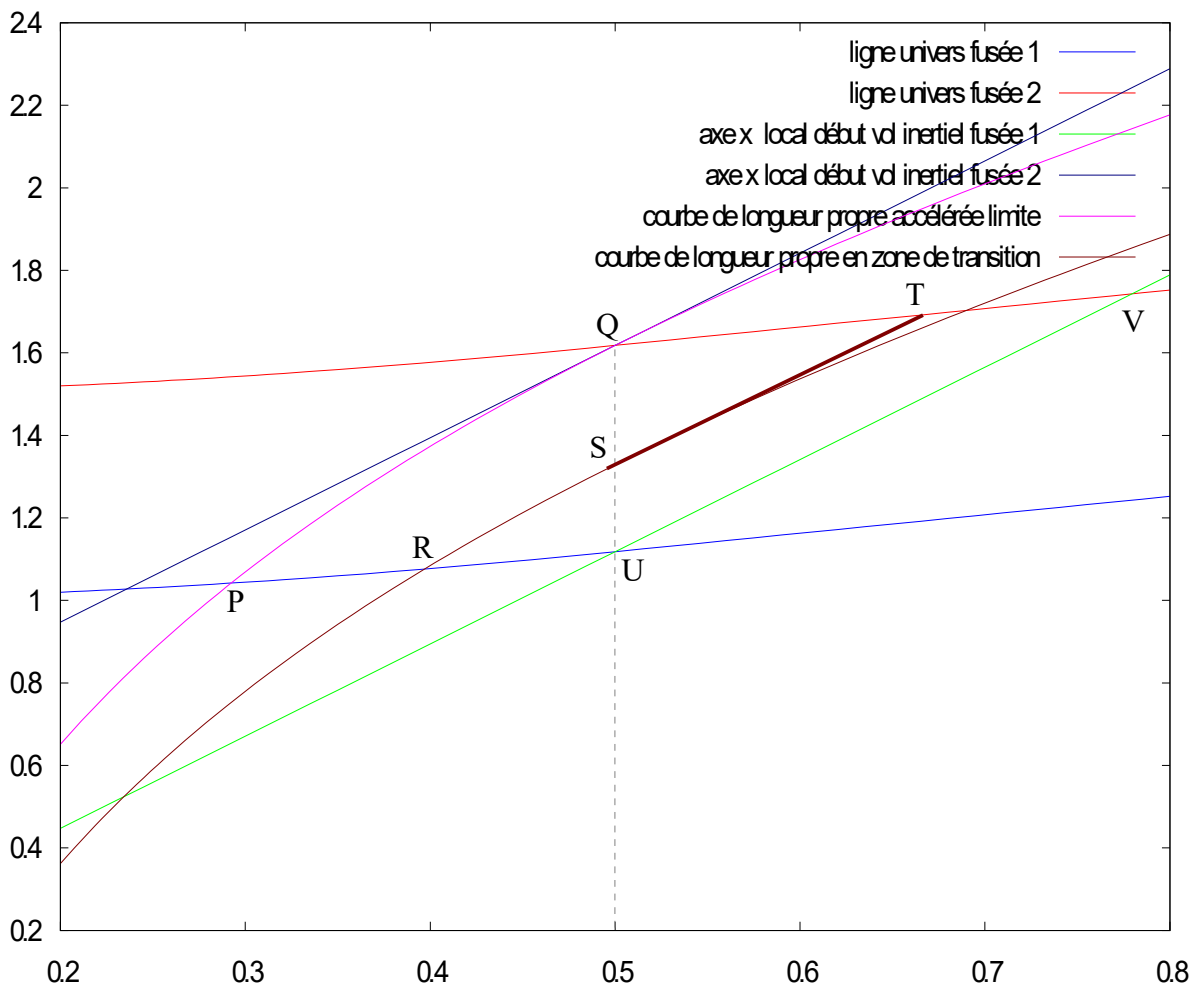
Notons qu'avant cette phase de transition entre le mouvement accéléré et le mouvement inertiel nous sommes dans le cas précédent que nous venons de traiter et qu'à la fin de cette période de transition nous sommes dans le cas traité au chapitre 6.

Cette analyse va préciser cette phase transitoire dans nos hypothèses permettant une description complète de l'évolution de la situation depuis le point de départ jusqu'à la phase inertielle établie.

On voit sur la figure ci-dessous que  $S$  est sur le segment  $QU$  ce n'est pas fortuit puisque pour une valeur de  $t$  donnée toutes les courbes de fusées accélérées (fictives) ont la même vitesse donc des axes  $x'$  parallèles.

---

<sup>82</sup> A priori, on ne voit aucun phénomène physique qui empêcherait le lien de reprendre sa longueur initiale. En effet si on considère le lien élastique constitué d'une chaîne d'un nombre  $N$  d'atomes liés par l'interaction électromagnétique, à la fin dans le référentiel inertiel final, c'est bien le même nombre  $N$  d'atomes qu'on retrouve et comme a priori les lois de l'électromagnétisme sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels cette chaîne doit être identique dans le référentiel galiléen propre. La longueur propre étant plus grande, le lien doit être sous contrainte donc dans ce référentiel inertiel il devrait se contracter sauf si nous aboutissons à une contradiction.



**Fig. 13-11** [7]. Avec ces éléments illustrés sur la figure ci dessus nous sommes en mesure de calculer la longueur propre dans la partie de transition. L'arc de courbe magenta  $PQ$  est la dernière longueur propre totalement accélérée, La ligne  $RST$  (marron) composée d'un arc de courbe  $RS$  prolongée par un segment de droite  $ST$  est une longueur propre hybride composée d'une partie accélérée et d'une partie inertielle, la droite  $UV$  est une longueur propre inertielle, donc soumise à la "contraction de Lorentz". La zone de transition est contenue entre la courbe  $PQ$  et la droite  $UV$ .

**Calcul de la longueur propre dans la zone de transition**

La longueur est la somme de deux intégrales, l'une sur la courbe de  $R$  à  $S$ , où la pente de l'axe des  $x'$  varie jusqu'à atteindre la valeur en  $U$  et l'autre sur le segment de droite  $ST$  où la pente vaut celle en  $U$  et est fixe.

Appelons  $t_i$  le temps au bout duquel dans le référentiel du laboratoire les fusées coupent leur moteur, c'est la coordonnée temporelle de  $U$  et  $Q$ . La pente de l'axe des  $x'$  pour un  $t_i$  donné vaut  $(1+t_i^2)^{1/2}/t_i$  en ce point. Reprenons les résultats du calcul de la longueur  $L$  propre de  $C$  entre les points  $R(t_0, x_0)$  et  $S(t_i, x_i)$ . Nous avons:  $L_{(RS)} = \ln(t_i/t_0)$

Ceci est une valeur bien précise car  $t_0$  et  $t_i$  sont donnés. Calculons  $ST$ . Commençons par les

coordonnées de  $S$ .

L'équation de la courbe  $C$  :  $x = (1+t^2)^{1/2} + \ln[(t\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}/t_0\{1+(1+t^2)^{1/2}\})]$

nous donne la valeur  $x_i$  de  $x$  pour  $t = t_i$ :  $x_i = (1+t_i^2)^{1/2} + \ln[(t_i\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}/t_0\{1+(1+t_i^2)^{1/2}\})]$

$t_i, x_i$  sont les coordonnées de  $S$ . Le segment  $SQ$ , longueur de  $ST$  dans le référentiel inertiel, vaut:

$$d + (1+t_i^2)^{1/2} - (1+t_0^2)^{1/2} - \ln[(t_i\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}/t_0\{1+(1+t_i^2)^{1/2}\})] = d - \ln[(t_i\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}/t_0\{1+(1+t_i^2)^{1/2}\})]$$

La vitesse  $v_i$  du référentiel inertiel en  $Q$  vaut  $v_i = t_i/(1+t_i^2)^{1/2}$  soit  $\gamma = (1/(1-t_i^2/(1+t_i^2)))^{1/2} = (1+t_i^2)^{1/2}$

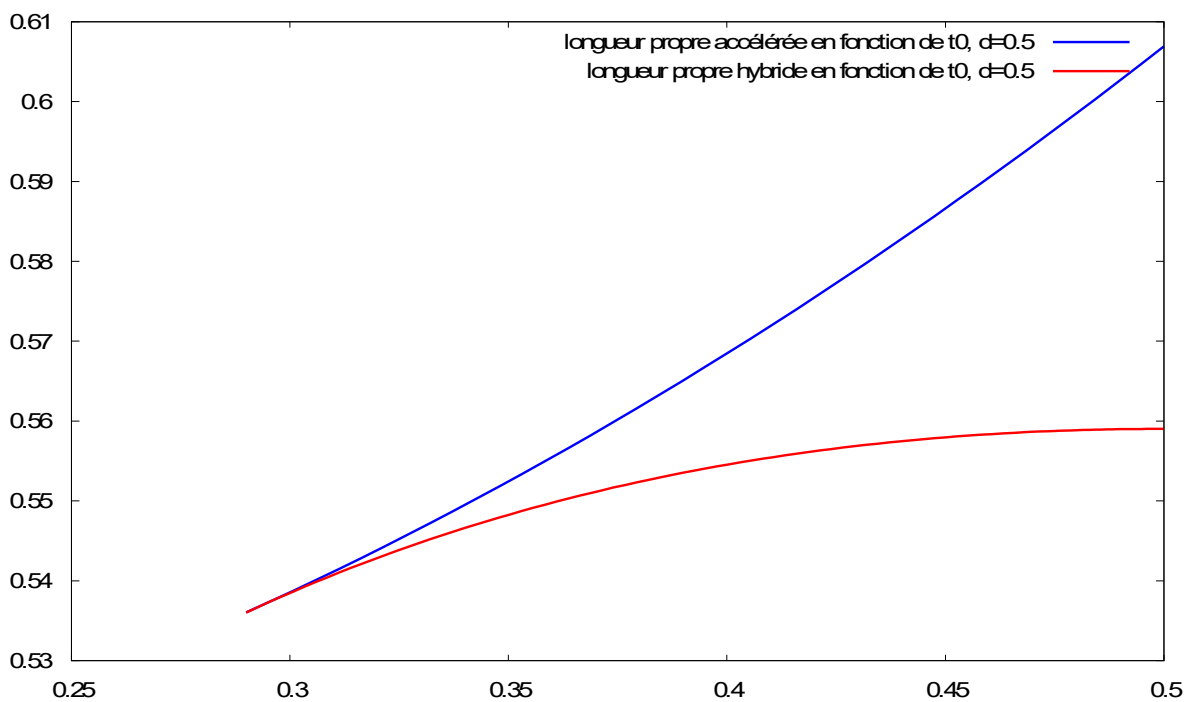
En conséquence  $ST = \gamma.SQ = (d - \ln[(t_i\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}/t_0\{1+(1+t_i^2)^{1/2}\})])(1+t_i^2)^{1/2}$

La longueur propre totale  $L$  dans la zone de transition vaut donc:

$$L = L_{(RS)} + L_{(ST)} = \ln(t_i/t_0) + (d - \ln[(t_i\{1+(1+t_0^2)^{1/2}\}/t_0\{1+(1+t_i^2)^{1/2}\})])(1+t_i^2)^{1/2}$$

Notons que pour  $t_0 = t_i$ ,  $L = d.\gamma$ , avec  $\gamma = (1+t_i^2)^{1/2}$ , ce qui est bien ce que nous escomptions.

Application numérique  $t_i = 0,5$ ,  $d = 0.5$  et des lignes d'univers  $x = (t^2 + 1)^{1/2} + d$  et faisons varier  $t_0$ .



**Fig. 13-12:** La longueur propre dans la zone de transition est la courbe rouge. La courbe bleue donne à titre de référence ce qu'elle serait si les fusées n'avaient pas coupé leurs moteurs à  $t = 0,5$ . Partant d'une valeur commune elles divergent notablement. La ligne d'univers rouge est horizontale au delà de  $t = 0.5$ . Sa valeur correspond bien à ce qui est prédit  $d' = d\gamma = 0.5.(1+0.5^2)^{1/2}$ .

Notons que le résultat obtenu satisfait bien aux hypothèses que nous avons posées pour la définition de la longueur propre en particulier les observateurs des deux fusées vont s'accorder sur la définition de cette "courbe" RST.

### **Equilibre local et contrainte dans le câble**

Nous avons vu (voir annexe 7) à propos du mouvement accéléré que la contrainte dans le câble liée au gradient d'accélération sur la courbe  $C$  que nous avons définie était équilibrée par la force élastique de rappel du câble conformément à ce qu'on est en droit d'attendre du fait du caractère stationnaire du phénomène.

En extrapolant au cas que nous traitons ici, on voit sur la figure 13-11 que le calcul fait en annexe 7 s'applique à la partie  $RS$  du câble mais que la partie  $ST$  étant inertielle elle ne s'applique certainement pas. Cette partie étant inertielle on peut supposer qu'il n'y a plus de gradient d'allongement puisque "l'allongement" est uniforme sur cette partie ( facteur  $1/\gamma$ ).

A la fin de la zone de transition (segment  $UV$ ) le câble est en situation totalement inertielle. Est il encore sous contrainte (fixe et uniforme par exemple) ou toute contrainte a elle disparue ce qui impliquerait que le câble reste en situation par un mécanisme physique à préciser.

### **3 Hypothèse 2 : Contraction élastique de la partie du lien en régime inertiel.**

Dans la phase accélérée nous avons considéré que la condition adiabatique s'appliquait, comme nous avons le choix des paramètres nous pouvions toujours y satisfaire. Mais les diagrammes que nous avons représentés (par exemple la figure 13-11) ne satisfaisaient pas du tout cette hypothèse. Nous avons fait ce choix pour bien accentuer le caractère du phénomène, mais sur ces figures, comme nous l'avions indiqué au début de ce document avec les unités utilisées, l'accélération ( $\alpha = 1 \rightarrow 3.10^8 m/sec^2$ ) est énorme et la distance considérable ( $d = 0,5 \rightarrow 1,5.10^8 m$ ).

Ici nous n'avons pas de choix. La durée de resynchronisation  $t = d\gamma v/c^2$  (voir 3-5 & 5) ne dépend que de la vitesse finale au moment (identique dans le référentiel du laboratoire) où les deux fusées coupent leur moteur et pas de la manière dont elle a été atteinte. En tenant compte de l'hypothèse adiabatique s'appliquait jusqu'au bout de la phase d'accélération, étudions la durée de cette phase par rapport à la phase d'accélération et quelles conclusions nous pouvons en tirer.

Au paragraphe précédent nous avons vu que sans lien, la croissance de distance propre entre les deux fusées prenait en compte la décroissance du retard de la fusée poursuivie (qui se convertit en distance au repos) dès le début de la phase de resynchronisation pour converger vers la longueur propre "inertielle" finale.

Si nous supposons comme précédemment que la masse des fusées et du lien est négligeable<sup>83</sup>, nous devons modifier le calcul du cas précédent représenté sur la figure 13-11 du fait que sur la partie inertielle représentée par un segment de droite une contraction "physique", régénérant la longueur initiale sans contrainte, s'applique (le facteur  $\gamma$  disparaît sur cette partie), ce qui modifie la trajectoire de la fusée poursuivie.

La longueur propre  $Le$  devient :

$$Le = \ln(t_i/t_0) + (d - \ln[ (t_i \{1 + (1+t_0^2)\} / t_0 \{1 + (1+t_i^2)\} ) ])$$

<sup>83</sup> Si ce n'est pas le cas on a une solution qui dépend des paramètres. Mais on fait l'hypothèse que la phénoménologie ne dépend pas de ces paramètres et on prend un cas limite certes (qui peut présenter des artefacts) mais plus simple!

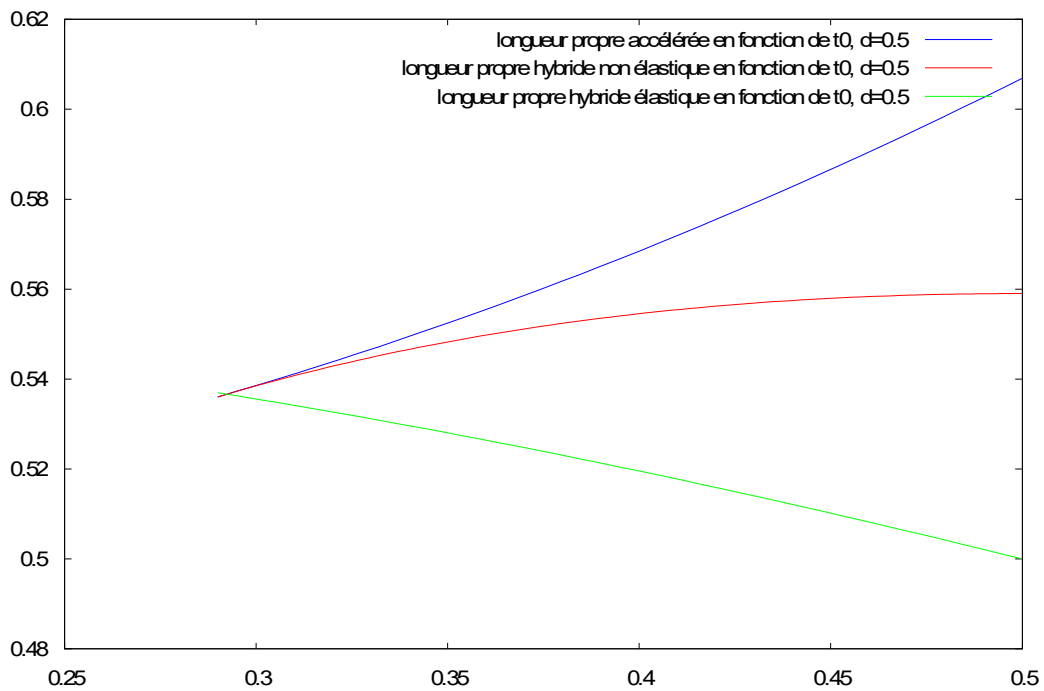


Figure 13-13: [7] Représentation des trois types de longueur propre.

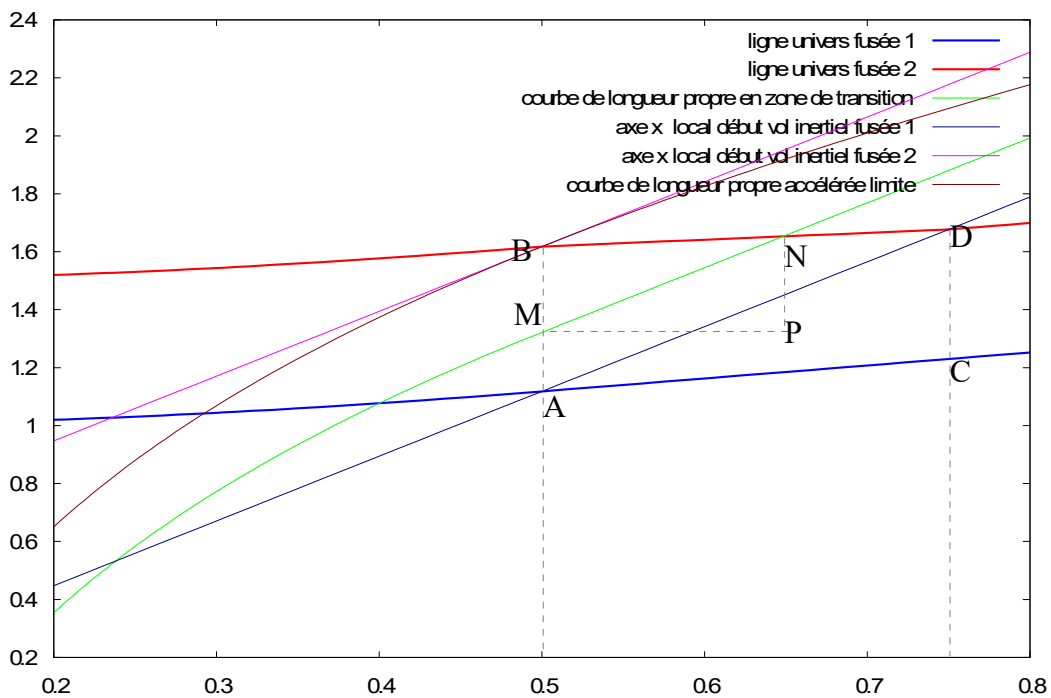


Fig.13-14 [7]: Représentation des lignes d'univers dans le cas où l'élasticité fait reprendre au câble sa longueur propre initiale. Par rapport à la figure 13-11 qui traitait le cas où on ne prenait pas en compte l'élasticité pendant la phase transitoire, on constate la modification de la ligne d'univers de la fusée poursuivie par rapport au cas sans élasticité et la distance plus faible (divisée par  $\gamma$ ) dans le référentiel du laboratoire sur la ligne CD à la fin de la zone transitoire. Au delà de D la ligne d'univers de la fusée poursuivie devient inertielle et est parallèle à celle de la fusée poursuivante: elles sont dans le même référentiel. Ici  $t_0 = 0.5$  et  $v_0 = 0.5(1+0.5^2)^{-1/2}$ ,  $\gamma = (1-v_0^2)^{-1/2}$ .

**Trajectoire de la zone transitoire de la fusée poursuivie : vitesse inertielle fixe.**

Si on appelle  $x$  la coordonnée du point  $N$ , qui engendre la courbe  $BD$  quant  $t$  varie. Si on pose:

$$y = BM, \Delta t = MP, \Delta x = PN, V = dx/dt, v_0 = t_0(1+t_0^2)^{-1/2} \rightarrow \gamma_0 = (1+t_0^2)^{1/2}$$

On a les relations:  $\Delta x = \Delta t/v_0, \quad y^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 \rightarrow y^2 = \Delta t^2 (1/v_0^2 - 1), \quad t = \Delta t + t_0,$   
 $x = (1+t_0^2)^{1/2} + d - y + \Delta x. \quad \rightarrow x = (1+t_0^2)^{1/2} + d - \Delta t(1/v_0^2 - 1)^{1/2} + \Delta t/v_0.$

Avec toutes ces relations où on a utilisé le fait que la longueur propre de  $MN$  est égale à  $MB$ , du fait de l'élasticité qui restaure en douceur la longueur initiale sur la partie inertielle (on suppose la condition d'équilibre local satisfaite), que la partie  $MN$  étant inertielle ce devait être une droite et que cette droite devait être tangente à la courbe de longueur propre en  $M$  ce qui implique que  $v$  est constant et vaut la valeur indiquée ci dessus, on obtient que l'équation de la ligne d'univers sur la partie  $BD$  est donnée, avec  $V$  vitesse de la fusée poursuivie en  $N$  et les conventions habituelles, par :

$$x = (1+t_0^2)^{1/2} + d + (t - t_0) (\gamma_0 - 1)/v_0 \cdot \gamma_0 = (1+t_0^2)^{1/2} + d + (t/t_0 - 1)((1+t_0^2)^{1/2} - 1). \quad (1)$$

$$dx/dt = ((1+t_0^2)^{1/2} - 1)/t_0$$

**Discussion de la solution obtenue dans l'hypothèse 2.**

La dérivée est constante, ce qui correspond à un segment de droite pour la ligne d'univers mais qui présente une discontinuité aux extrémités pour  $t = t_0$  et  $t = t_i$ , (si on appelle  $t_i$  la coordonnée de fin de la zone transitoire au raccordement à une trajectoire inertielle parallèle à celle de la fusée 1).

Ceci étant généralement considéré comme non physique (une discontinuité de vitesse implique une accélération infinie localement) mais n'oublions pas que nous avons considéré que les fusées comme le lien avaient une masse nulle<sup>84</sup>, ce qui peut expliquer le phénomène pour  $t = t_0$  et  $t = t_i$ , car dans nos hypothèses la force de rappel élastique agit et disparaît "instantanément" et il n'y a rien pour l'équilibrer.

Le segment  $MN$  n'est pas au repos dans le référentiel de la fusée 2.

Ceci qui parfaitement possible mais semble être en contradiction avec les hypothèses générales de principe adiabatique que nous avons faites, mais de nouveau un équilibre ne peut pas avoir lieu puisqu'il n'y a qu'une interaction en jeu (le rappel élastique).

Mais cela ne compromet pas le calcul de la longueur propre. Cela indique simplement que la fusée poursuivie subit une force de rappel qui la ramène vers la fusée poursuivante, mais qu'il n'y a pas d'équilibre d'équilibre local qui permettrait de définir une longueur propre du câble en RR comme pendant la phase d'accélération.

Un calcul plus réaliste devrait incorporer une masse pour les fusées et une vitesse de propagation du son dans le câble. Mais qualitativement cela ne devrait pas changer le résultat.

---

84 Si la masse n'était pas nulle le calcul serait différent, cette discontinuité n'existerait pas..



## 14- Synthèse

Dans cet essai nous avons exploré quelques versions du paradoxe des fusées de Bell. Face à des éléments plutôt dérangeants nous avons essayé d'y répondre en analysant par différentes méthodes complémentaires ce paradoxe. Si nous avons éclairci certains problèmes d'autres subsistent. Dans cette conclusion nous allons tenter de faire la synthèse des problèmes rencontrés, des éléments de réponse que nous y avons apportés, de celles qui restent en suspens pour lesquelles nous formulons cependant des hypothèses qui pourraient y apporter une solution.

### 1 Lignes d'univers parallèles.

#### *Cas accéléré*

Dans le cas apparemment simple de deux fusées identiques séparées par une distance  $d$ , qui dans le même référentiel, décollent simultanément et ont une poussée telle que leur accélération dans leur propre référentiel est égale tout le temps on arrive à des constatations plutôt confondantes<sup>85</sup>:

- Les accélérations des fusées restent égales dans le référentiel du laboratoire mais elles ne sont pas constantes. La contrainte est « affaiblie ». L'égalité résulte de l'invariance des phénomènes par translation spatiale dans le laboratoire.
- Pour chaque observateur de sa fusée son accélération reste constante, par hypothèse, mais chacun trouve (en la mesurant conformément aux règles de la *RR* dans son référentiel co-mobile) que l'accélération de l'autre fusée n'est pas égale à la sienne! L'indépendance des contraintes fait que ceci n'est pas contradictoire avec les hypothèses!
- Le laboratoire constate que les fusées maintiennent une distance constante entre eux, mais les observateurs dans leur référentiel co-mobile de leurs fusées trouvent que cette distance augmente!

Un parfum de chaos! En fait tout cela résulte de l'inexistence d'un référentiel commun aux deux fusées pendant tout le voyage.

Les mesures de distance "propre" en *RR* s'appuient sur le concept de simultanéité puisque la distance propre c'est l'intervalle d'espace-temps où la composante temporelle est nulle!

Il faut mesurer les deux extrémités simultanément et c'est là que le bât blesse puisqu'il n'y a pas de référentiel commun! Donc compte tenu des hypothèses rien ne contraint à trouver les mêmes valeurs!

#### *Que se passe t' il si après avoir accéléré les fusées décèlent?*

Nous avons complété l'analyse en supposant que les fusées renversaient leur poussée après un temps propre écoulé commun depuis leur décollage, de manière à décélérer. Le même type de phénomène est observé mais inversé, à savoir que cette fois, pour les observateurs de la fusée, la

---

<sup>85</sup> Rappelons que le fait que l'accélération propre soit constante ne génère aucun lien causal entre les lignes d'univers. Comme il n'y a pas de référentiel global entre des points de lignes d'univers indépendantes, ceci n'a donc, à priori, rien de paradoxal.

distance diminue entre eux. Si cette phase dure autant que la précédente la distance entre les fusées reviennent dans le référentiel du laboratoire, elles sont au repos par rapport à ce référentiel (mais pas au même endroit et ceci intervient dans la phénoménologie) et leur distance reprend sa valeur initiale. Si on continue le voyage de façon à fermer la boucle pour revenir non seulement dans le même référentiel mais aussi au même endroit, alors nous pourrions constater les effets du paradoxe de Langevin.

### *Après une phase d'accélération que se passe t'il si on coupe les moteurs?*

Cette absence de référentiel commun posant problème, pour éviter cela, nous avons alors supposé qu'après le phase d'accélération commune les deux fusées coupaient leur moteur au bout d'un temps propre commun et se retrouvaient en vol inertiel. Dans le diagramme de Minkowski, nous voyons que les fusées se trouvent alors dans le même référentiel, ce qui permet de mesurer leur distance propre.

Nous trouvons (par différentes méthodes) que cette distance s'est allongée d'un facteur  $\gamma$ . C'est ce que prédisent les formules de Lorentz appliquées à des référentiels inertiels. Comme ici, les lignes d'univers des fusées ne sont pas partout inertiels il était prudent de le calculer directement.

Nous trouvons donc le même résultat que celui que donnerait un calcul par les formules de Lorentz pures et dures!

## **2 Comment en est on arrivé là?**

Nous avons vu que, même en se limitant aux référentiels galiléens (cas où on coupe les moteurs après les phases non inertiels) les phénomènes observés dépendaient du référentiel galiléen concerné et de la position relative des observateurs dans ce référentiel. Les phases accélérés dans ce cas ne sont que des trajectoires de transfert permettant soit de changer de position (spatiale) dans un référentiel galiléen ou de changer de référentiel. On peut évidemment combiner ces opérations à l'envi pour obtenir la situation qu'on désire. Nous pouvons au moins traiter complètement ce cas qui correspond bien à l'objet de la RR.

La méthode que nous utilisons pour comprendre comment la phénoménologie dépend du référentiel et de la position est de partir d'une situation initiale où une infinité d'observateurs sont dans le même référentiel inertiel et au même endroit et de faire les opérations qui vont conduire ces observateurs dans différents référentiels en différents endroits.

On peut alors raisonnablement supposer que, comme au départ les observateurs étaient tous dans la même situation, les propriétés différentes qu'on observe ont été acquises et résultent des opérations réalisées pour conduire les observateurs à leurs positions finales. Nous voyons que sauf à supposer que la situation finale a toujours existé, des mouvements non inertiels sont nécessaires pour réaliser cela.

Etudions donc ce qui se passe au cours du transfert. Nous prendrons le cas particulier de trajectoires de transfert uniformément accélérées (décélérées) puisque ce sont celles que nous avons étudiées.

Nous commencerons par le cas des référentiels galiléens différents et enchaînerons par l'influence de la position dans un référentiel.

### **3 Le mystère de l'existence de référentiels galiléens:**

#### ***La variation de distance entre fusées est elle physique?***

Avant de répondre à cette question il est bon de rappeler le contexte dans lequel les unités physiques et les formules de Lorentz ont été établies pour s'assurer qu'elles sont bien applicables à notre problème.

Nous avons supposé que le référentiel galiléen existait et était balisé, ce qui veut dire que du point de vue d'un observateur particulier inertiel un certain nombre d'opérations, pour identifier les autres observateurs de ce même référentiel inertiel qui peuvent intervenir dans les expériences qu'il va conduire (il n'est pas nécessaire de le faire pour l'infinité théorique d'observateurs), ont été exécutées, pour s'assurer qu'ils sont inertiels n'ont pas de vitesse relative par rapport à lui, que leurs horloges sont bien synchronisées avec la sienne et connaître leur distance.

#### ***La synchronisation de « type newtonien » des horloges d'un référentiel inertiel.***

Il faut rappeler que cette synchronisation se réfère à un feuilletage à temps constant, autrement dit le temps que marquent les horloges s'affranchit du caractère fini de vitesse de propagation du signal le plus rapide (la lumière) et la simultanéité définie ici est la même que dans la théorie de Newton où aucune limite de vitesse n'existe.

Cette synchronisation ne peut se faire que dans des conditions restrictives, et nous avons vu que c'est bien le défaut de synchronisation qui est au cœur du paradoxe. Cette synchronisation nous sert à définir des longueurs entre les vaisseaux, avec les problèmes que nous avons vus, la question étant la signification physique qui peut être considérée comme conventionnelle dans la phase accélérée dans le vide et si on considère les fusées reliées par un câble nous avons vus que la solution (qui a certainement alors un sens physique), si on veut la traiter correctement est complexe!

Ce critère à été choisi par référence sans doute à nos conceptions usuelles d'espace-temps, mais est ce le critère le plus physique dans le contexte de la RR?

Ceci nécessite une acquisition d'information par des signaux lumineux et un échange d'information entre les observateurs permettant de les identifier afin qu'un message adressé à un observateur particulier soit parfaitement utilisable. Tout ceci n'est pas neutre du point de vue de l'information.

#### ***Balilage spatial du référentiel.***

On présente souvent le balilage spatial par une mesure de type arpentage. Notons que la méthode n'est pas totalement rigoureuse puisqu'elle suppose un déplacement (qu'on suppose infiniment lent il est vrai) ce qui est contraire aux hypothèses de la RR où les observateurs d'un même référentiel sont fixes les uns par rapport aux autres. Une méthode de mesure qui s'en affranchit serait plus respectable, quoi que toute méthode va nécessiter une information qui a un support matériel (dont les échanges de signaux lumineux, et les informations relatives aux paramètres des observateurs) donc une incidence physique sur le système.

***Données physiques dans un référentiel.***

On peut quantifier cette incidence par l'information qu'un observateur doit préalablement acquérir pour réaliser l'expérience. S'il n'a pas besoin d'autres observateurs que lui, comme dans le paradoxe de Langevin par exemple où le voyageur décrit une boucle, cette information sera supposée nulle.

Dans le cas des fusées de Bell, cela dépend des variantes, mais dans le problème de base, les fusées étant accélérées, à part le laboratoire dont le rôle n'est pas essentiel, la synchronisation n'existe pas et les mesures doivent donner lieu à des échanges incessants de signaux de synchronisation de part et d'autre pour obtenir les données variables du vol. Dans la version où les moteurs sont coupés cela vaut pour la phase accélérée et transitoire, mais dans la phase inertielle on est ramené au problème classique de la RR entre systèmes galiléens.

***Du caractère fini et constant de la vitesse de la lumière***

Le postulat de constance de la vitesse de la lumière mérite d'être approfondi.

En effet, nous savons que le principe de relativité impose une vitesse maximum sans en imposer une valeur.

Ne considérons que deux cas:

Vitesse infinie (c'est la gravitation newtonienne)

Vitesse finie (peu importe la valeur, et d'ailleurs valeur par rapport à quoi?).

Dans ce cas on obtient la RR.

Mais notons que c'est la structure de l'espace-temps de la RR qui contraint la vitesse maximum de la lumière, comme d'autres phénomènes ondes gravitationnelles par exemple) et non pas la vitesse de la lumière qui est constante de façon intrinsèque.

C'est cette limite qui va alors donner une échelle finie au temps, la lumière (au rayonnement électromagnétique en général) donnant la notion de parties par rapport à cette échelle par sa fréquence.

***a) Définition physique des unités de mesure de temps et longueur dans chaque référentiel, synchronisation d'un référentiel galiléen.***

Chaque observateur dans son référentiel inertiel définit la seconde et le mètre à partir d'horloges atomiques en supposant la vitesse de la lumière invariante.

Ils arrivent à priori à la même valeur propre. Mais si chacun observe l'expérience de définition du mètre par exemple faite par l'autre observateur que constate t'il?

Les fréquences subissent un « effet Doppler relativiste » mais la vitesse de la lumière reste constante donc la contraction de Lorentz va s'appliquer.

Chacun observe un mètre plus court que ce que l'autre, dans son référentiel propre mesure (c'est lié

à la définition du mètre à partir d'une fréquence).

La synchronisation des horloges entre 2 points quelconques A et B dans un référentiel utilise l'envoi de signaux lumineux<sup>86</sup> (par exemple, mais pas nécessairement) de sorte qu'on déclare synchronisées les horloges en A et B si le signal étant émis à  $T_1$  en A (contenant l'information  $T_1$ ) reçu et réfléchi (instantanément) en B à  $T_2$  (qui insère instantanément l'information  $T_2$  dans le signal réfléchi) et reçu à nouveau en A à  $T_3$  est tel que  $T_2 = (T_1 + T_3)/2$

On suppose qu'on dispose d'horloges atomiques (de même fréquence, à la précision de ces horloges près) en tout point du référentiel ou d'un point de vue concret on sait synchroniser toutes les horloges en asservissant par des impulsions émises en A toutes les horloges du référentiel<sup>87</sup> (cela est un processus qui prend un temps infini si on veut une précision infinie, mais si on se contente de la précision des horloges atomiques le temps est fini avec une gigue résiduelle). Autrement dit les horloges fonctionnent à la même fréquence (synchrones). Mais elles ne sont pas isochrones (même heure) pour autant. C'est à cette vérification que sert la procédure indiquée précédemment. Pour la mise à l'heure il faut que si  $T_2 \neq (T_1 + T_3)/2$ , A envoie à B une information lui indiquant la correction à faire, qui nécessite d'identifier B, la situation étant statique, la correction est définitive.

On voit donc que d'un point de vue pratique la méthode idéale proposée est irréalisable qu'on ne peut identifier (par une étiquette) qu'un nombre fini de points et que le format de l'heure (quelle format et portée pour l'information date/heure) impose également des contraintes.

Ceci est réalisable bien entendu, mais pas avec une étendue et une précision infinie, comme dans la théorie. Ce n'est pas seulement un problème de réalisation mais un problème de principe.

### ***b) Rappel du contexte où les formules de Lorentz ont été établies.***

Mais alors que dans les transformations de Lorentz, on s'intéresse à la mesure d'une distance, entre deux objets qui ont toujours été dans un certain référentiel galiléen, telle que mesurée dans un autre référentiel galiléen dans lequel ces objets n'ont jamais été, ici ce n'est pas le cas, le système a une histoire.

En effet, les objets ont d'abord été dans un référentiel inertiel puis sont allés dans un autre référentiel inertiel, au moins dans le cas (14-1-3), et on a calculé la variation de distance entre les deux objets.

Il se trouve qu'on obtient le même résultat, dans les deux cas ceci montrant que le phénomène ne dépend pas de son histoire mais seulement de son état présent (phénomènes markovien) si on ne prend en compte que la partie inertielle..

c) Nous sommes cependant face à une énigme intéressante.

Dans le cas classique de référentiel inertiels "infinis éternels" symétriques tels que ceux considérés par Einstein pour l'établissement de la RR où cette variation de longueur est "symétrique"(on peut aussi dire réciproque car la mesure de la longueur d'un objet situé dans un autre référentiel est plus petite que la mesure du même objet dans son propre référentiel), nous n'avons aucune raison d'affirmer que cette variation de longueur était réelle.

<sup>86</sup> Par exemple, mais pas nécessairement, ce qu'il faut c'est que la vitesse du média soit constante et identique dans les deux sens.

<sup>87</sup> Les réseaux de télécommunications numériques synchrones fonctionnent ainsi.

La réciprocité de la contraction nous incite même à penser qu'il s'agit d'un effet de perspective lié à la méthode de mesure édictée par la RR.

Ici ce n'est pas le cas, nous pouvons affirmer que cet allongement est physique puisqu'au départ nous avons mesuré une distance propre également physique dans un même référentiel (le laboratoire). Autrement dit la distance mesurée par l'étalon local (fréquence) a augmenté.

De tels référentiels inertiels éternels existent ils? Thibault Damour fait observer que:

“Notons que le principe de relativité constate, sans l'expliquer, l'existence de repères privilégiés où les lois de la physique revêtent une forme simplifiée. Le fait empirique que ces repères sont, avec une bonne approximation, non accélérés par rapport aux étoiles fixes reste incompris. Une détermination théorique satisfaisante des repères inertiels eux-mêmes, en fonction, par exemple, de la distribution de la matière dans l'univers (principe de Mach), n'existe pas actuellement”.

L'ensemble de tous les référentiels inertiels (infinis et éternels) possibles (les géodésiques) génère un espace-temps physique (muni de la métrique de la RR), l'espace-temps de Minkowski, superposition d'espaces statiques de Minkowski à l'image de l'espace de Fock par rapport à Hilbert.

Soulignons que “infini et éternel” signifie que n'importe quel observateur en n'importe quel point de l'espace-temps verrait ce référentiel comme nous le voyons. Pour ce qui nous concerne nous pouvons affaiblir ce concept en y incluant des référentiels dont une partie se trouve derrière un horizon des événements, ce qui fait que s'il s'est passé quelque chose nous ne pouvons pas le connaître.

Peut on inclure dans cette catégorie des systèmes de référentiels inertiels qui auraient pu être issus les uns des autres que nous pourrions connaître mais où nous ne disposerions pas de l'information?

Ce dernier point pose le problème du rôle de l'information dans l'évolution de l'état d'un système, donc de la nature et de la stabilité des lois physiques vis à vis de l'information.

En effet si les lois (ou l'état du système) étaient sensibles à la connaissance de l'origine des systèmes inertiels, et si cette connaissance était possible nous trouverions des résultats différents selon que nous disposons ou non de l'information.<sup>88</sup> Ceci n'étant d'ailleurs pas impossible dans la mesure où la connaissance implique une expérience donc une interaction avec le système dont l'état va s'en trouver modifié.

En relativité, en général, on ne considère pas que la mesure perturbe le système, ce qui explique qu'on trouve la même chose dans les différents cas, ce que confirme le résultat trouvé précédemment<sup>89</sup> qui nous indique que la phénoménologie est indépendante de la connaissance cette information, mais nous allons voir que pour être sûr du résultat il faut “briser” la symétrie<sup>90</sup> (faire une expérience), autrement l'origine du système de référentiels inertiels est indécidable.

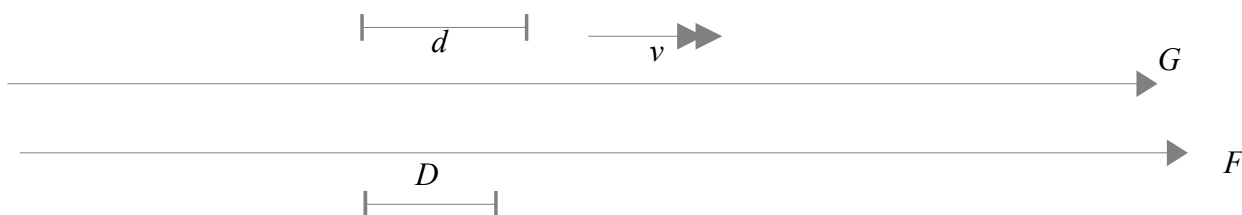
Nous savons qu'un événement indécidable doit pouvoir être changé sans que cela n'influe sur la suite et nous allons le montrer sur notre exemple précis.

88 En mécanique quantique de tels effets existent (expérience des fentes de Young avec ou sans détecteur sur une fente).

89 Rappelons que la cohérence de la physique vis à vis de ce type de lois veut qu'elles ne dépendent que de la vitesse relative de deux référentiels inertiels indépendamment de la façon dont ils ont été générés! Ici c'est bien le cas la même transformation de Lorentz s'applique. Une distance  $d$  dans un système inertiel est mesurée  $D$  avec  $D = d/\gamma$ .

90 Cela rappelle la mécanique quantique où l'état d'un système est connu quand on fait une expérience!

Si nous ne savons pas comment deux référentiels inertiel  $F$  et  $G$  de vitesse relative  $v$  ont été générés, nous pouvons toujours les réunir en un seul en utilisant la méthode exposée dans cet essai. Faisons le choix d'orientation défini sur la figure ci dessous <sup>91</sup>.



Ajoutons que les accélérations positives sont orientées vers la droite sur le diagramme.

Sur les référentiels ci dessus supposons que  $G$  décélère jusqu'à se confondre avec  $F$ . La longueur  $d$  dans le référentiel  $G$  est mesurée  $D = d/\gamma$  dans  $F$ . En décélérant, nous avons vu que les longueurs sont physiquement contractées.

Nos calculs indiquent que lorsqu'il arrive en  $F$  le segment  $d$  aura une longueur contractée par un facteur  $1/\gamma$  c'est à dire que la longueur va être égale à  $D = d/\gamma$ , soit exactement ce que mesurait  $F$ .

Notons que ceci peut représenter l'opération inverse de ce qui s'est produit quelque part et qui aurait généré les deux systèmes à partir d'un seul, ici à savoir  $F$ .

Mais peut être que c'est l'inverse qui s'est produit et que en fait c'est  $F$  qui a été généré à partir de  $G$ : Dans ce cas,  $F$  accélère de sorte à se confondre avec  $G$ . Nous savons que les distances spatiales vont augmenter dans ce cas. Ainsi,  $D$  va être étiré d'un facteur  $\gamma$ , sa longueur va alors s'établir à  $D \cdot \gamma = d$ .

Nous avons remarqué le caractère conventionnel de l'orientation du critère « accélération » par rapport à un référentiel inertiel lorsqu'un observateur le quitte, mais une fois le sens choisi pour l'accélération, la décélération correspond au sens contraire (et vice versa).

Nous avons montré que quelle que soit la manière dont les référentiels ont été générés, ( $F$  issu de  $G$  ou  $G$  issu de  $F$ ), on obtient le même résultat (il existe bien sûr d'autres possibilités mais par récurrence nous pourrions montrer également ce résultat). Si on part avec deux objets de même longueur, (une règle par exemple qui sert à arpenter le référentiel), chaque objet sera dans son référentiel la représentation physique de l'autre et ils retrouveront leur égalité originelle si on les ramène dans un même référentiel.

Mais ceci confirme bien que nous n'avons pas moyen de nous en assurer sauf à faire ce genre d'opération qui brise la symétrie. Nous devons donc "faire confiance" à la théorie si nous ne voulons pas briser cette symétrie. La méthode de mesure (sans brisure de symétrie) de la longueur d'un corps en mouvement qui utilise des signaux lumineux, ce qui a un caractère plutôt conventionnel, prédit un résultat qui est le même que celui qu'on obtient en brisant la symétrie.

Ceci n'est pas trivial, c'est manifestement une propriété de l'espace-temps de Minkowski, qui pour des géodésiques inertielles animées d'une vitesse relative, montre une différenciation relative en ce qui concerne la mesure de l'espace et du temps. Ceci est bien mystérieux car pour des référentiels inertiels, nous ne voyons pas de cause physique qui pourrait expliquer en particulier compte tenu du

<sup>91</sup> Ce choix est arbitraire, il est facile de vérifier qu'un autre choix donne les mêmes résultats.

caractère relatif de ces différences. Décidément cet espace-temps de Minkowski est bien singulier!

Pourtant il ne faut pas s'étonner du résultat car précisément rappelons qu'il a été construit sur l'invariance des lois physiques dans les systèmes inertiels. Du coup c'est cette invariance qui semble mystérieuse.

Le fait le temps passé dans un système inertiel animé d'une vitesse par rapport au système inertiel initial puisse avoir une incidence sur le rythme de l'horloge nous conduit à reconsidérer notre conception du temps propre qui est en fait proportionnel à l'action sur la trajectoire considérée.

#### **4 Feuilletage de l'espace-temps de Minkowski en référentiels inertiels.**

On peut feuilleter l'espace-temps de Minkowski en référentiels inertiels qui sont des espaces temps 4D statiques.

Comment passer d'une feuille à l'autre?

Il faut fournir une action pour faire passer un objet de l'un à l'autre, ceci pouvant être enchaîné et combiné de toutes les manières.

Cela suggère l'espace de Fock en mécanique quantique, sur-espace de Hilbert décrivant l'état d'un système (en particulier le nombre de particules) et sa dynamique (les transitions par des quanta d'action).

L'action, avec son quantum si on considère la mécanique quantique, plus que le temps, semble être la variable fondamentale et la différence d'action entre deux chemins différents dans l'espace-temps entre deux points donnés de l'espace-temps doit traduire une propriété de cet espace-temps illustrée par le feuilletage en référentiels galiléens: L'action entre deux points étant différentes le temps propre proportionnel à cette action est physiquement différent.

Ceci respecte la causalité compte tenu du caractère fini de la vitesse de la lumière (qui s'applique à toute information qui pourrait être échangée sous quelque forme que ce soit).

C'est le fait que sur une trajectoire réelle l'action augmente mais de façon différente dans les deux référentiel, alors que sur une trajectoire lumière elle est constante qui doit régir notre conception du temps propre et pas notre sensation inspirée du milieu particulier dans lequel nous vivons.

#### **5 Dynamique en RR.**

Maintenant examinons comment nous pouvons passer d'un référentiel à un autre.

Un espace de Minkowski est vide, donc s'il y a transfert d'une particule par exemple d'un référentiel sur un autre, il faut trouver une raison.

Comme il n'y a aucun champ pouvant provoquer cela (sauf à le négliger car ce champ devrait être traité par la relativité générale) on peut considérer des interactions élastiques entre particules associées à des référentiels différents.



Ceci est décrit par la dynamique relativiste:

Décrivons un exemple qui conduit au paradoxe de Langevin.

Considérons des particules de même masse, et un système de 6 référentiels inertiels, (étiquetés de R-3 à R2) de vitesses relatives telles que d'un référentiel au suivant la variation d'impulsion, évaluée dans le laboratoire R0, entre les référentiels adjacents soit égale à 1 (unité quelconque). On les suppose peuplés, au départ, de n particules chacun.

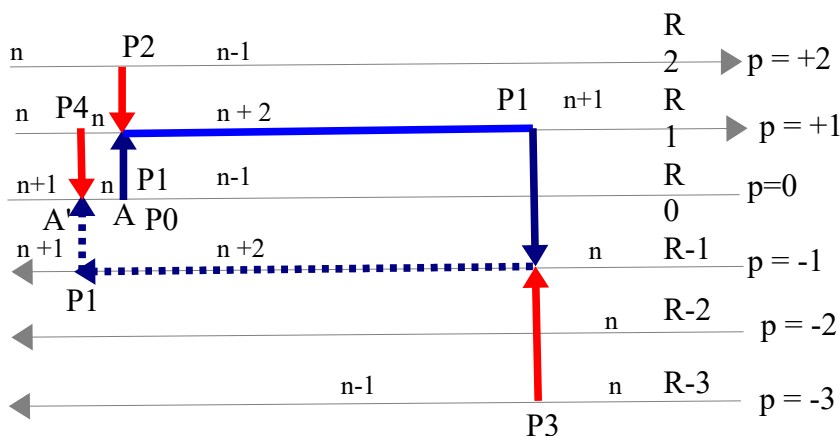
Soit deux particules P0 et P1 (au repos impulsion  $p = 0$ ) dans le référentiel R0 (laboratoire). En A la particule P1 entre en collision avec une particule P2 dans le référentiel R2, d'impulsion  $p = 2$ .

S'agissant d'un choc frontal, par conservation de l'impulsion, P2 communique à P1 une impulsion  $p = 1$  ce qui fait monter P1 dans R1 et elle même voit son impulsion devenir  $p = 1$  ce qui la fait descendre dans R1.

Au bout d'un temps propre  $t_1$  dans R1 (action  $a.t_1$ ), P1 entre en collision avec P3 qui dans R-3 à une impulsion  $p = -3$  (de sens opposé) à celle de P1 dans R1.

P1 et P3 sont projetés dans R-1, leur impulsion devient  $p = -1$  (donc orientée dans l'autre sens pour P1) et lorsqu'elle arrive en vis à vis de son point de départ A une particule P4 d'impulsion  $p = 1$  opposée à P1 (dans R-1) remet la particule dans R0 exactement à son point de départ avec  $p = 0$ .

Ceci est représenté ci dessous. Calculons en utilisant la dynamique relativiste comparons les destins et actions des particules P0 et P1!



**Diagramme spatial simplifié du processus.**

Le chemin spatial est fermé bien que représenté ouvert sur la figure pour la clarté de l'exposé. Nous représenterons le diagramme spatio-temporel plus loin (A et A' sont confondus ici).

Les horizontales orientées représentent les référentiels inertiels, leur espacement est tel que les impulsions sont celles représentées sur le diagramme en unité arbitraire. R1 est le référentiel de départ de la particule P1 et celui où reste P0.

Le nombre de particules est au départ égal à n dans tous les référentiels. La collision P1-P2 fait monter P1 de R0 dans R1 et descendre P2 de R2 en R1. Le nombre de particules diminue de 1 dans R0 et R2 et augmente de 2 dans R1. La collision entre P1 et P3 fait descendre P1 de 2 niveaux et

monter P3 de 2 niveaux, cela dépeuple de 1 élément R1 et R-3 et peuple de 2 éléments R-1. La collision entre P1 et P4 qui ramène P1 à son point de départ (spatial), l'aspect temporel n'est pas représenté sur ce diagramme, dépeuple R-1 et R1 d'un élément et peuple R0 de deux éléments.

Si on fait le bilan en nombre de particules, à la fin du processus,

- R0 : n+1 particules, (+ P4 )
- R1: n particules, (+P2, - P4)
- R2: n-1 particules, (-P2)
- R-1: n+1 particules, (+P3)
- R-2: n particules
- R-3: n-1 particules. (-P3)

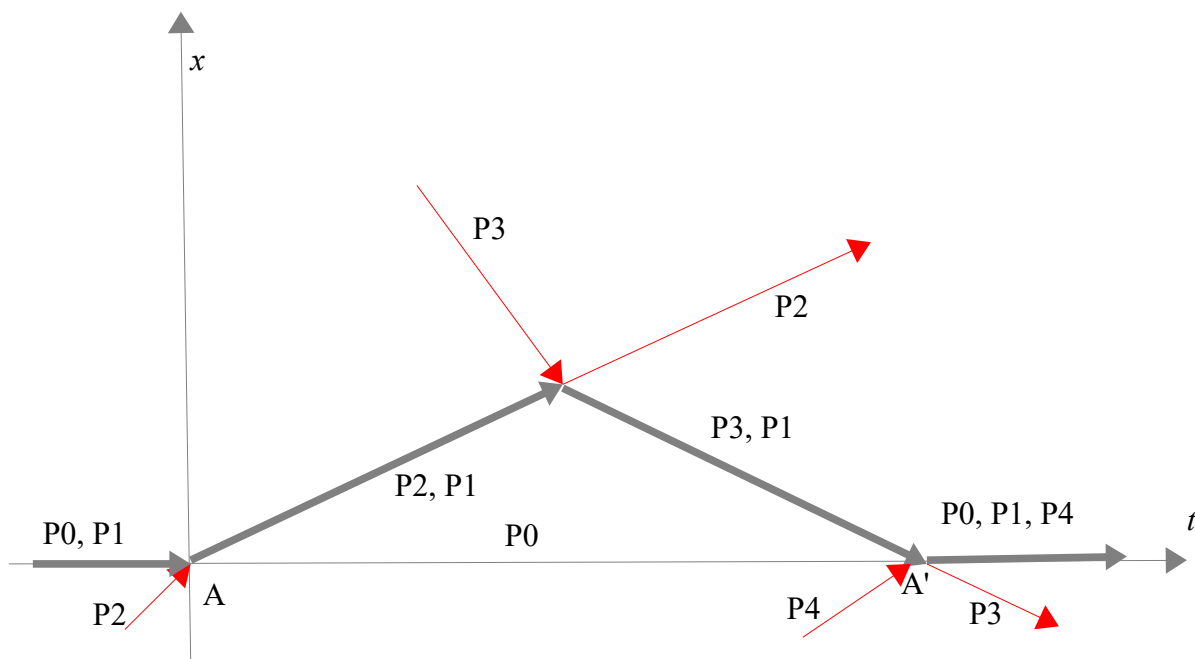
Le nombre de particules du système est conservé.

Si on fait le bilan comparatif en impulsion, les différences par rapport au départ sont:

- Transition de R2 vers R0:  $p = -2$
- transition de R-3 vers R-1:  $p = +2$

L'impulsion dans la système est conservée.

## 6 Représentation spatio temporelle.



**Diagramme schématisé spatio temporel du même processus.**

La ligne d'univers suivie par P1 est représentée en noir en trait épais. Les points de collision et la trajectoire des particules impliquées dans le processus sont représentées. On voit bien que si P1 était

resté au repos, le système aurait été dans un état différent en A'.

## 7 Infinité des chemins conduisant au même état

Nous avons traité un cas particulier, mais il est évident que par symétrie, il y a une infinité de processus différents (qu'on peut définir par des chemins sur le diagramme temporel) qui à partir du même état initial conduisent au même résultat final en ce qui concerne P0 et P1.

Ce processus peut mettre en jeu un nombre d'interactions variant de 1 à n (n aussi grand que l'on veut) et à supposer que si la probabilité d'une interaction est constante et égale  $p$  la probabilité associée doit être en  $p^{-n}$ .

Cette supposition d'égale probabilité est douteuse, en effet, en accord avec la dynamique relativiste, la probabilité devrait dépendre d'un autre paramètre qui doit s'apparenter à la « section efficace » et qu'on peut supposer inversement proportionnelle (au carré ?) de la vitesse relative entre référentiels. Donc sans quitter le caractère qualitatif de ces remarques (qui nécessitent un complément quantitatif) on peut faire observer que ceci est semblable à l'infinité des modalités à prendre en compte pour calculer l'intégrale des chemins dans l'électrodynamique quantique. Comme la mécanique quantique se déroule dans un espace de Minkowski et traite de l'interaction entre particules cela ne doit pas surprendre!

Cela sous tend qu'on ne sait distinguer que l'état initial et l'état final et que toutes les possibilités conduisant au changement d'état du système, avec leur probabilités associées doivent être considérées dans le calcul des paramètres du phénomène.

Ceci donne un autre éclairage au mécanisme de l'intégrale des chemins de Feynman!

## 8 Le système garde la mémoire du processus.

En effet si le total en nombre de particules est conservé ainsi que le bilan en impulsion, comme on vient de le voir, il n'est pas réparti de la même manière que si P1 n'avait subi aucune collision.

Par ailleurs, sur la ligne d'univers suivi par la particule P1 on note un surnombre de particules par rapport à la situation initiale, pour chacun des tronçons empruntés.

## 9 Une interprétation physique de la contraction du temps et des longueurs.

A supposer qu'un phénomène physique comme l'inertie lié à un référentiel inertiel dépende du nombre n de particules qu'il comporte qu'on avait supposé être égal au départ dans un souci de rendre tous les référentiels identiques alors on peut donner un sens physique au ralentissement du temps si cette inertie augmente, les phénomènes physiques comme les fréquences émises par un atome pouvant dépendre de l'inertie.

Ceci fournirait une explication physique au ralentissement du temps et tout ce qui y est associé comme la longueur, par exemple, puisque l'étalon de longueur est déterminé par une longueur d'onde d'un atome dont la fréquence dépend du temps.

## 10 Bilan dynamique

Pour la dynamique nous avons considéré des processus 2 vers 2 (chocs élastiques) en RR. Les relations applicables sont:

Conservation de l'impulsion si  $p_1$  et  $p_2$  sont les impulsions des particules P1 et P2 avant la collision et  $p_3$  et  $p_4$  après la collision les invariants (de Lorentz) utilisés sont:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2$$

L'énergie totale dans le référentiel de centre de masse des particules avant collision, vaut:

$$E_{t_{ot}} = c \cdot s^{-1/2}$$

En fait, dans ce qui précède, nous avons utilisé le premier invariant..

Pour calculer l'action, il faut intégrer l'énergie  $E$  sur la trajectoire de la particule de masse  $m$ . En RR, dans le référentiel de la particule son énergie est:

$$E = mc^2$$

En l'intégrant sur les différents tronçons on obtient l'action  $S$ ..

L'intégrale du chemin est le temps propre  $\tau$ , donc nous obtenons:

$$S = m^2 c^2 \tau$$

Comme  $mc^2$  est constant l'action est proportionnelle au temps propre.

## 11 Caractère perturbatif du phénomène décrit.

Dans l'analyse faite ci dessus nous avons considéré un référentiel inertiel qui bien entendu est quelconque. Nous avons considéré des phénomènes en lui faisant jouer (apparemment) un rôle particulier puisque nous avons attribué des énergies supérieures (référentiel au dessus) ou inférieures (référentiel en dessous) lors des collisions diverses que nous avons décrites.

Ceci est conventionnel, ce qui est imposé c'est que les variations d'énergie soient de signes opposés concernant des référentiels qui se déplacent relativement en sens opposés. Comme nous réalisons une boucle, l'indépendance du choix du référentiel de départ est manifeste vis à vis du référentiel considéré pour la description du processus.

Si la boucle n'est pas fermée, l'interaction entre des particules privilégie certes les référentiels qui sont associés à ces particules, mais pas un en particulier comme dans le cas décrit, mais la boucle n'étant pas fermée le caractère conventionnel de certaines mesures persiste (comme nous l'avons dit).

Ce caractère perturbatif (on ne traite que des variations par rapport à un état initial) est bien en conformité avec ce qui est observé en mécanique quantique, ce qui est normal, car la mécanique quantique respecte les lois de la RR.

## 12 Synthèse

D'un paradoxe sur une distance entre deux fusées nous avons été amené à discuter de la pertinence de l'existence de référentiels inertiels et de son applicabilité au cas que nous avons traité où les lignes d'univers ne sont au mieux que partiellement inertielles. Ceci qui nous a conduit à une interprétation de la symétrie inhérente à ces systèmes et aux lois qui en résultent.

## 13 Influence de la position relative dans un référentiel galiléen.

### *Dilatation temporelle*

Il est bien connu que le temps est aussi dilaté en RR. Qu'une accélération puisse avoir une influence physique sur les horloges qui sont des instruments matériels, en particulier des horloges atomiques où la référence fréquentielle est fournie par une transition entre des niveaux d'un atome, se comprend, mais que ce phénomène persiste lorsque l'accélération cesse, ce qui est le cas quand on fait les calculs, montre que l'explication par l'accélération est insuffisante et que la position des observateurs a bien des conséquences physiques sur le temps propre des observateurs. Explicitons cela.

### *Equivalence distance- temps en RR*

La représentation de l'état d'un référentiel galiléen à un instant donné avec les horloges des observateurs (préalablement synchronisées par la méthode des signaux lumineux) comme le montre la figure 3-6 ne doit pas nous induire en erreur.

Cette méthode a été élaborée pour que deux évènements simultanés (matérialisés par exemple par deux éclairs lumineux) pour un observateur de ce référentiel inertiel le soit pour tous les observateurs de ce référentiel. Mais cela tient compte de la vitesse de propagation finie de la lumière. Dans la transformation de Lorentz relative au temps nous avons déjà souligné que la coordonnée d'espace intervenait.

Donc rien à voir avec la représentation de simultanéité « absolue » en mécanique Newtonienne où on n'est pas sujet à la limitation de cette nature.

En effet, soit deux observateurs A et B de ce référentiel séparés par une distance  $d$  dans ce référentiel. Nous allons montrer que bien qu'étant dans le même référentiel A et B ne sont pas équivalents. Si B veut se rendre en A en suivant une trajectoire inertielle différente (il doit acquérir une vitesse  $v$ ) la différence entre son temps propre écoulé pour arriver en A (trajet BA) et le temps propre de l'observateur resté en A pendant le voyage de B vers A est indépendant de cette vitesse  $v \leq c$  (qu'elle soit égale à  $c$  où « infiniment » lente).

Ce temps propre correspond à la valeur de l'intervalle d'espace-temps  $s^2 = -d^2$ .

Ceci se voit simplement sur un diagramme de Minkowski, le temps propre  $\tau$  du voyageur valant:  $\tau^2 = t^2 - d^2$  ou  $t$  est le temps propre du sédentaire! Alors  $\tau^2 - t^2 = -d^2$ . Ceci est indépendant de  $t$ , donc du temps écoulé pour que B se rende en A du point de vue de A, c'est à dire de sa vitesse.

Rien de tel ne se produit dans la représentation newtonienne où le coordonnée  $t$  d'un observateur est le temps propre de tous les observateurs.

Ceci permet de comprendre pourquoi dans le cas du paradoxe de Langevin, le temps passé en vol inertiel (qui fait augmenter la distance entre les observateurs) intervient dans la différence de temps propre entre les deux jumeaux.

Par contre si le mouvement est accéléré le temps propre pour se rendre en A dépend de la trajectoire suivie. Nous avons fait le calcul pour une accélération  $1/k$  en 7-2-4. En supposant que la partie décélérée est identique à la partie accélérée et on posant  $t = 0$  comme condition initiale nous obtenons:

Nous avons obtenu  $\tau = k.\operatorname{argsinh}(t/k)$ . La différence  $T$  de temps propre entre l'observateur resté en A et celui du voyageur vaut donc dans ce cas:

$$T = t - \tau = t - k.\operatorname{argsinh}(t/k).$$

Cette valeur dépend de  $k$ .

Il est plus judicieux dans notre cas d'exprimer  $T$  en fonction de la distance « spatiale » AB.

Par un calcul similaire on obtient :

$$T = (d^2 - k^2)^{1/2} - k.\operatorname{argcosh}(d/k)$$

Valeur qui dépend également de  $k$ . Si on compare cela sur un diagramme de Minkowski avec la trajectoire inertielle reliant les deux mêmes points (départ et arrivée), la ligne non inertielle étant une courbe reliant les deux extrémités du segment de droite elle est plus longue sur le diagramme, ce qui implique que le temps propre sur cette courbe est plus court compte tenu de la métrique minkowskienne.

## 14 Le mystère disparaît lorsqu'on s'intéresse à la construction de l'espace-temps de Minkowski.

Ces paragraphes nous montrent comment en relativité restreinte à partir d'une condition initiale où tous les observateurs sont au même point nous pouvons construire tous les référentiels inertiels possibles et positionner les observateurs sur ces référentiels. Ceci a impliqué certaines opérations pour générer ces différents états. Ces opérations nous permettent de comprendre les propriétés de l'état final qui autrement paraît bien mystérieux.

Notons que ceci n'est pas équivalent à postuler un éther, car ici il ne s'agit que d'une condition initiale de l'évolution d'un système et le système ayant évolué s'il reste invariant, alors il n'y a pas de référentiel privilégié. S'il évolue les choses peuvent être différentes.

En effet, un observateur ayant migré d'un référentiel inertiel vers un autre référentiel inertiel subit "physiquement" un "ralentissement" de son temps propre dans le rapport donné par les formules de Lorentz par rapport à la situation d'origine et ceci aussi bien lorsqu'il accélère (où le facteur de Lorentz varie) que quand il est en vol inertiel où le facteur de Lorentz est fixe. La durée pendant laquelle il subit ce ralentissement associée au paramètre de ralentissement (la vitesse relative) qui

est en général variable puisque pour décrire une boucle il faut nécessairement des accélérations (qui peuvent être des transferts d'impulsion par collision entre particules appartenant à des référentiels différents comme dans l'exemple donné, va donner le temps propre qui se sera écoulé pour cet observateur<sup>92</sup>. Notons que ce temps propre va dépendre de facto de la distance d'éloignement maximum puisque le temps pour faire l'aller retour en dépend, ce qui rejoint notre remarque sur l'équivalence distance temps en RR.

Tout ce passe comme si ces espaces temps de Minkowski animés de vitesses relatives étaient des espaces temps avec des caractéristiques spatio temporelles propres reliées par la relation de Lorentz et que lorsque on décrit des lignes d'univers accélérées on navigue à travers ces espaces temps dans un sens et dans l'autre (pour une boucle) mais qu'au cours du périple on a été soumis aux contraintes de ces espaces temps.

Il n'est pas simple de se représenter une telle phénoménologie, mais c'est le prix à payer pour satisfaire au principe de relativité et à l'invariance de la vitesse de la lumière.

Ceci s'explique par le fait que pour passer d'un système inertiel à un autre (via une accélération), il faut fournir de l'énergie au système<sup>93</sup> ce qui augmente l'inertie<sup>94</sup> (dans le rapport de Lorentz  $\gamma$ ) des constituants (atomes, énergie ..) présents dans ce système. On peut alors comprendre que le temps qui met en œuvre des mécanismes physiques, sensibles à l'inertie, faisant intervenir au niveau fondamental des atomes soit (inversement) affecté dans ce même rapport.

Evidemment, on peut s'interroger sur la nature du mécanisme qui libère cette énergie<sup>95</sup>, dans un espace-temps de Minkowski réputé vide! On peut imaginer la collision de particules par exemple qui modifie les vitesses et et trajectoires, mais ceci ne peut être qu'une approximation valable au premier ordre à supposer que les conditions de stabilité du phénomène soient respectées, ce qui devrait être le cas puisque la RR peut être établie par le principe extrémal.

Pour la "génération" de tous les référentiels inertiels possibles remarquons que la cosmologie de Milne, où à un instant "initial" ( $t = 0$ ) tous les observateurs ont été au même point spatio-temporel, avec des vitesses initiales différentes il est vrai, en propose une solution.

### **L'espace de Minkowski est complètement décrit par son groupe d'invariance.**

Cela montre aussi que l'espace de Minkowski se comporte différemment pour les trajectoires inertielles (les droites) et celles qui ne le sont pas.

En fait l'espace de Minkowski est l'espace des trajectoires inertielles globales. Cet espace est "statique"(immuable), tout y est défini et contraint par la géométrie de l'espace de Minkowski, il n'y a aucun degré de liberté si on s'en tient à des référentiels galiléens. Cet espace-temps est complètement défini par son groupe (10 éléments) d'invariance.

Il peut servir de cadre à une cinématique, on peut y décrire (du moins formellement) des trajectoires non inertielles. Mais ces trajectoires non inertielles sont causées par des phénomènes qui n'ont pas

---

92 On peut décrire cela d'autres façons, par exemple en utilisant le principe d'équivalence et en supposant que l'observateur s'élève dans un potentiel gravitationnel d'accélération constante. Ceci donne les mêmes résultats.

93 D'une manière ou d'une autre. Nous discuterons de la "provenance" de cette énergie...

94 Mais pas la masse qui est un invariant en RR.

95 Nous y reviendrons au paragraphe 9 de ce chapitre.

leur source dans l'espace de Minkowski. C'est donc un problème d'une nature différente.

## **15 Courbe de longueur propre reliant les deux fusées. Solution au problème de Bell.**

Ces considérations générales étant rappelées revenons au problème posé. Dans le problème de Bell on suppose implicitement que la masse du lien n'intervient pas dans le problème puisqu'on impose la trajectoire (le mouvement des fusées). La différence avec le cas précédent est que dans ce cas on considère que le câble a une masse négligeable par rapport aux fusées qui sont aux extrémités. La force liée à l'accélération appliquée du fait de l'écartement croissant des fusées du type  $f = m \cdot \gamma$ , est générée par les fusées.

Au chapitre 13 nous avons défini et étudié, à partir des contraintes du problème à traiter et en considérant que bien que difficilement abordable par la RR ce problème de Bell était physique et devait donc bien avoir une solution physique, une courbe (que nous n'avons pas supposé matérielle) qui avait la propriété de pouvoir être considérée comme la longueur propre reliant les deux fusées à tout instant, et ce par les deux observateurs des fusées.

Cette courbe devait répondre aux exigences suivantes avec les implications associées:

***1- Equilibre local***→*géométriquement chaque point immédiatement voisin d'un point M est au repos dans le référentiel de M, physiquement la force localement appliquée sur le câble liée au gradient d'accélération est équilibrée localement par la force de rappel élastique du câble.*

***2- »Unicité « de la courbe donnant la configuration spatio-temporelle du lien: En supposant que le problème de Bell ait une solution unique, celle ci est telle que tous les observateurs, en particulier aux extrémités, s'accordent sur l'équation de cette courbe. Cette propriété ne dépend pas de la distance entre les lignes d'univers uniformément accélérées. Cet argument est plus épistémologique que formel, mais il nous paraît incontournable.***

***3- La courbe doit être localement de type espace partout.***

Ces conditions satisfaites, nous avons revendiqué que le lien matériel épouse cette courbe sous réserve que la condition d'équilibre local soit satisfaite (l'évolution se fait par déplacement à l'équilibre d'un équilibre à un autre infiniment voisin), ce qui permet de s'affranchir des phénomènes transitoires, et que le câble ait une déformation élastique jusqu'à une limite de rupture, ce qui est relativement réaliste .

Nous avons montré que cette rupture intervenait « brutalement » passé un certain point puisque la longueur se met à diverger brutalement.

Ceci donne alors un majorant au temps au bout duquel se produit la rupture. Ceci est largement développé et illustré dans le chapitre 13.



## 16 Cas des lignes d'univers représentées par des hyperboles imbriquées: L'espace-temps « stationnaire » de Rindler : Un référentiel synchronisé non inertiel!

Considérons maintenant un autre cas très intéressant, celui où les lignes d'univers sont des hyperboles imbriquées ayant les mêmes asymptotes. Elle sont décrites par l'équation:  $x = (t^2+k^2)^{1/2}$ .

Ici l'accélération évaluée dans chaque référentiel co-mobile est également constante, mais elle est différente entre les deux référentiel des fusées. La fusée poursuivante a une accélération supérieure à celle de la fusée poursuivie. L'analyse du problème montre que malgré cela, la poursuivante ne rattrapera jamais la poursuivie: Les hyperboles imbriquées d'équation  $x = (t^2+k^2)^{1/2}$  ne se coupent jamais.

Bien que l'accélération propre soit différente la distance entre les fusées restent constante. Ceci se manifeste sur le diagramme de Minkowski par l'existence en tout point d'un référentiel co-mobile commun et par le fait qu'il n'y a pas de vitesse relative de l'une par rapport à l'autre dans ce référentiel.

Comment cela est-il possible? C'est bien entendu la courbure de la coordonnée spatiale qui permet ce genre de chose. Nous avons déjà indiqué que c'est le degré de liberté complémentaire apporté par le paramètre d'accélération qui permet cela et que cette propriété est évidente dans le diagramme transposé par une rotation de Wick. Issues de coordonnées polaires en géométrie euclidienne par une transformation de Wick, les coordonnées  $(\eta, \xi)$  apparaissent comme des coordonnées polaires hyperboliques sur le diagramme de Minkowski.

Au delà de la conservation de la longueur cette représentation nous révèle une structure de l'espace-temps vis à vis des accélérations propres constantes (feuilletage)<sup>96</sup>. Nous avons utilisé cette propriété, nous donnant une carte des courbes de niveau d'accélération, lorsque nous avons argumenté que la courbe de longueur propre devait bien être celle épousée par le lien du fait que l'allongement élastique était proportionnel au gradient d'accélération, condition physique nécessaire à l'équilibre local.

Nous avons démontré la propriété en 2D mais elle peut être évidemment étendue en 4D. Habituellement on considère le mouvement accéléré parallèle à l'axe  $z$ . Comme cela n'apporte pas vraiment d'éléments nouveaux au problème que nous considérons nous laisserons de côté cette extension.

Par contre l'extension de l'espace-temps de Rindler (transformations et métriques de Wu et Moller généralisées s'est révélé décevante pour la résolution du problème de Bell. Elle n'apporte rien de plus que l'espace-temps de Rindler.

## 17 Dualité entre l'espace de Rindler et celui de Milne.

Nous avons noté cette dualité qui puise sa source dans le fait qu'en RR qui est la théorie dans laquelle la forme de la métrique de Milne est décrite la variation du temps (par rapport à la vitesse) a la même forme que l'accélération spatiale dans la forme de Rindler. Ceci peut être intéressant car

---

<sup>96</sup> Rappelons que l'espace de Rindler est également approprié à la description de l'effet Unruh et au rayonnement de Hawking.

l'espace de Milne c'est vraiment la RR de base, cela ouvre des possibilités de traitement d'un problème dans la forme de Rindler dans le formalisme pur et dur de la RR associé à Milne. Nous n'avons pas exploité cette possibilité, dans ce document.

## 18 Quid du câble reliant les fusées si l'accélération cesse avant la rupture?

Si nous restons dans la limite élastique, le câble subit une contrainte qui provoque son allongement et une réaction élastique pour équilibrer la contrainte. Lorsque les deux fusées sont en situation de vol totalement inertiel après la phase de resynchronisation, où la contrainte n'existe plus, nous avons revendiqué que le câble avait du retrouver ou allait finir par retrouver sa taille d'origine.

En effet, nous ne voyons pas en vertu de quoi, relativité restreinte ou pas, les lois devant être les mêmes dans tous les référentiels inertiels, la même chaîne de  $N$  atomes liés par l'interaction gravitationnelle aurait une longueur propre différente dans deux référentiels galiléens différents!

Au chapitre 13, nous avons examiné différentes solutions possibles. Nous avons montré que le processus de relaxation ne pouvait commencer qu'à la fin de la phase transitoire (de resynchronisation) bien que partant de la contrainte maximum dans son référentiel propre cette contrainte commence à se relâcher dès son début, mais cette phase est trop rapide pour que la condition adiabatique puisse s'appliquer. La durée de la relaxation du câble dépend des paramètres caractérisant le système physique.

In fine, nous avons deux fusées en vol inertiel asymptotiquement animées de la même vitesse  $v$  (celle à la fin de la phase accélérée) par rapport au laboratoire dont la distance propre est revenue celle de départ!

## 19 Compléments

### Relativité Restreinte et Relativité Générale: l'espace-temps de Minkowski est il physique?

Le principe de Mach qui a fortement inspiré Einstein<sup>97</sup> pour établir la théorie de la relativité générale nous enseigne que c'est la matière et l'énergie qui créent l'inertie. Autrement dit, selon la RG, sans matière énergie l'inertie n'existe pas.

Vu sous cet angle, nous pouvons nous demander quel degré de réalité physique<sup>98</sup> nous pouvons conférer à l'espace-temps de la RR et à ses référentiels inertiels dans un univers où la matière l'énergie et l'inertie n'existent pas!

Notre seule position de repli est de le considérer alors comme une limite d'un espace-temps de la RG lorsqu'on l'on se trouve très loin des masses.

Cela pose malgré tout un problème de fondement des résultats physiques obtenus pas des calculs portant sur des trajectoires non globalement inertielles dont la source n'est pas contenue dans l'espace de Minkowski lui même mais ne peut être qu'extérieure.

<sup>97</sup> Soulignons qu'il a pas mal changé d'avis sur le sujet au cours de sa vie!

<sup>98</sup> Remarquons qu'en mécanique classique le problème ne se pose pas car l'espace et le temps sont un "contenant" dont les propriétés et caractéristiques sont indépendantes du contenu!

## Et si l'antimatière sauvait la mise?

Dans certaines approches l'antimatière est considérée comme ayant une masse gravitationnelle active négative (de signe opposé à sa masse inerte). Dans ces conditions il semble possible de construire un univers physique où la gravitation est nulle du moins à une certaine échelle.

Un mélange de matière et d'antimatière, à part statistiquement égale, (la théorie suggère cette égalité au moins à l'échelle de l'univers), devrait se comporter comme un "plasma" statistiquement neutre (vis à vis de la charge gravitationnelle). La différence avec un plasma de charges électriques c'est que dans celui-ci les charges négatives sont portées par les électrons et les charges positives par des ions qui sont de masses très inégales.

La dynamique devrait sensiblement différer car dans un plasma matière antimatière les masses inertes des porteurs de charges gravitationnelles opposées seraient égales. Par ailleurs la loi de répulsion/attraction n'est pas la même (voir article de Bondi)

Cependant, cet univers pourrait très bien être doté d'une inertie<sup>99</sup>, puisque la masse inerte n'est pas nulle. Notons que Bondi<sup>100</sup> a montré qu'une matière (de masse gravitationnelle négative) dotée de telles propriétés possède des propriétés de répulsion et que la dynamique d'une association matière/antimatière est assez originale.

Rappelons que pour que des observateurs soient physiquement accélérés il faut un phénomène physique (un champ) qui génère cette accélération. Pour conserver son caractère physique, la RR devrait être considérée comme un cas limite où on peut négliger l'action des sources de cette accélération. En effet s'il y a de la matière-énergie (un champ) c'est la RG qui s'applique!

## 20 Conclusion

Nous avons exploré un certain nombre de problèmes de ce paradoxe vis à vis de la matérialité des variations de longueur constatées. Nous avons vu que dans le cas des fusées indépendantes, quand l'accélération, donc la contrainte cesse l'espace-temps reste en l'état conservant les derniers paramètres acquis. Un nouveau référentiel galiléen a été peuplé avec des propriétés physiques différentes de celui dont il est issu puisqu'on lui a communiqué de « l'énergie », ce qui explique qu'il y ait des différences !

Ceci nous a permis de montrer qu'on peut générer (du moins par une expérience de pensée) tous les référentiels galiléens possibles à partir d'un état initial commun. La contraction relative des longueurs et des temps s'explique alors par le procédé qui permet de générer ces différents référentiels. Cela justifie aussi ces propriétés pour les référentiels galiléens éternels dont l'existence supposée était bien mystérieuse, ceux-ci étant indiscernables de ceux qu'on a créés à partir d'une situation commune (si on ne considère que la partie inertielle dans ce cas). Si la partie non inertielle est derrière un horizon des événements alors les deux types sont indiscernables physiquement.

Nous avons montré comment une distance en RR pouvait aussi être un temps ce qui est pourtant trivial en RR mais souvent mal perçu. Ceci explique le décalage temporel entre les fusées (donc la

---

<sup>99</sup> Notons que ceci poserait problème, du moins en première analyse, avec le principe de Mach, puisqu'il prétend que l'inertie relève d'une interaction gravitationnelle (en particulier avec les masses lointaines). Il faudrait repenser cet aspect des choses.

<sup>100</sup> H. Bondi. July 1957, Negative mass in General Relativity, Review of modern physics Vol 29, Number 3

distance) qui croît continuellement compte tenu du type de mouvement accéléré considéré. La fusée poursuivie (en avance car elle est devant l'autre et a toujours une vitesse supérieure à l'autre ayant commencé à exercer l'accélération commune avant l'autre, ceci dans le référentiel local des fusées).

Pour traiter le cas du lien reliant les deux fusées, nous avons été amenés à introduire une distance propre de ce lien, commune aux deux fusées, dont la caractéristique est d'être en tout point tangente à l'axe local des  $x'$  du référentiel inertiel local en ce point (est au repos en tout point dans ce référentiel local). Bien entendu cette longueur propre n'est pas évaluée dans référentiel inertiel global, (les différents points sont en mouvement les uns par rapport aux autres), mais elle peut être calculée et nous avons supposé qu'à l'équilibre (condition adiabatique) cela décrivait la configuration spatio-temporelle du lien pour une valeur de  $t$  donnée.

Ceci a montré que la longueur propre de ce lien diverge pour une certaine valeur du temps dépendant de l'accélération et de la distance entre les fusées. Ceci permet de répondre alors à la question de Bell. Le lien ne peut que casser si on prolonge indéfiniment le vol des fusées et on peut donner un majorant fini du temps au bout duquel cela se produit.

Nous avons proposé une explication formelle et physique liée à une structure intrinsèque propre à cet espace-temps, vis à vis de ses états stationnaires possibles, les phases non inertielles permettant de passer d'un état stable à un autre. En relativité Générale, en présence de gravitation nous pouvons comprendre cela. Le champ gravitationnel nous fournit une référence physique, mais dans un espace vide c'est plutôt mystérieux et conceptuellement plus difficile à comprendre. Ainsi paradoxalement la RR est conceptuellement plus mystérieuse que la RG.

Pour un corps rigide ou élastique, c'est différent. La physique d'un corps rigide ou élastique n'est pas strictement du domaine de la RR puisque des forces de liaisons de nature électromagnétique, ayant une énergie ce qui sauf à être négligé relève de la RG ,s'appliquent.

Dans notre étude sur le corps rigide, nous nous sommes placé dans des conditions d'équilibre local pour contourner ces difficultés et en tirer des conclusions, ce qui fait que certains résultats doivent être interprétés avec discernement.

# 15- Annexes

## 1 Annexe 1: Critère de simultanéité en RR, longueur d'un arc de courbe en métrique de Minkowski.

### Critère de simultanéité

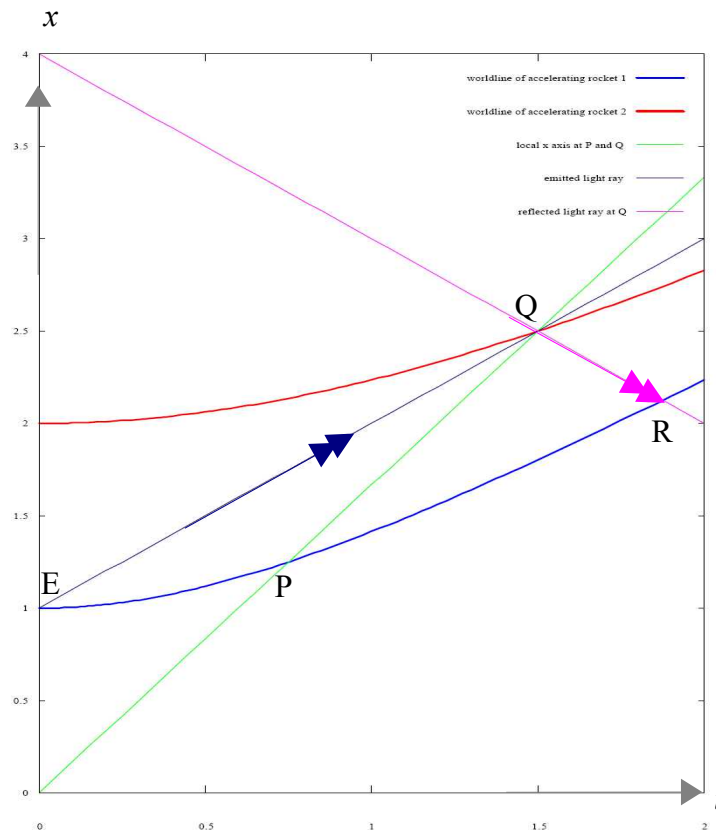
Un signal lumineux est émis dans un référentiel co-mobile en un point  $A$  reçu et réfléchi sans délai en un point  $B$  dans un référentiel co-mobile 2 et ce rayon réfléchi est reçu en un point  $C$  dans le référentiel co-mobile 1.

Le milieu de la ligne courbe d'univers  $AC$  ( mesurée par un paramètre affine, comme le temps propre par exemple) est synchrone de  $B$ .

Mais dans ce paradoxe le problème n'est pas linéaire par rapport aux vitesses.

En gros quand le signal lumineux est émis par la fusée 1 la fusée 2 qui accélère s'éloigne de plus en plus vite et quand le rayon est réfléchi c'est cette fois ci la fusée 1 qui accélérant se rapproche de plus en plus vite mais avec des valeurs différentes.

**Fig A1:** Critère de simultanéité en RR: Un signal lumineux émis en  $E$  depuis la ligne d'univers de la



fusée 1 est réfléchi en  $Q$  sur la ligne d'univers de la fusée 2 et reçu à nouveau sur la ligne d'univers de la fusée 1 en  $R$ . Le point événement  $Q$  est simultané du point événement  $P$ , milieu de  $ER$ . Sur le diagramme on voit que le point  $P$  n'est pas le milieu de la courbe  $ER$ . Ceci est lié au fait que ce

milieu s'apprécie en géométrie minkowskienne et que cette courbe est représentée en géométrie euclidienne.

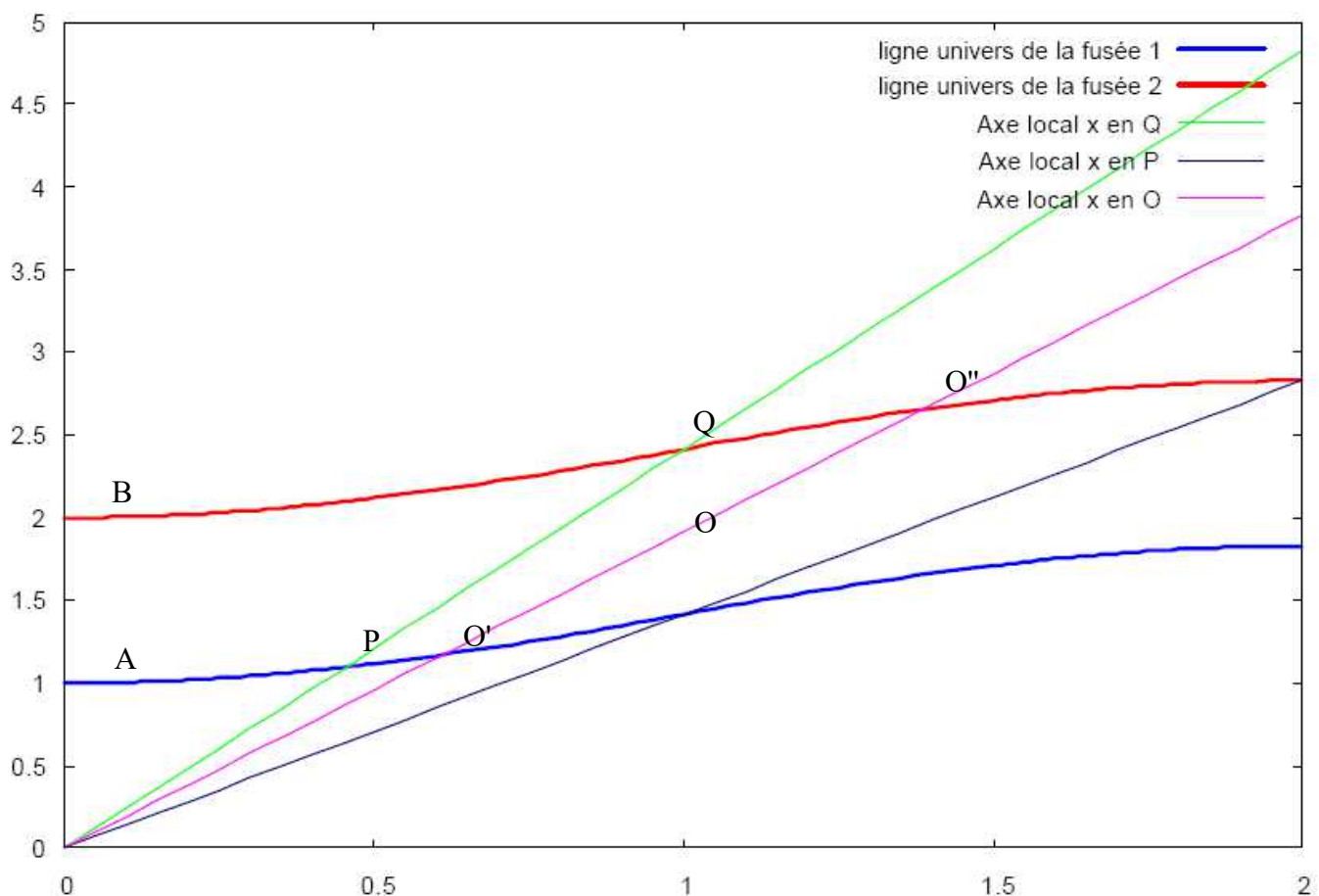
**Longueur d'un arc de courbe en métrique de Minkowski.**

Nous représentons en général, le diagramme de Minkowski en coordonnées cartésiennes en géométrie euclidiennes. Les longueurs des segments et arcs de courbes qu'on peut mesurer sur ce diagramme valant  $\int(dx^2+dt^2)^{1/2}$ , ne sont pas représentatifs de leur longueur en métrique de Minkowski où cette longueur vaut  $\int(dx^2-dt^2)^{1/2}$ , ce qui est différent!

**2 Annexe 2: Intégration de la distance le long d'une ligne d'univers, calcul de la vitesse relative de la fusée 2 dans le référentiel 1.**

**Intégration de la distance le long d'une ligne d'univers fermée.**

La figure ci dessous écrit la ligne d'univers fermée la plus simple.



**Figure A2-1[7]:** L'axe O'OO'' est l'axe de symétrie de la figure qui elle même ne représente que la moitié de la ligne d'univers fermée (on complète par symétrie autour de l'axe vertical en t=2):

Nous n'aurons donc à faire les calculs que jusqu'à ce premier axe de symétrie. Le reste s'en déduira par symétrie. Nous voyons qu'il y a trois types de configurations:

- a) Partie où les deux lignes d'univers délimitées par l'axe  $x'$  de simultanéité sont accélérées (AP-BQ).
- b) Partie où les deux lignes d'univers délimitées par l'axe  $x'$  de simultanéité sont décélérées (non représentées sur cette moitié du diagramme) .
- c) Parties où les deux lignes d'univers délimitées par l'axe  $x'$  de simultanéité ne sont pas de même type (PO'-QO'').

En fait les cas a) et b) sont symétriques et les différentes configurations liées au cas c) sont symétriques. Il n'y aura donc que deux cas différents à calculer (AP-BQ) et (PO'-QO'')

Nous avons vu chapitre 3 que cette distance le long d'une ligne d'univers en accélération (AB) valait:

$$D = \{d.(1+t_1^2)^{1/2} + (1+d^2t_1^2)^{1/2}-1\}$$

L'intégration de cette valeur donne donc:

### **Calcul vitesse relative de la fusée 2 dans le référentiel de la fusée 1.**

#### **15-2-2-1 Méthode par le produit scalaire**

Nous devons calculer les vecteurs<sup>101</sup> vitesse  $V(dt_1/d\tau, dx_1/d\tau)$  en  $P$  et  $W(dt_2/d\tau, dx_2/d\tau)$  en  $Q$ .

Calculons ces vecteurs dans le référentiel du laboratoire:

En  $P$  et  $Q$  ils sont tous deux de la forme (la constante  $d$  s'élimine dans la dérivation pour la ligne d'univers de la fusée 2):

$$\begin{aligned} d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 (1 - t^2/1+t^2) = dt^2/(1+t^2) & \quad \text{soit} & \quad dt/d\tau = (1+t^2)^{1/2} d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = \\ dx^2 (x^2/(x^2-1) - 1) = dx^2(1/x^2-1) & \quad \text{soit} & \quad dx/d\tau = (x^2-1)^{1/2} = t \end{aligned}$$

Alors dans le système de coordonnées  $(t, x)$ :

$$V \{ (1+t_1^2)^{1/2}, t_1 \}, \quad W \{ (1+t_2^2)^{1/2}, t_2 \}$$

Le produit scalaire<sup>102</sup>  $V.W$  ( en espace-temps de Minkowski 2D de signature [1,-1], conformément à la forme de la métrique ci dessus) est un invariant, dans le laboratoire il vaut:

$$V.W = [(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] - t_1.t_2.$$

101 Les vecteurs sont notés en caractères gras.

102 Bien que les vecteurs ne soient pas au même point, comme nous sommes en espace de Minkowski, nous pouvons toujours faire un transport parallèle (bien défini dans ce cas et indépendant du chemin de transport) pour amener  $W$  en  $P$ . Nous savons que ses composantes sont conservées dans ce transport dans le référentiel du laboratoire. Nous pouvons alors faire le produit scalaire  $V.W$  puisque les deux vecteurs sont au même point. Nous utilisons cette méthode qui nous paraît plus conforme à la Relativité que celle utilisant les transformations de Lorentz qui traite de contractions de longueurs et temps, mais qui est discutable pour les vecteurs, car parler de longueurs et de temps pour les composantes d'un vecteurs est un abus de langage hérité de la géométrie euclidienne où on définit les extrémités du vecteurs dans l'espace, même si dans le cas de l'espace-temps de Minkowski elle donne les mêmes résultats, voir annexe 2 §2)

Dans le référentiel co-mobile en  $P(t', x')$ , nous savons que  $V$  est le vecteur tangent à la ligne d'univers donc sur l'axe du temps:

$$V \{1, 0\}$$

L'invariance du produit scalaire et la normalisation de la bi-vitesse nous permettent de calculer  $W(t', x')$  dans le référentiel local en  $P$ : La composante  $t'$  est donnée immédiatement par:

$$V \cdot W = [(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] - t_1 t_2 = t' \cdot 1 + 0 \cdot x' \rightarrow t' = [(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] - t_1 t_2$$

Le calcul de la composante  $x'$  se fait à partir de la normalisation de la bi-vitesse ( $\eta_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique diagonal de Minkowski  $2D$ ,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ ):

$$W \cdot W = W^\mu W_\mu = \eta_{\mu\nu} W^\nu W^\mu = 1 \rightarrow t'^2 - x'^2 = 1$$

$$\{[(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] - t_1 t_2\}^2 - x'^2 = 1 \rightarrow x'^2 = \{[(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] + t_1 t_2\}^2 - 1 = [t_2 (t_1^2 + 1)^{1/2} - t_1 (t_2^2 + 1)^{1/2}]^2$$

$$x' = [t_2 (t_1^2 + 1)^{1/2} - t_1 (t_2^2 + 1)^{1/2}]$$

$$W_{(t', x')} \{[(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] - t_1 t_2, [t_2 (t_1^2 + 1)^{1/2} - t_1 (t_2^2 + 1)^{1/2}]\}$$

Nous obtenons donc les composantes de  $W$  en substituant à  $t_1, t_2$  leur valeurs que nous avons calculées précédemment.

La vitesse  $v$  dans le référentiel inertiel  $(t', x')$  vaut:  $v = dx'/dt' = (dx'/d\tau)/(dt/d\tau) =$

$$[t_2 (t_1^2 + 1)^{1/2} - t_1 (t_2^2 + 1)^{1/2}] / \{[(1+t_1^2)^{1/2} (1+t_2^2)^{1/2}] - t_1 t_2\}$$

On voit qu'en  $Q$  dans le référentiel local co-mobile de la fusée 1  $(t', x')$  défini en  $P$ , comme la vitesse possède une composante spatiale non nulle  $x'$  elle a une composante temporelle  $t'$  différente de celle en  $P$  (puisque en  $Q$ ,  $t'$  n'est pas le temps propre dans le référentiel local en  $P$ ).

### 15-2-2-2 Méthode utilisant les formules de Lorentz

Nous avons calculé cette vitesse par la méthode du produit scalaire. Nous pouvons aussi la calculer en utilisant les formules de Lorentz du fait que l'espace de Minkowski est plat.

Pour le référentiel en  $P(t', x')$ , en  $t_1$  on a:

$$t' = \gamma(t - v_1 x) + C_0 \quad v_1 = dx/dt = t_1 / (t_1^2 + 1)^{1/2} \text{ en } t = t_1$$

$$x' = \gamma(x - v_1 t) + D_0 \quad \gamma = (1 - v_1^2)^{-1/2}$$

et en  $Q(t_2)$  on a:

$$x = d + (t^2 + 1)^{1/2} \rightarrow v_2 = t_2 / (t_2^2 + 1)^{1/2} \rightarrow dx = t_2 / (t_2^2 + 1)^{1/2} dt$$

C'est ce vecteur  $v_2$  qu'il va falloir évaluer dans le référentiel local  $(t', x')$  en  $P$ .



En considérant la composante temporelle comme un temps et la composante spatiale comme une distance<sup>103</sup>, en un point  $Q$  de coordonnée  $t = t_2$ ,

$$dt' = \gamma[1 - v_1 t_2 / (t_2^2 + 1)] dt = \gamma \{ [(t_2^2 + 1)^{1/2} - v_1 t_2] / (t_2^2 + 1)^{1/2} \} dt \quad dx' = \gamma [ t_2 / (t_2^2 + 1)^{1/2} - v_1 ] dt = \gamma \{ [ t_2 - v_1 \cdot (t_2^2 + 1)^{1/2} ] / (t_2^2 + 1)^{1/2} \} dt$$

La vitesse du référentiel co-mobile est:

$$dx'/dt'_{(Q)} = [ t_2 - v_1 (t_2^2 + 1)^{1/2} ] / [ (t_2^2 + 1)^{1/2} - v_1 t_2 ]$$

en remplaçant  $v_1$  par sa valeur en fonction de  $t_1$ , on obtient:

$$dx'/dt'_{(Q)} = [ t_2 - t_1 (t_2^2 + 1)^{1/2} / (t_1^2 + 1)^{1/2} ] / [ (t_2^2 + 1)^{1/2} - t_1 t_2 / (t_1^2 + 1)^{1/2} ] = [ t_2 (t_1^2 + 1)^{1/2} - t_1 (t_2^2 + 1)^{1/2} ] / [ (t_2^2 + 1)^{1/2} (t_1^2 + 1)^{1/2} - t_1 t_2 ]$$

### 3 Annexe 3: $d^2x/dt^2 = 1$ pour $t = 0$ .

D'après:  $v = dx/dt$  at  $t = t_0$

et  $x = (t^2 + 1)^{1/2} \rightarrow v = dx/dt = t / (t^2 + 1)^{1/2}$

$$d^2x/dt^2 = d/dt(dx/dt) = d/dt(t / (t^2 + 1)^{1/2}) = 1 / (t^2 + 1)^{3/2} - t \cdot \{ [t / (t^2 + 1)^{1/2}] \cdot (1 + t^2) \} = (1 + t^2 - t^2) / (1 + t^2)^{3/2} = 1 / (1 + t^2)^{3/2} = 1 \text{ pour } t = 0$$

### 4 Annexe 4: Calcul de $d^2x'/dt'^2$ pour l'équation: $x = (t^2 + k^2)^{1/2}$

*Méthode en utilisant les formules de Lorentz.*

Nous faisons la démonstration générale pour  $x = (t^2 + k^2)^{1/2}$  le cas  $x = (t^2 + 1)^{1/2}$  n'étant qu'un cas particulier.

$$\text{De: } t' = \gamma(t - vx) + C_0 \quad v = dx/dt \text{ en } t = t_0 \quad x' = \gamma(x - vt) + D_0 \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$$

et

$$x = (t^2 + k^2)^{1/2} \rightarrow v = dx/dt = t / (t^2 + k^2)^{1/2} \rightarrow dx = t / (t^2 + k^2)^{1/2} dt \text{ Alors } \gamma = 1 / [1 - (t^2 / (k^2 + t^2))]^{1/2} = 1 / [k^2 / (k^2 + t^2)]^{1/2} = (1 + t^2/k^2)^{1/2}$$

en un point  $P$  de coordonnée  $t = t_0$ ,

$$dt' = \gamma[1 - v \cdot t / (t^2 + k^2)^{1/2}] dt = \gamma \{ [(t^2 + k^2)^{1/2} - v \cdot t] / (t^2 + k^2)^{1/2} \} dt \quad dx' = \gamma [ t / (t^2 + k^2)^{1/2} - v ] dt = \gamma \{ [ t - v \cdot (t^2 + k^2)^{1/2} ] / (t^2 + k^2)^{1/2} \} dt$$

La vitesse du référentiel co-mobile est:  $dx'/dt' = [ t - v \cdot (t^2 + k^2)^{1/2} ] / [ (t^2 + k^2)^{1/2} - v \cdot t ]$

<sup>103</sup>Comme nous l'avons dit au chapitre 3 cela est possible du fait que l'espace de Minkowski est plat, mais dans une définition plus générale des vecteurs, comme en relativité générale, cette assertion serait incorrecte!

L'accélération dans le référentiel comobile s'écrit:  $d^2x'/dt'^2 = d/dt'(dx'/dt) = d/dt(dx'/dt')(dt/dt') =$

$$\{d/dt([t - v.(t^2+k^2)^{1/2}]/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t])\} \{ (t^2+k^2)^{1/2}/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t] \} / \gamma =$$

$$\{ [1 - v.t/(t^2+k^2)^{1/2}]/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t] - ([t-v.(t^2+k^2)^{1/2}]/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t])^2 ([t-v.(t^2+k^2)^{1/2}]/[(t^2+k^2)^{1/2}]) \} \{ (t^2+k^2)^{1/2}/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t] \} / \gamma =$$

$$\{ 1/(t^2+k^2)^{1/2} \} \{ [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t] - [t-v.(t^2+k^2)^{1/2}]/[t-v.(t^2+k^2)^{1/2}] \} \{ (t^2+k^2)^{1/2}/[(t^2+k^2)^{1/2} - v.t] \} / \gamma$$

cela se simplifie considérablement et il reste:

$$\{ [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^2 - [t-v.(t^2+k^2)^{1/2}]^2 \} / [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^3 / \gamma = \{ [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t + t-v.(t^2+k^2)^{1/2}][k^2+t^2] - vt - t + v.(t^2+k^2)^{1/2} \} / [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^3 / \gamma =$$

$$\{ \{ [1-v][(t^2+k^2)^{1/2}+t] + v[(t^2+k^2)^{1/2}-t] \} \{ [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^3 \} \} / \gamma = \{ (1-v^2)(k^2+t^2-t^2) \} / [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^3 / \gamma = k^2 [1-v^2]^{3/2} / [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^3$$

comme  $\gamma = 1/(1-v^2)^{1/2} = (t^2+k^2)^{1/2}/k$  et  $v = t/(t^2+k^2)^{1/2}$ , en insérant dans les équations précédentes, il vient:

$$k^2 [1-v^2]^{3/2} / [(t^2+k^2)^{1/2} - v.t]^3 = \{ [k^2/(k^2+t^2)]^{1/2} / [(t^2+k^2)^{1/2} - t/(t^2+k^2)^{1/2}] \}^3 = k^2 \{ [k^2/(k^2+t^2)]^{1/2} / [(k^2+t^2-t^2)/(t^2+k^2)^{1/2}] \}^3 = k^2 \{ [k^2/(k^2+t^2)]^{1/2} (t^2+k^2)^{1/2} / k^2 \}^3 = k^2/k^3 = 1/k.$$

En posant  $k = 1$ , nous retrouvons bien que l'accélération dans le référentiel co-mobile des fusées vaut 1. Dans le cas où  $k > 1$ , nous voyons que l'accélération de la fusée poursuivie dans son référentiel co-mobile est constante comme nous l'avions affirmé et est inférieure à l'accélération de la fusée poursuivante :  $(1/k < 1 \text{ si } k > 1)$ .

### **Méthode par la rotation de Wick.**

La méthode précédente est assez laborieuse. Il y a moyen de la simplifier en utilisant une rotation de Wick.

Compte tenu de la symétrie du cercle l'accélération propre est la même en tout point, où nous pouvons définir les axes cartésiens  $t,x$ . En ce point sur la circonférence pour  $t = 0$  nous obtenons:

$$\text{L'équation du cercle s'écrit } x^2+t^2=k^2 \rightarrow x = (k^2-t^2)^{1/2} \rightarrow dx/dt = -t/(k^2-t^2)^{1/2} \quad d^2x/dt^2 = -1/(k^2-t^2)^{1/2} - \{ (-t)(-t)/[(k^2-t^2)^{1/2} (k^2-t^2)] \} = -k^2/(k^2-t^2)^{1/2} (k^2-t^2) = -1/k \text{ pour } t=0.$$

$$\text{En remplaçant } t \text{ par } i.t \quad d^2x/dt^2 \rightarrow -d^2x/dt^2 \rightarrow -1/k \rightarrow 1/k$$

On voit combien la rotation de Wick simplifie les calculs.

## 5 Annexe 5 : vitesse de la fusée 2 dans le référentiel co-mobile de la fusée 1.

En coordonnées  $t', x'$  en  $P$ ,  $dx'/dt' = 0$  car l'axe  $t'$  est tangent à la ligne d'univers de la fusée 1.

Pour calculer  $dx'/dt'$  en  $Q$  dans les coordonnées  $t', x'$  il faut calculer l'intersection de l'axe  $x'$  avec la ligne d'univers de la fusée 2 pour d'abord obtenir les coordonnées de  $Q$  et ensuite calculer l'équation de la tangente à la ligne d'univers de la fusée 2 en  $Q$ .

En comparant les pentes des tangentes en  $P$  et  $Q$  nous pourrions vérifier que  $dx'/dt' > 0$  en  $Q$ , ce qui est évident sur la figure 2..

Conformément à notre exemple sur la fig.2, en  $P$  de coordonnées  $t = 0.5$ ,  $x = (1.25)^{1/2}$  dans le laboratoire nous obtenons:

$$x = (1.25)^{1/2}.2t.$$

Cette droite coupe la ligne d'univers 2 en  $Q$ , de coordonnées  $t, x$  dans le laboratoire définies par:

$$x = (1.25)^{1/2}.2t = (t^2+1)^{1/2} + 0.5 \rightarrow ((1.25)^{1/2}.2t - 0.5)^2 = t^2+1 \rightarrow 5t^2 + 0.25 - 2.(1.25)^{1/2}t = t^2+1 \rightarrow$$

$$4t^2 - 2.(1.25)^{1/2}t - 0.75 = 0, \text{ en choisissant la racine positive:}$$

$$t = [(1.25)^{1/2} + [(1.25+3)]^{1/2}]/4 \approx 0.7948967 \approx 0.7949 \quad x = (1.25)^{1/2} * 2 * 0.7948967.$$

La tangente à la ligne d'univers de la fusée 2 en  $Q$  ( $t = 0.7949$ ) est donnée par:

$$dx/dt_{(Q)} = t/(t^2+1)^{1/2} = 0.7949/[1+(0.7949)^2]^{-1/2} \approx 0.62226$$

Tandis que la tangente à la ligne d'univers de la fusée 1 en  $P$  ( $t = 0.5$ ), qui est l'axe  $t'$  du référentiel co-mobile était:

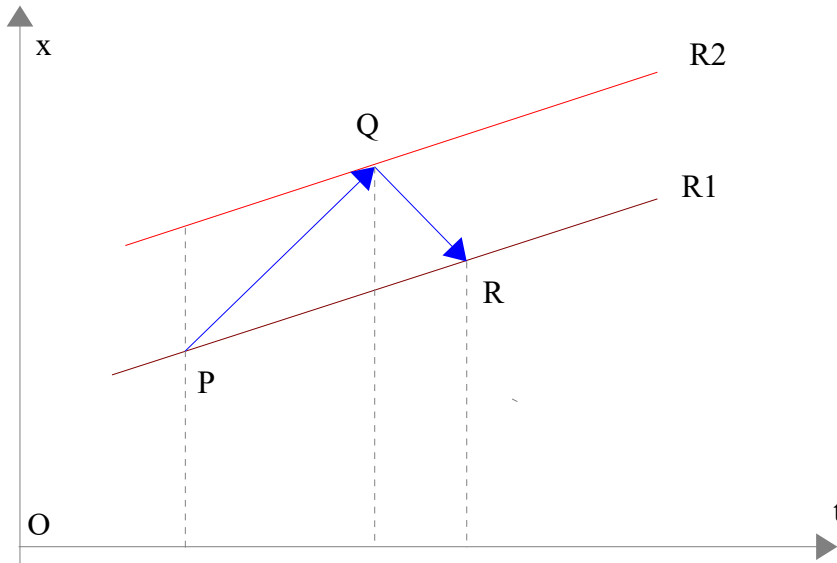
$$dx/dt_{(P)} = t/(t^2+1)^{1/2} = 0.5[(0.5)^2 + 1]^{-1/2} \approx 0.4472$$

Nous pouvons vérifier que la pente de la tangente en  $Q$  est supérieure à celle en  $P$ , donc la vitesse de la fusée 2 en  $Q$  est positive dans le référentiel co-mobile de la fusée 1 en  $P$ .

## 6 Annexe 6: Calcul direct de la distance propre en vol inertiel.

### *Distance entre fusées dans leur référentiel co-mobile.*

Les deux fusées étant dans le même référentiel inertiel, le calcul de leur distance ne souffre d'aucune critique (sauf peut être que les fusées n'ont pas toujours été dans ce référentiel). Nous suivrons donc la méthode de base de calcul d'une distance dans un référentiel inertiel, car il bon de parfois rappeler les bases de la RR. C'est la méthode dite du radar. De  $P(t_0, x_0)$  dans  $R1$  (ligne d'univers de la fusée 1) un signal lumineux est émis, il atteint  $R2$  (ligne d'univers de la fusée 2) en  $Q(t_1, x_1)$  où il est réfléchi et il atteint de nouveau  $R1$  en  $R(t_2, x_2)$ . Les lignes d'univers  $R1$  et  $R2$  sont séparées par une distance  $d$  dans le référentiel du laboratoire et on une vitesse  $v$  par rapport au laboratoire.



Équation de  $R1$  (ligne marron):  $x = vt + a$  comme  $P$  appartient à  $R1$  nous avons:  $x_0 = v.t_0 + a \rightarrow a = x_0 - vt_0, \rightarrow x = vt + x_0 - vt_0$

Équation de  $R2$  (droite rouge parallèle à  $R1$ )  $x = vt + x_0 + d - vt_0$

Équation du rayon lumineux sortant (bleu) en  $P$ :  $x = t + b$  comme  $P$  appartient à  $R1$ :

$$x_0 = t_0 + b \rightarrow b = x_0 - t_0, \rightarrow x = t + x_0 - t_0$$

$PQ$  coupe  $R2$  en  $Q(t_1, x_1)$  défini par:

$$t + x_0 - t_0 = vt + x_0 + d - vt_0 \rightarrow t(1-v) = t_0(1-v) + d \rightarrow t_1 = t_0 + d/(1-v) \quad x_1 = d/(1-v) + x_0$$

Équation du rayon réfléchi (bleu) en  $Q$ :  $x = -t + c$  Comme  $Q$  appartient à  $QR$ :

$$d/(1-v) + x_0 = -[t_0 + d/(1-v)] + c \rightarrow c = 2d/(1-v) + x_0 + t_0 \rightarrow x = -t + 2d/(1-v) + x_0 + t_0$$

$QR$  coupe  $R1$  en  $R(t_2, x_2)$  défini par:

$$vt + x_0 - vt_0 = -t + 2d/(1-v) + x_0 + t_0 \rightarrow t(1+v) = t_0(1+v) + 2d/(1-v) \rightarrow t = t_0 + 2d/(1-v^2)$$

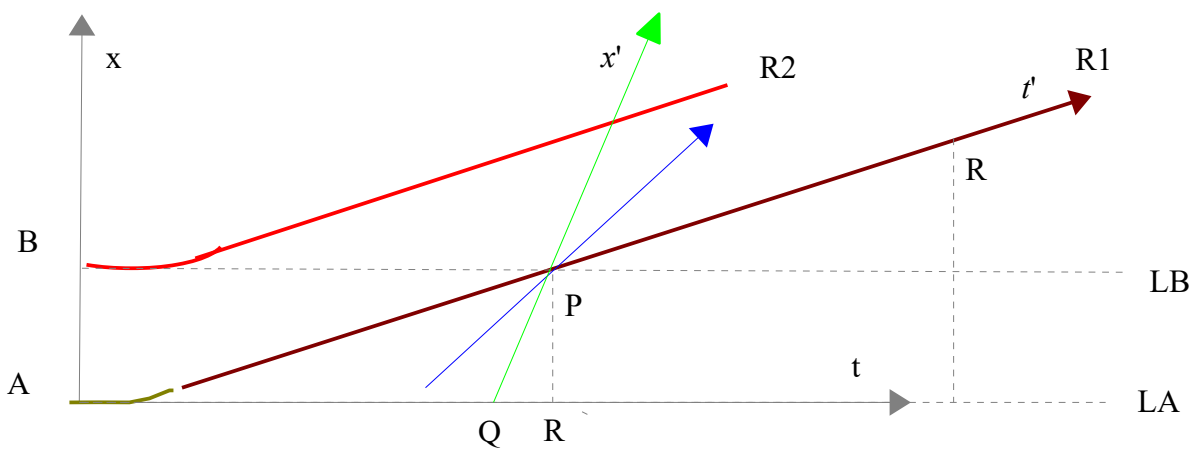
Le temps propre sur le segment  $PR$  de  $R1$  est:

$$\tau^2 = t^2 - x^2 = t^2 - v^2 t^2 = t^2(1-v^2) = [t_0 + 2d/(1-v^2) - t_0]^2 [1-v^2] \rightarrow \tau = 2d/(1-v^2)^{1/2},$$

comme dans la méthode du radar c'est le double de la distance  $D$  (aller retour) multiplié par la vitesse  $d$  la lumière nous obtenons:

$$D = d/(1-v^2)^{1/2}$$

**Mesure de cette distance dans le référentiel du laboratoire.**



Les lignes d'univers des fusées 1 et 2 sont esquissées incluant leur partie non inertielle sur ce diagramme.

A et B sont les lieux de décollage des fusées 1 et 2 dans le laboratoire. Nous voulons mesurer la distance AB dans la partie inertielle du référentiel R1. Appelons la *d* comme d'habitude. Les coordonnées de P sont (*t*<sub>0</sub>, *d*)

Nous avons tracé l'axe *t'* du référentiel R1 (qui est R1) l'axe *x'* qui est symétrique de l'axe *t'* par rapport à un rayon lumineux (équation, *x* = *t*) issu de P. Donc si la pente de l'axe *t'* est *v*, la pente de l'axe *x'* est 1/*v*.

Nous savons que l'axe *x'* est la ligne de simultanéité.

PQ est la longueur *d* que nous voulons mesurer dans R1.

L'équation générique de l'axe *x'* dans le référentiel du laboratoire est:  $x' = t/v + a$

P est sur cet axe, alors :  $d = t_0/v + a \rightarrow x' = t/v + d - t_0/v$

Cette droite coupe l'axe *x* pour *x'* = 0, soit:  $t/v + d - t_0/v = 0 \rightarrow t = t_0 - v.d$

La distance *D* (PQ sur le diagramme) mesurée dans R1 est alors :

$$s^2 = -t^2 + x^2 = -(QR)^2 + d^2 = -(v.d)^2 + d^2 = d^2 (1-v^2) \rightarrow s = D = d. (1-v^2)^{1/2} .$$

C'est ce que nous escomptions. La distance *d* distance propre dans le référentiel du laboratoire est mesurée contractée dans R1.

### 7 Annexe 7: Proportionnalité de la longueur et du gradient d'accélération sur la courbe C représentant le lien entre les fusées.

Quand nous avons calculé (au chapitre 13-5) la longueur propre  $L$  de cette courbe  $C$  nous avons trouvé que  $dL = dt/t$ .

C'est cette quantité que nous avons intégré entre les extrémités pour obtenir  $L$ .

$$L = \int_{t_0}^{t_1} (dx^2 - dt^2)^{1/2} = \int_{t_0}^{t_1} ((1+t^2)/t^2) dt^2 - dt^2)^{1/2} = \int_{t_0}^{t_1} dt/t = [\ln(t)]_{t_0}^{t_1} \tag{15-7-1}$$

Nous avons fait ce calcul dans le cas de la famille d'hyperboles définie par  $x = (1+t^2)^{1/2} + d$ .

Ceci se généralise au cas de la famille (avec  $k = \text{constante}$ ):

$$x = (k^2+t^2)^{1/2} + d, \text{ avec } k \geq 0. \tag{15-7-2}$$

Si  $D$  est la distance entre les fusées 1 et 2 on a :  $0 \leq d \leq D$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} (dx^2 - dt^2)^{1/2} = \int_{t_0}^{t_1} ((k^2+t^2)/t^2) dt^2 - dt^2)^{1/2} = \int_{t_0}^{t_1} k dt/t = k[\ln(t)]_{t_0}^{t_1} \tag{15-7-3}$$

Pour simplifier, nous allons faire le calcul pour  $d = 0$ , (courbe rouge sur la fig. A-7-1) mais s'agissant d'un calcul "local" et les propriétés revendiquées s'appliquant en tout point de la courbe il se généralise<sup>104</sup> au cas  $0 \leq d \leq D$ .

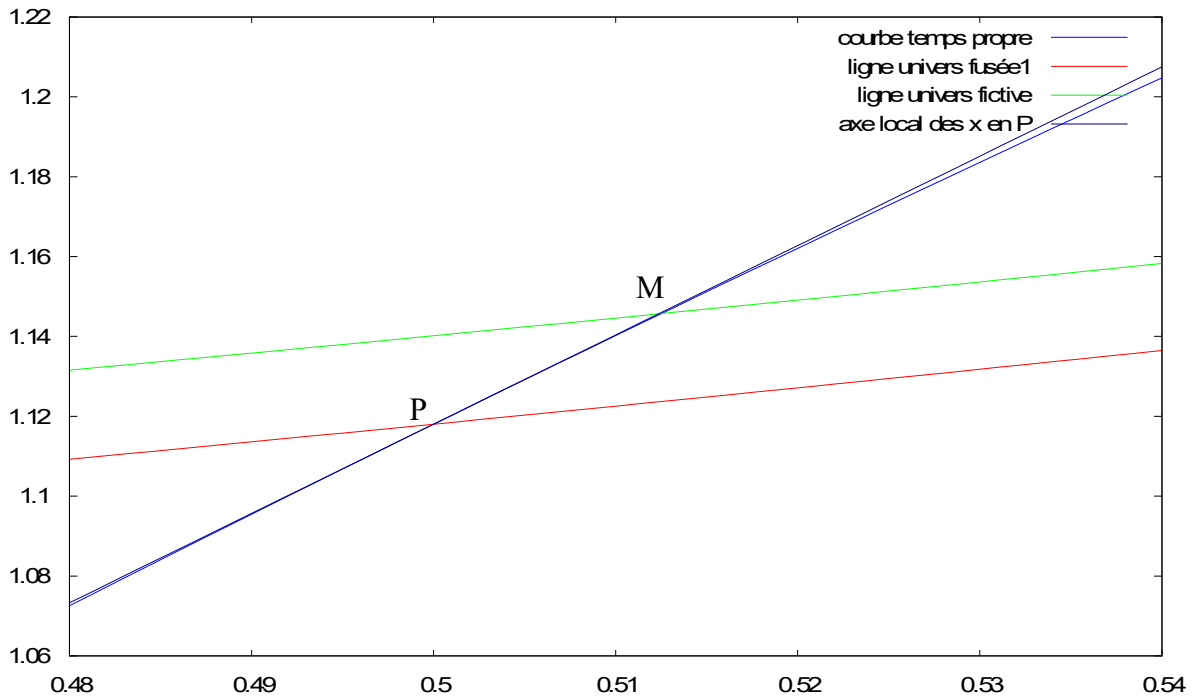


Fig. A-7-1 [7]: Ici  $t_0 = 0.5$ ,  $\delta t_0 \approx 0,012$ . Courbe rouge  $k^2 = 1$ , courbe verte  $k^2 = 1,05$  ( $\delta k \approx 0,024$ )

104 La propriété (locale) que nous exploitons est la même en tout point de la courbe (auto similarité).

En  $P$  les coordonnées sont:

$$t_0, x_0 = (k^2 + t_0^2)^{1/2}$$

En  $M$  "infiniment" voisin<sup>105</sup> de  $P$  sur la courbe  $C$ , elles sont:

$$t_0 + \delta t_0, x_0 + (k^2 + t_0^2)^{1/2} \delta t_0 / t_0,$$

En effet  $M$  est aussi (au premier ordre) sur la droite de simultanéité (axe  $x'$ ) en  $P$ ,  $\delta t_0$  est un infiniment petit.

Pour calculer la différence d'accélération en  $P$  et  $M$ , nous pourrions utiliser une méthode analytique directe<sup>106</sup> (très laborieuse) mais il est plus simple d'utiliser ce que nous avons établi à propos de l'espace-temps de Rindler où nous avons constaté que les différentes hyperboles ayant des asymptotes communes correspondaient chacune à une valeur (différente des autres) de l'accélération propre constante d'un observateur dans le paramétrage adopté.

Nous avons déjà une hyperbole  $H_0$  de référence (celle passant par  $P$ ), nous allons déterminer l'hyperbole  $H_1$  ayant les **mêmes asymptotes** que l'hyperbole en  $P$  et passant par  $M$  et calculer à quelle accélération cela correspond.

Nous en déduisons le gradient d'accélération. Nous sommes fondés à faire cela car ces deux hyperboles ont en commun leur ligne de simultanéité qui est elle-même tangente à notre courbe  $C$ , et l'accélération, qui est un vecteur, étant colinéaire de cette ligne de simultanéité, (l'hyperbole ne donne que la valeur), elle correspond bien à l'accélération qui va générer la contrainte sur le lien.

Son équation est :  $X = [(k + \delta k)^2 + t^2]^{1/2}$ , (courbe verte sur fig.A-7-1) où  $\delta k$  est un infiniment petit caractérisant la variation "d'accélération" associée à l'hyperbole passant par  $M$ .

Passant par  $M$  elle doit satisfaire à:

$$x_0 + (k^2 + t_0^2)^{1/2} \delta t_0 / t_0 = [(k + \delta k)^2 + (t_0 + \delta t_0)^2]^{1/2}$$

En élevant au carré, en négligeant les termes  $\delta k^2$  et  $\delta t_0^2$  et en développant on obtient.

$$x_0^2 + 2x_0(k^2 + t_0^2)^{1/2} \delta t_0 / t_0 = k^2 + 2k \cdot \delta k + t_0^2 + 2t_0 \cdot \delta t_0 \rightarrow (x_0^2 - t_0^2 - k^2) + 2x_0(k^2 + t_0^2)^{1/2} \delta t_0 / t_0 = 2k \cdot \delta k + 2t_0 \cdot \delta t_0$$

$(x_0^2 - t_0^2 - k^2) = 0$ , c'est l'équation de l'hyperbole passant en  $P$ , en remplaçant  $x_0$  par sa valeur, on a:

$$2(k^2 + t_0^2) \delta t_0 / t_0 = 2k \cdot \delta k + 2t_0 \cdot \delta t_0 \rightarrow 2\delta t_0 \{ (k^2 + t_0^2) / t_0 - t_0 \} = 2k \cdot \delta k \rightarrow k^2 \cdot \delta t_0 / t_0 = k \cdot \delta k$$

Soit:  $k \cdot \delta t_0 / t_0 = \delta k$ .

Rappelons (annexe 4) que l'accélération  $a$  est telle que  $a = 1/k$  donc  $dk = -da/a^2 = k^2 da$ , car rappelons le  $k$  est constant sur la courbe  $C$ . En comparant avec (15-7-3) et en valorisant:

$$k \cdot dt/t = k \delta t_0 / t_0 = dL = \delta k = -k^2 \delta a$$

on voit que la longueur propre autour d'un point est proportionnelle à la variation d'accélération locale puisque  $k$  est constant. le signe indique bien que l'accélération décroît sur la courbe de la fusée poursuivante à la fusée poursuivie.

Nous avons ainsi bien démontré la propriété justifiant qu'un lien à l'équilibre local entre les deux fusées est décrit par la courbe  $C$  que nous avons définie.

<sup>105</sup> Pour rendre la figure lisible "l'infiniment petit" a été un "peu aménagé".

<sup>106</sup> Attention! Nous ne nous intéressons pas à l'évolution de l'accélération lorsque le temps s'écoule (la variation de l'équilibre local avec le temps) mais au gradient spatial de l'accélération pour un état d'équilibre local.

## 16- Références

1. Bell, J. S. (1987). *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press. A widely available book which contains a reprint of Bell's 1976 paper .
2. Dewan E., Beran M., 1959 « Note on stress effects due to Relativistic contraction » *American Journal of Physics* 27 (7): 517-518. American Association of Physics Teachers.  
[2 bis]: Traduction partielle commentée
3. Nawroki P. (1962) « Stress effects due to Relativistic contraction. *American Journal of Physics* 30 (10): 771-772.
4. Dewan E. (1963) « Stress effects due to Lorentz contraction » *American Journal of Physics* 31 (5): 383-386.  
[3bis-4bis ]. Traduction partielle commentée.
5. Misner, Charles; Thorne, Kip S. & Wheeler, John Archibald (1973). *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 165.
6. Nikoli, Hrvoje (6 April 1999). "Relativistic contraction of an accelerated rod". *American Journal of Physics* 67 (11): 1007-1012. American Association of Physics Teachers.  
[6 bis] traduction partielle commentée.
7. Logiciel Maxima: Maxima 5.9.2 <http://maxima.sourceforge.net>. Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (aka GCL) Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING. Dedicated to the memory of William Schelter. This is a development version of Maxima.
8. Cosmologie de Milne: <http://world.std.com/~mmcirvin/milne.html>
9. Gautreau Hoffman
10. Carroll Sean M. « *Space time and geometry* » Addison Wesley 2003
11. Hsu J & Suzuki (2005). Extended Lorentz transformation for accelerated frames and the solution of the « two ships Paradox » *AAPPS bulletin* [11 bis]. Traduction partielle commentée.
12. Damour Thibaut , 1995, *Encyclopédie Universalis: Relativité*
13. Einstein : 1907 « *Über die Vom Relativität geforderte Trägheit der Energie* » § 3 p.379-382 *Annalen der Physik*, vol XXIII p.371-384.
14. Born Max, 1909, « *Die theorie des starren Electrons in Kinematic des Relativitätprinzips* » . *Annalen der Physik* vol XXX p. 1-56
15. Ehrenfest Paul, 1907, « *Die translation deformierbarer Electronen und die Flächensatz* », *Annalen der Physik* vol XXIII, P.204-205
16. Weiss M.
17. Milne E.A, 1933, *Z. Astrophys.*6,1.