

18- Une approche hamiltonienne non covariante : le formalisme ADM

Cette approche hamiltonienne (non covariante) développée pour permettre une quantification de la gravitation par la méthode utilisée en mécanique quantique est aussi utilisée quand il n'y a pas de solution analytique exacte, ce qui n'est pourtant pas le cas ici, pour trouver une solution (numérique) à un problème de relativité générale. Elle va se révéler très utile à la compréhension de la solution particulière que nous étudions dans la forme de Painlevé. Après avoir rappelé les concepts géométriques sur lesquels cette méthode s'appuie (courbure extrinsèque) nous montrerons que le feuilletage, selon la méthode, dans la forme de Painlevé conduit à des calculs particulièrement simples.

Introduction

Dans cette approche, le “vecteur d'entraînement” va également jouer un rôle essentiel comme dans le modèle de la rivière.⁵⁶⁵

Dans cette approche⁵⁶⁶, pour résoudre (numériquement) l'équation d'Einstein (en fait le système de dix équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre) dans le cas où une solution analytique directe n'est pas possible⁵⁶⁷, on procède à un feuilletage de l'espace-temps en hypersurfaces de type espace, la variable dynamique étant alors associée à la coordonnée temporelle.

Cela brise la covariance de la théorie où aucune coordonnée⁵⁶⁸ ne joue un rôle privilégié, puisque dans ce cas la structure qu'on construit est de type $3D+1D$ au lieu de $4D$.

La méthode, développée formellement par les auteurs, garantit que, sous réserve de respecter certaines conditions discutées en détail dans le document, la méthode donne le résultat qu'une approche covariante aurait donné..

Dans l'annexe 9, nous indiquons le principe général de la méthode. Nous nous référerons en particulier, au vecteur n^μ qui est localement le vecteur unitaire de type temps normal à l'hypersurface spatiale (géodésique dans la forme de Painlevé), au scalaire N et au vecteur spatial N^i qui sont respectivement le pas temporel (lapse) qui règle l'empilage des feuilles voisines spatiales et les composantes du vecteur d'entraînement $3D$ (shift-vector) qui règle l'ajustement spatial des feuilles voisines entre elles.

Comparaison entre le formalisme ADM et celui de la rivière.

On peut d'abord noter une différence d'approche entre la rivière et la méthode ADM.

La méthode ADM fait un feuilletage $3D+1D$ alors que la rivière utilise un espace-temps de Minkowski $4D$ associé à un espace spatial euclidien opératoire $3D$..

Mais dans notre cas comme les feuilles, hypersurfaces spatiales ADM, sont euclidiennes, rien ne nous empêche de compléter cet espace spatial par une dimension temps orthogonale à cet espace, ce que donne d'ailleurs naturellement localement le vecteur n^μ .

⁵⁶⁵“Shift-vector” : vecteur d'entraînement, dont la nature est explicite dans l'approche ADM.

⁵⁶⁶Voir Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) pour l'exposé de la méthode et Lehner L. (2001) pour des compléments.

⁵⁶⁷Les solutions analytiques sont rares. Elles supposent un haut niveau de symétrie pour simplifier le système.

⁵⁶⁸Bien que le temps se caractérise par un signe différent de celui de l'espace dans la forme de la métrique. Quelques éléments généraux donnant le principe de la méthode ADM sont donnés en annexe 9.

Notons que comme n^μ est un vecteur “constant” en module, si on le choisit comme vecteur de base de la coordonnée temporelle locale, nous pouvons avoir un espace-temps local minkowskien local qui est le même que celui défini localement dans la rivière.

L’interprétation géométrique dans l’approche ADM

La figure ci-dessous va nous permettre d’illustrer quelques éléments de cette analyse.

Les sections spatiales (les feuilles H_i) réduites à deux dimensions sont munies des coordonnées cartésiennes que nous avons utilisées pour le modèle de la rivière. Le point O de coordonnées $(x = y = z = 0)$, puisque nous avons posé $z = 0$ partout, en est l’origine.

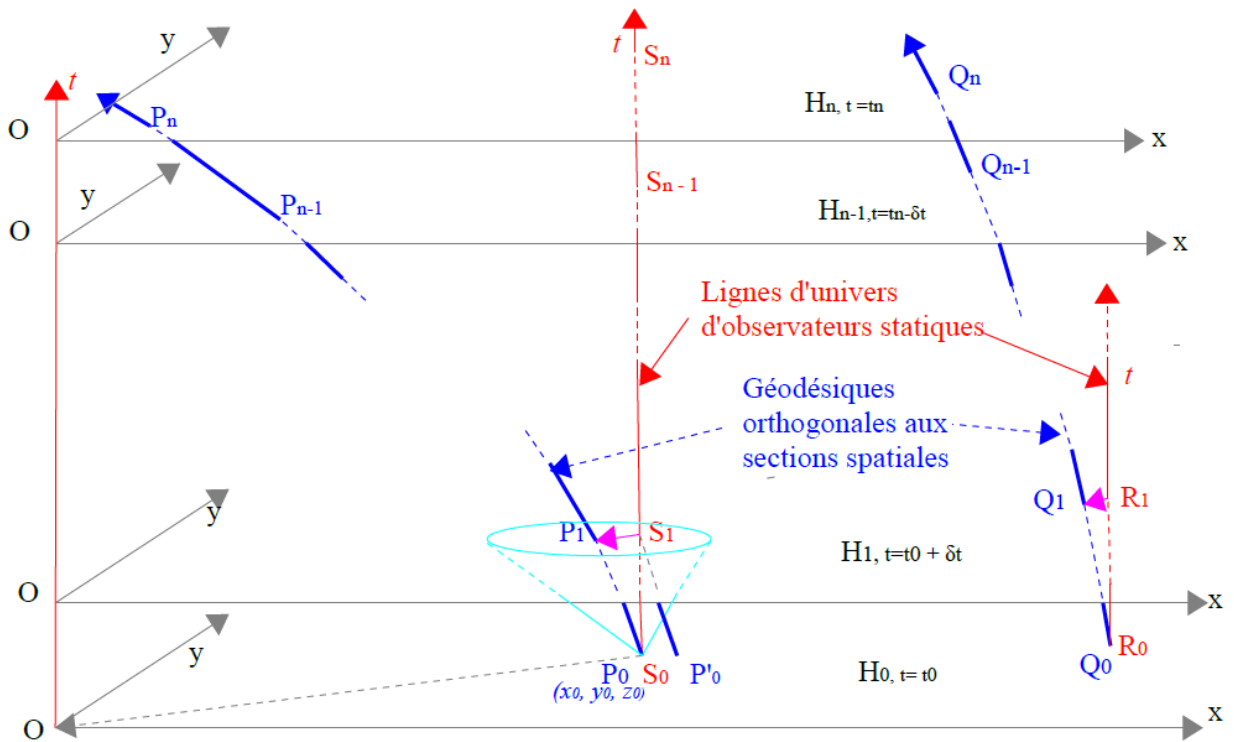


Figure 18-1. Représentation de la variété correspondante à la solution que nous étudions.

Deux géodésiques P_i, Q_i (en bleu), orthogonales aux sections spatiales, suivies par les observateurs de Painlevé, sont issues des points P_0, Q_0 de coordonnées différentes dans H_0 .

La coordonnée temporelle (en rouge) est représentée verticalement: c’est la ligne d’univers (non géodésique) des observateurs statiques dans cette forme de la métrique.

Rappelons que la valeur de la coordonnée temporelle du plan H_i représentée par (S_0S_i) , dans la base $(\partial_t)^\mu$, est identique au temps propre sur la géodésique (P_0P_i) mais ces valeurs sont mesurées sur des lignes d’univers différentes, dont l’angle dépend du vecteur d’entraînement.

La variété est formée par l'assemblage non solidaire des sections spatiales euclidiennes. Pour chaque point de la feuille, la géodésique locale (en bleu) suivie par l'observateur de Painlevé détermine le lien avec les points des autres feuilles, ainsi: $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$.

Ce modèle est valable pour tous les points, seul l'angle entre P_0P_1 et S_0S_1 dépend de la valeur locale du vecteur d'entraînement S_1P_1 et R_1Q_1 , en magenta, comme cela se voit pour les géodésiques P_i et Q_i .

Les sections spatiales H_0, H_1, H_{n-1}, H_n sont toutes identiques, la forme est stationnaire, mais l'ajustement "temporel" ne fait pas correspondre à un point de coordonnées x_0, y_0, z_0 d'une feuille (par exemple H_0) le point de mêmes coordonnées dans la feuille suivante (H_1), à la différence d'une telle construction qu'on aurait réalisée en utilisant la forme de la métrique de Schwarzschild (limitée à l'extérieur de l'horizon).⁵⁶⁹

Mais comme le point S_i de mêmes coordonnées x_0, y_0, z_0 dans H_1 que P_0 dans H_0 est lui-même l'image d'un autre point (P'_0) de H_0 et ainsi de suite, l'ajustement ainsi réalisé est une application bijective qui couvre toute la section spatiale.

Ceci illustre comment la variation locale du mouvement de l'observateur de Painlevé ne dépend que du vecteur d'entraînement N^i qui régit⁵⁷⁰ le glissement local des feuilles les unes par rapport aux autres dans leur ajustement pour produire la variété munie de ces coordonnées. Le fait que ce glissement soit non global (il est différent en chaque point) traduit la courbure de l'espace-temps⁵⁷¹.

Alors que l'hypersurface spatiale euclidienne reste identique à elle-même et malgré les apparences sur la figure, c'est la coordonnée temporelle qui tourne et non pas le vecteur tangent à la géodésique parcourue par l'observateur de Painlevé qui reste orthogonal aux sections spatiales.

Paramètres et équations essentielles de la décomposition 3+1 du champ d'Einstein.

Le principe de la méthode ADM est donné en annexe 9, mais pour comprendre les calculs et ce qui suit, il est utile d'en rappeler quelques éléments de définition.

En reprenant le chapitre 3-2, de **Arnowitt R. Deser S. Misner C.W** (2004), avec ses notations⁵⁷², nous retenons

$$g_{ij} \equiv {}^4g_{ij}, \quad N \equiv \frac{1}{\sqrt{-{}^4g_{00}}}, \quad N_i \equiv {}^4g_{0i} \quad [3.9a] \quad , \quad (18-1)$$

$$\pi^{ij} \equiv \sqrt{-{}^4g} ({}^4\Gamma_{pq}^0 - g_{pq} {}^4\Gamma_{rs}^0 g^{rs}) g^{ip} g^{jq} \quad [3.9b] \quad . \quad (18-2)$$

⁵⁶⁹Où l'ajustement fait correspondre des points de coordonnées (spatiales) identiques et où le vecteur temps $(\partial_t)^\mu$, orthogonal à l'espace, n'est pas géodésique.

⁵⁷⁰Rappelons que N est tel que le "pas temporel" d'intégration (n^μ), est constant. La valeur du glissement est bien proportionnelle au vecteur 3D d'entraînement. Ce vecteur N^i est appelé β^i dans le modèle de la rivière.

⁵⁷¹Si les feuilles étaient matérialisées par des membranes en caoutchouc, pour faire coïncider les points en correspondance entre deux feuilles successives il faudrait déformer de façon non homogène l'une des membranes pour procéder à l'ajustement (d'où la non linéarité).

⁵⁷²On respecte également la numérotation des équations de l'article entre [...] et on les renumérote dans le contexte du document entre (...).

Le préfixe indiciel haut 4 indique que nous faisons référence aux entités de l'espace-temps à 4 dimensions. Son absence indique que nous faisons référence aux entités spatiales à 3 dimensions, en particulier g^{ij} dans (18-2) est la métrique inverse de g_{ij} (métrique spatiale)⁵⁷³. Le moment conjugué π^{ij} dont la signification géométrique est naturelle est utilisé en lieu et place de la dérivée de g_{ij} . En effet, il est étroitement lié au tenseur contravariant de courbure extrinsèque et met en œuvre les dérivées spatiales de la métrique à travers les symboles de Christoffel d'indices spatiaux. Il est défini par :

$$\pi^{ij} = -g^{1/2}(K^{ij} - g^{ij} K)$$

où $K_{ij} = n_{(i,j)}$ est le tenseur de courbure extrinsèque⁵⁷⁴ (deuxième forme fondamentale) et n le vecteur unitaire normal à l'hypersurface. Il se calcule par (18-2).

Avec $N^i = g^{ij}N_j$, la métrique complète ${}^4g_{\mu\nu}$ et ${}^4g^{\mu\nu}$ peut s'écrire en utilisant (18-1)

$${}^4g_{00} = -(N^2 - N_i N^i), \quad [3.10] \quad (18-3)$$

où

$${}^4g^{0i} = N^i/N^2, \quad {}^4g^{00} = -1/N^2, \quad [3.11a] \quad (18-4a)$$

$${}^4g^{ij} = g^{ij} - (N^i N^j / N^2). \quad [3.11b] \quad (18-4b)$$

Une relation utile est :

$$\sqrt{-{}^4g} = N \sqrt{g} \quad . \quad [3.12] \quad (18-5)$$

En termes des éléments définis en (3.9), le lagrangien de la relativité générale devient⁵⁷⁵

$$L = \sqrt{-{}^4g} \quad {}^4R = -g_{ij} \partial_t \pi^{ij} - N R^0 - N_i R^i - 2 \partial_i (\pi^{ij} N_j - \frac{1}{2} \pi N^i + \nabla^i N \sqrt{g}) \quad , \quad [3.13] \quad (18-6)$$

où

$$H = R^0 \equiv -\sqrt{g} [{}^3R + g^{-1} (\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij} \pi_{ij})] \quad [3.14a] \quad , \quad (18-7a)$$

$$P^i = R^i \equiv -2 \nabla_j \pi^{ij} \quad [3.14b] \quad . \quad (18-7b)$$

La composante R^0 associée au temps (donc à l'énergie) est appelée la contrainte Hamiltonienne. Notons que c'est un scalaire construit à partir du scalaire g dérivé de la métrique, du scalaire de Ricci 3D et de scalaires dérivés du moment conjugué $\pi = g_{ij} \pi^{ij}$ et $\pi_{ij} \pi^{ij}$. Notons l'utilisation des indices hauts pour cette approche néo-newtonienne, ce qui rejoint ce que nous avons indiqué lorsque nous avons défini la métrique inverse au chapitre 16.

Les composantes R^i définissent un 3-vecteur spatial construit à partir de π^{ij} appelé la contrainte des moments spatiaux. Ces éléments sont définis dans l'hypersurface spatiale.

⁵⁷³Et non pas la partie spatiale de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$.

⁵⁷⁴C'est l'équation qui est donnée dans Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004) p.9.

⁵⁷⁵Le symbole "nabla" désigne la dérivation covariante par rapport à la métrique spatiale dans (18-6).

On note que N et N_i sont des multiplicateurs de Lagrange dans le Lagrangien, contraignant celui-ci par 4 équations supplémentaires. La dérivée covariante s'exécute en utilisant la métrique spécifiée (métrique fonction de la position de l'indice, spatiale si l'indice haut 4 n'est pas présent).

3R est le scalaire de Ricci calculé à partir de la métrique spatiale g_{ij} et les indices spatiaux sont élevés ou abaissés en utilisant g^{ij} et g_{ij} et $\pi = \pi^i$.

Équations du mouvement

Bien que les variables du Lagrangien représentent le tenseur métrique dans un espace à trois dimensions immergé dans un espace-temps à quatre dimensions, il est possible et souhaitable d'utiliser les procédures standards de la mécanique lagrangienne (équations de Lagrange en théorie des champs) pour en dériver les équations du mouvement qui décrivent l'évolution temporelle de la métrique g_{ij} et de son moment conjugué π^{ij} .

Le résultat est un système non linéaire d'équation aux dérivées partielles., voir équations 3.15a à 3.15c de Arnowitt R. Deser S. Misner C.W (2004):

$$\partial_t g_{ij} = 2Ng^{-1/2}(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi g_{ij}) + N_{i;j} + N_{j;i} \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \pi^{ij} = & -N\sqrt{g}({}^3R_{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}{}^3R) + \frac{1}{2}Ng^{-1/2}g^{ij}(\pi^{mn}\pi_{mn} - \frac{1}{2}\pi^2) \\ & - 2Ng^{-1/2}(\pi^{im}\pi_m{}^j - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij}) + \sqrt{g}(N^{ij} - g^{ij}N^{|m}{}_{|m}) \\ & + (\pi^{ij}N^m)_{|m} - N^i{}_{|m}\pi^{mj} - N^j{}_{|m}\pi^{mi} \end{aligned} \quad (3.15b)$$

En étudiant la variation des équations par rapport au pas de temps et d'espace on obtient les contraintes $H = R^0 = 0$ et $P^i = R^i = 0$.

Le calcul, particulièrement simple du fait que les sections spatiales sont euclidiennes, fait en annexe 9, en donne les constituants dans la forme de métrique de Painlevé.

Hyper-surfaces : première forme fondamentale

Dans l'annexe 9 nous donnons les éléments essentiels utilisés par la méthode ADM tels qu'ils sont présentés par les auteurs dans leur article.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, il est utile de présenter dans quel cadre général on traite les hypersurfaces⁵⁷⁶ et certaines de leurs propriétés qui vont nous être utiles dans ce cas.

Pour obtenir la métrique induite g_{ij} sur une hypersurface imbriquée dans un espace-temps de métrique $g_{\mu\nu}$, définissons le tenseur de projection

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \sigma n_\mu n_\nu, \quad (18-8)$$

⁵⁷⁶Ces éléments sont tirés de Carroll S.(2003) Appendix D et de Lehner L. (2001). Bien que ce formalisme soit général nous l'utilisons ici explicitement ou implicitement dans le cas du feuilletage ADM (hypersurface espace dans l'espace-temps). Les références sont celles des articles originaux.

où $\sigma = n_\mu n^\mu = -1$ pour un vecteur de type temps.

Ce tenseur est quelquefois appelé *première forme fondamentale*.

Hyper-surfaces : courbure extrinsèque, seconde forme fondamentale

L'annexe 9 indique que g_{ij} est la variable dans le formalisme ADM. Nous avons aussi besoin de sa dérivée pour le problème. En fait le formalisme ADM choisit une autre grandeur (qui est liée à cette dérivée) construite à partir de la courbure extrinsèque, elle-même, appelée *seconde forme fondamentale*.

La courbure extrinsèque que nous appellerons ici $K_{\mu\nu}$ se définit à partir de $P_{\mu\nu}$:

$$K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_n P_{\mu\nu}, \quad (18-9)$$

où \mathcal{L}_n est la dérivée de Lie par rapport à n^μ .

C'est ce tenseur $K_{\mu\nu}$ qui est utilisé dans le formalisme ADM (sous forme covariante et contravariante)

Comme la dérivée de Lie de $g_{\mu\nu}$ peut s'écrire comme la dérivée covariante symétrisée du vecteur normal cela peut s'écrire :

$$K_{\mu\nu} = P^\alpha{}_\mu P^\beta{}_\nu n_{(\beta;\alpha)}. \quad (18-10)$$

Comme dans le cas général n_μ n'est pas supposé nécessairement géodésique, nous pouvons définir une accélération a^μ :

$$a^\mu = n^\nu n^\mu{}_{;\nu}. \quad (18-11)$$

En rappelant que $\sigma = n_\mu n^\mu = -1$ dans le cas d'un quadrivecteur de type temps, on peut en déduire :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} - \sigma n_\mu a_\nu. \quad (18-12)$$

On peut montrer que ce tenseur, entre autres, est symétrique et que dans le cas où le champ de vecteur n^μ est géodésique ($a^\mu = 0$) en tout point (ce qui est le cas dans la forme de Painlevé) alors sa définition (18-10) se simplifie pour se réduire à :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu}. \quad (18-13)$$

C'est simplement la dérivée covariante dans la métrique 4D du vecteur covariant n_μ dont la version contravariante n^μ est le vecteur normal unitaire orthogonal aux hypersurfaces à $t = \text{constante}$, il vaut⁵⁷⁷ :

$$n_\mu = N\{-1, 0, 0, 0\}.$$

Dans la forme de Painlevé comme $g^{00} = -1$, $N = (-g^{00})^{-1/2} = 1$.

En conséquence :

$$K_{\mu\nu} = n_{\nu;\mu} = \partial_\mu n_\nu - n_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 + N\delta^0_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = N\Gamma_{\mu\nu}^0 = \Gamma_{\mu\nu}^0.$$

Car n_μ étant constant, sa dérivée partielle est nulle et n'ayant qu'une composante non nulle seule la valeur 0 de l'indice haut du symbole de Christoffel est sommé et N vaut 1.

Les coefficients de Ricci de la rivière sont la projection de la courbure extrinsèque.

Dans le formalisme ADM (que nous avons succinctement décrit et qui permet de définir l'espace-temps correspondant à des équations d'Einstein) nous utilisons K_{ij} , rétro-projection sur l'hypersurface spatiale de ce tenseur. Précisons cela.

L'hypersurface spatiale (sous-variété 3D où on a formellement défini un système de coordonnées y^i ici $\{x, y, z\}$) étant imbriquée dans la variété 4D décrivant l'espace-temps où le système de coordonnées est x^μ ici $\{x, y, z, t\}$, on définit cette rétro-projection par une application univoque $\Phi : y^i \rightarrow x^\mu$ qui est ici évidente, la matrice rectangulaire (3x4) vaut 1 pour $\mu = i$ et 0 dans le cas contraire :

$$\begin{aligned} K_{ij} &= K_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}, \\ K_{ij} &= \Gamma_{\mu\nu}^0 \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}, \\ K_{ij} &= \Gamma_{ij}^0. \end{aligned}$$

Nous avons calculé $\Gamma_{\mu\nu}^0$ à différentes occasions (voir annexe 7 par exemple) d'où il est facile d'extraire Γ_{ij}^0 .

Nous avons déjà indiqué dans le chapitre de la rivière que les Γ_{ij}^0 et étaient égaux aux coefficients de rotation de Ricci utilisés dans ce modèle⁵⁷⁸.

La nature des coefficients de rotation de Ricci utilisés dans le modèle de la rivière nous apparaît alors clairement, c'est la projection sur l'hypersurface à temps constant de la courbure extrinsèque (deuxième forme fondamentale).

⁵⁷⁷La valeur -1 pour la composante t de n_μ résulte de l'orientation de n^μ vers les t croissants et de $n_\mu n^\mu = -1$.

⁵⁷⁸Rappelons que les calculs ont montré que pour les coefficients de rotation de Ricci $\Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{ij}^0$.

En posant

$$\beta^\mu = \beta \left(0, -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r} \right) ,$$

où

$$\beta = \sqrt{\frac{2GM}{r}} ,$$

dans l'étude des congruences de géodésiques (de type temps) on définit un tenseur

$$B^\mu{}_\nu = U_{ff^\mu}{}_{;\nu} .$$

qui permet de définir par sa version covariante :

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} B^\lambda{}_\nu = g_{\mu\lambda} U_{ff^\lambda}{}_{;\nu} = U_{ff^\mu}{}_{;\nu} .$$

Cette relation, si on tient compte que $U_{ff^\mu} = n^\mu$, est identique à la relation (18-13).

Ceci montre que :

$$K_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} .$$

donc les relations :

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} ,$$

où :

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} P^\lambda{}_\nu = g_{\mu\lambda} (\delta^\lambda{}_\nu + U_{ff^\lambda} U_{ff^\nu}) = g_{\mu\nu} + U_{ff^\mu} U_{ff^\nu} .$$

Avec le tenseur de projection :

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + U_{ff^\mu} U_{ff^\nu} ,$$

qui sous forme covariante s'écrit

$$P_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} P^\alpha{}_\nu = g_{\alpha\mu} \delta^\alpha{}_\nu + g_{\alpha\mu} U_{ff^\alpha} U_{ff^\nu} = g_{\mu\nu} + U_{ff^\mu} U_{ff^\nu} ,$$

ce qui est identique à la première forme fondamentale (18-8) si on tient compte que $\sigma = -1$.

Les conclusions que nous avons tirées des congruences de géodésiques, dans le contexte de la métrique de Painlevé, s'appliquent alors à notre analyse ADM et vice versa.

Nous voyons que ces approches qui paraissaient traiter de sujets indépendants convergent, car elles traitent du même concept: " la divergence de géodésiques".⁵⁷⁹

⁵⁷⁹Cela est décrit par la déviation géodésique qui est le concept fondamental de base, qui définit l'accélération relative $a^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma$ d'une famille, paramétrée par s , de géodésiques de paramètre affine t . S est le champ de vecteurs qui pointent d'une géodésique vers l'autre et T celui des vecteurs tangents aux géodésiques. Nous

La masse (énergie) ADM

Définition

Dans le chapitre 16 nous avons évalué la masse (l'énergie) du trou noir en utilisant les équations données par le pseudo-tenseur de gravitation.

Nous avons trouvé que selon le référentiel nous obtenions des résultats différents.

Le formalisme ADM définit une masse par une intégrale à l'infini de manière similaire à ce que nous avons déjà utilisé.

Dans le document de *R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner 2004* cette masse composante temporelle du 4-moment est définie par l'équation (5.1) p. 16

$$P^0 = \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS_i \quad , \quad (a)$$

où dS_i est l'élément de surface spatiale à ∞ .

D'autres définitions équivalentes existent. Carroll (2003, p. 253, équation 6.46), avec la métrique sous forme $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donne

$$P^0 = E_{ADM} = \int d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}} \sigma^i (\partial_j h^j{}_i - \partial_i h^j{}_j) \quad , \quad (b)$$

où, $\gamma^{(2)}$ est la métrique sur la 2-sphère à l'infini spatial. Les indices spatiaux ayant été élevés en utilisant δ_{ij} (la métrique spatiale à l'infini) ceci est équivalent à :

$$P^0 = E_{ADM} = \int d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}} \sigma^i \Sigma_j (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) \quad . \quad (c)$$

On intègre sur la 2-sphère à l'infini et utilise les coordonnées cartésiennes dans tous les cas.

Les coefficients de Ricci de l'équation géodésique de la rivière sont des tenseurs

Nous avons donc une interprétation géométrique claire du résultat présenté comme “miraculeux” dans le modèle de la rivière, en particulier cela montre le caractère tensoriel des Γ_{ij}^0 , du fait de la relation $K_{ij} = \Gamma_{ij}^0$ puisque K_{ij} est un tenseur. Il n'est pas trivial qu'un sous ensemble des symboles de Christoffel soit un tenseur, car ceux-ci ne sont pas globalement les composantes d'un tenseur.

Équivalences entre le modèle de la “rivière” et le formalisme ADM

Nous avons noté l'identité entre l'espace-temps minkowskien tangent co-mobile de l'espace dans le modèle de la rivière et celui également minkowskien du formalisme ADM que les vecteurs de base spatiaux de l'hypersurface spatiale et le vecteur de type temps n^μ , qui y est normal, définissent.

Il convient donc de considérer la projection du tenseur de courbure extrinsèque qui est défini dans cette hypersurface dont on déduit les équations du mouvement dans le formalisme ADM pour le mettre en correspondance avec les paramètres définissant le mouvement dans le modèle de la rivière.

Nous avons bien noté que dans le formalisme ADM du fait du feuilletage 3D +1D c'est la variation de la métrique spatiale, exprimée totalement dans l'hypersurface spatiale qui devait être prise compte pour décrire la “courbure” (le terme représenté par la connexion dans l'équation géodésique) d'une géodésique puisque, comme nous l'avons dit, la coordonnée temporelle est linéaire et qu'il n'y a que les paramètres spatiaux qui varient.

Le fait de définir un espace local 4D de Minkowski en ajoutant la dimension temporelle par le vecteur n^μ ne change pas cela. Dans la rivière c'est dans l'équation géodésique, dans l'espace 4D de Minkowski, qu'on trouve les coefficients de rotation de Ricci égaux à K_{ij} .

Le formalisme ADM est donc équivalent et en propose une autre approche par la reconstruction de l'espace de Minkowski à partir de l'hypersurface spatiale et montre que les équations du mouvement ne dépendent nativement que de la variation spatiale, le long de la trajectoire, du tenseur métrique spatial dans la feuille.

Les paramètres régissant l'équation géodésique dans l'espace (courbe) de Painlevé de géodésiques non co-mobiles sont contrôlés par la courbure extrinsèque. Elle traduit comment les géodésiques normales à la surface, d'un faisceau, se comportent localement relativement par rapport à une géodésique de référence, ici la géodésique normale co-mobile de l'espace-temps, au centre du faisceau.

Convergence entre congruences et hypersurfaces

Cette phénoménologie est semblable à celle que nous avons évoquée lorsque nous avons traité des congruences (chapitre 13). Complétons notre analyse en vérifiant que, puisque les vecteurs normaux à l'hypersurface sont des géodésiques, l'évolution de la congruence correspond au concept de courbure extrinsèque tel qu'il a été défini.

En coordonnées cartésiennes, avec

$$U_{\mathcal{F}}^\mu = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3),$$

qui n'est autre que le vecteur que nous avons appelé ici n^μ .

Forme cartésienne de la métrique de Schwarzschild

Rappelons que la métrique s'écrit sous forme matricielle⁵⁸⁰.

$$\begin{array}{cccc}
 -1 + \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 + \frac{2mx^2}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 0 & \frac{2mxy}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & 1 + \frac{2my^2}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 0 & \frac{2mxz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & \frac{2myz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} & 1 + \frac{2mz^2}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}
 \end{array}$$

On en déduit immédiatement $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$.

Le calcul de $\Sigma_j (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj})$ donne le résultat suivant pour x^i :

$$\begin{array}{c}
 \frac{4mx}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 \frac{4my}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \\
 \frac{4mz}{(x^2+y^2+z^2)(-2m+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}
 \end{array}$$

Si on effectue $\Sigma_j (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj})$, cela donne (de façon évidente) la même chose.

Remarquons que ces termes sont identiques à ceux (les h^{00i}) que nous avons trouvé lors du calcul avec le pseudo-tenseur de gravitation dans ces coordonnées au chapitre 16, alors :

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G} \oint (\partial_j h_{ji} - \partial_i h_{jj}) \frac{x^i}{r} (r^2) \sin(\theta) (d\theta) d\phi = \frac{4M}{16\pi G} \iint \sin(\theta) (d\theta) d\phi = M$$

Il est alors évident que l'intégrale (c) qui a la même forme mais où les h^{00i} sont remplacés par $\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}$ va donner le même résultat, ce qu'on vérifie simplement à savoir :

$$E_{ADM} = M$$

Forme cartésienne de la métrique de Painlevé.

Si on fait le même calcul avec la forme cartésienne de Painlevé⁵⁸¹, la métrique spatiale étant euclidienne $g_{ij} = \delta_{ij}$, alors $\Sigma_j (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) = \Sigma_j (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) = 0$. Il est évident qu'on va trouver :

$$E_{ADM} = 0.$$

⁵⁸⁰ Dans les tableaux issus de Mathematica, M est noté m .

⁵⁸¹ On peut aussi le faire dans les autres formes cartésiennes de la métrique (Finkelstein-Eddington, Isotrope,...) on trouve des résultats différents mais on ne trouve de résultat nul que dans la forme de Painlevé.

Ce qui confirme les résultats que nous avons trouvé avec la méthode utilisant le pseudo-tenseur de gravitation, confirmant l'équivalence de l'approche ADM et de celle du pseudo-tenseur de Landau & Lifchitz.

Nous n'avons pas calculé les valeurs de P^i (composantes spatiales du quadrivecteur impulsion matière-gravitation). En formalisme ADM elles sont données par :

$$P^i = -2 \oint \pi^{ij} dS_j .$$

Le terme π^{ij} est l'équivalent de h^{i0j} dans l'équation donnant P^i par le formalisme de Landau et Lifchitz, ce qui explique l'équivalence des π^{ij} et h^{i0j} que nous avons relevée au chapitre 16.

Le Hamiltonien (caractéristique de l'énergie) calculé dans le formalisme ADM est nul dans cette forme (voir Annexe 9).

Cela confirme que dans cette forme la gravitation semble effacée, ce qui se manifeste par une masse (énergie) nulle dans ces coordonnées⁵⁸².

La forme de la métrique dans le formalisme ADM appliqué à la forme de Painlevé

Méthode

Avec comme nous l'avons vu, $g_{00} = N^2 - N_i N^i$, dans le formalisme ADM, du fait du feuilletage, on peut mettre la métrique sous la forme⁵⁸³:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (18-14)$$

C'est bien ce qu'on retrouve dans la forme de Painlevé avec $N = (-g^{00})^{-1/2} = 1$ et $N_i = g_{0i}$, donnés dans l'annexe 7 par exemple. Dans la forme de Painlevé $g_{ij} = \delta_{ij}$ on peut alors mettre (A9-4) sous la forme donnée dans le modèle de la rivière

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^\mu + N^\mu dt)(dx^\nu + N^\nu dt),$$

où

$$N^\mu = t^\mu - N \cdot n^\mu, \quad (18-15)$$

avec

$$n^\mu = N \cdot t^{;\mu} = N \cdot g^{\mu\nu} t_{;\nu} = N \cdot g^{\mu\nu} \partial_\nu t,$$

$$N^\mu n_\mu = 0, \quad (18-16)$$

ce qui fait que dans ce référentiel, $N^\mu = (0, N^i)$.

⁵⁸²Nous retrouvons bien le caractère "non covariant" de l'énergie de gravitation qui dépend de l'observateur. Notons que cela redevient cohérent, la masse gravitationnelle étant nulle dans tous les cas, si on considère non pas le trou noir ou le trou blanc séparément mais la somme des "flux" traversant l'ensemble des deux, ce qui est d'ailleurs conforme avec ce qu'on est en droit de s'attendre quand le tenseur énergie-impulsion est nul partout (sauf en un point où il est singulier).

⁵⁸³Lehner L. (2001) éq. (2 – 4), p.7.